JOSÉ DE SAM LAZARO
PAUL-ANDRÉ MEYER

Questions de théorie des flots (VII)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 89-96
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__89_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1972/73

QUESTIONS DE THEORIE DES FLOTS (VII)

par J. de SAM LAZARO et P.A.MEYER

Cet exposé est un peu une digression : il présente le théorème de M.NISIO (on polynomial approximation for strictly stationary processes , J. Math. Soc. of Japan 12, 1960, 207-226) suivant lequel on peut approcher "en loi " un processus stationnaire ergodique par des processus stationnaires construits sur le flot brownien. Après cela, nous donnerons quelques indications sur le cas des processus non ergodiques.

Le travail de NISIO repose sur une idée de WIENER (Homogeneous Chaos, Amer. J. Math. 60, 1938, 897-936).

L'exposé ne diffère de celui de NISIO que par la présentation. Mais là, il nous semble que la topologie que nous introduisons (et qui n'est peut être pas la même que celle de NISIO) présente un certain intérêt pour le maniement des lois de processus mesurables assez irréguliers. Elle repose sur une vieille idée de CARTIER.

1. TOPOLOGIE ET HEURISTIQUE

Nous partons d'un flot $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,\theta_t)$, que nous ne supposons pas filtré. L'application $(t,\omega)\longmapsto\theta_t\omega$ est seulement supposée mesurable de $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\times\underline{\underline{F}}$ <u>complétée</u> pour le produit de la mesure de Lebesgue λ par la loi P, dans l'espace mesurable $(\Omega,\underline{\underline{F}})$. Nous considérons un processus stationnaire $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ à valeurs dans un espace métrique compact K (cela s'applique aux processus réels : prendre $K=\overline{\mathbb{R}}$). Comme $X_t=X_0\circ\theta_t$, le théorème de Fubini entraîne que l'ensemble invariant des ω tels que $X_\cdot(\omega)$ soit mesurable au sens de Lebesgue est plein pour la loi P . quitte à modifier un peu le processus, on peut supposer que c'est Ω tout entier.

Nous désignons maintenant par W l'ensemble des mesures de Radon sur l'espace localement compact $K\times\mathbb{R}$, dont la projection sur $\mathbb{R}$ est la mesure de Lebesgue. Muni de la topologie de la convergence vague, W est un espace compact métrisable. Soit $\underline{\underline{G}}^o$ sa tribu borélienne. Si $w\in W$, soit $\theta_t w$ la mesure image de w par l'application $(x,s)\longmapsto(x,s+t)$ de $K\times\mathbb{R}$ dans lui même. Il est clair que (θ_t) est un groupe mesurable d'automorphismes de $(W,\underline{\underline{G}}^o)$ (il est même bien mieux que mesurable).

Nous avons dit plus haut que pour tout $\omega\in\Omega$, la trajectoire $X_{\cdot}(\omega)$ est mesurable au sens de Lebesgue. L'application $t\mapsto(X_t(\omega),t)$ est donc aussi mesurable de $\mathbb{R}$ dans $K\times\mathbb{R}$, et l'on peut donc définir la mesure $\tau(\omega)$ de λ par cette application. Il est clair que $\tau(\omega)\in W$, et que τ est mesurable de Ω dans W. La mesure image de P par τ est invariante par translation : nous l'appellerons la <u>loi</u> du processus (X_t), et nous la noterons $\underline{\underline{L}}_X$. Le système $(W,\underline{\underline{G}},\theta_t,\underline{\underline{L}}_X)$ est un flot.

La loi $\underline{\underline{L}}_X$ contient toute l'information sur le processus (X_t) que l'on exige d'habitude d'une " loi" de processus. Montrons par exemple qu'elle permet de calculer la loi jointe du couple (X_u,X_v) , où u et v sont deux instants. Il nous suffit de savoir calculer $E[f(X_u)g(X_v)]$ où f et g sont continues sur K. D'après le théorème ergodique local, $f(X_u) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\int_{u-h}^{u} f(X_s)ds$, $g(X_v) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\int_{v-h}^{v} g(X_s)ds$, les deux limites étant prises au sens de L^2 et p.s.. Ainsi

$$E[f(X_u)g(X_v)] = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h^2} \int_W \langle w,f\otimes I_{[u-h,u[}\rangle\langle w,g\otimes I_{[v-h,v[}\rangle \underline{\underline{L}}_X(dw)$$

Plus précisément encore, notons $\nu_h(w)$ la loi de probabilité sur K

$$\langle\nu_h(w),f\rangle = \frac{1}{h}\langle w, f\otimes I_{[-h,0[}\rangle$$

adjoignons à K un point isolé ∂ , et définissons une fonction ξ_0 sur W

- si $\nu_{1/n}(w)$ converge étroitement sur K vers une mesure ε_x , $\xi_0(w)=x$
- sinon, $\xi_0(w)=\partial$

D'après le théorème ergodique local, si l'on pose $\xi_t=\xi_0\circ\theta_t$, le processus $(\xi_t(\tau(\omega)))_{t\in\mathbb{R}}$ sur Ω est une <u>modification</u> du processus (X_t).

Dans ces conditions, ce que nous appellerons la <u>convergence en loi</u> des processus stationnaires à valeurs dans K, ce sera la convergence étroite de leurs lois $\underline{\underline{L}}_X$ sur l'espace compact W.

Reprenons maintenant le processus stationnaire (X_t) sur Ω. Nous allons nous livrer à quelques considérations heuristiques.
Considérons le " flot des physiciens" : son espace de base est $\Omega^! = \mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne $\underline{\underline{F}}^!$ et de l'opérateur de translation θ_t usuel. La loi de probabilité est la loi uniformément répartie sur $\mathbb{R}$

$$E^![f] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N}\int_{-N}^{+N} f(u)du$$

(on comprend pourquoi les !). A tout $\omega\in\Omega$, associons un <u>processus</u> sur $\Omega^!$ ainsi défini : rappelons qu'un élément $\omega^!$ de $\Omega^!$ est un nombre.

$$Z_t^\omega(\omega^!) = X_{t+\omega^!}(\omega)$$

Quelle est la loi du "processus" Z^ω ? Si φ est une fonction bornée sur W , nous avons d'après la définition de la"mesure"

$$E^{!}[\varphi(Z^{\omega}_{.}(.)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N}\int_{-N}^{+N} \varphi(\theta_s(\tau\omega))\, ds$$

Si le processus (X_t) est ergodique, cela vaut $E[\varphi(\tau\omega)]$ pour presque tout ω . Ici, l'ensemble de mesure nulle dépend de φ, mais comme W est un espace métrique compact, il suffit de considérer une infinité dénombrable de fonctions φ pour avoir le

PSEUDOTHEOREME. Soit J l'application identique de $\Omega^{!}$ dans $\mathbb{R}$, qui satisfait aux conditions suivantes

1) $J(\theta_s\omega^{!}) = J(\omega^{!})-s$ identiquement
2) J est "uniformément répartie sur $\mathbb{R}$"

Pour tout $\omega\in\Omega$, soit Z^{ω} le processus stationnaire sur $\Omega^{!}$

$$Z^{\omega}_t(\omega^{!}) = X_{J(\theta_t\omega^{!})}(\omega)$$

Alors, si (X_t) est ergodique, les processus (X_t) et (Z^{ω}_t) ont même loi pour presque tout ω.

Nous allons rendre ce raisonnement rigoureux, en approchant le "flot des physiciens" lui même. Nous remplacerons cependant la "répartition uniforme sur $\mathbb{R}$" par la "mesure" unilatérale un peu moins intuitive

$$E^{!}[f] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\int_0^N f(s)ds$$

qui bien que "répartie sur $\mathbb{R}_+$" est invariante par translation ! Assez de bêtises.

2. LE THEOREME DE NISIO

Nous nous donnons un flot <u>ergodique</u> $(\tilde{\Omega}, \tilde{\underline{\underline{F}}}, \tilde{P}, \theta_t)$ (sur le rôle de l'ergodicité, cf. Remarque à la fin du §) . Nous cherchons à construire une v.a. J à valeurs positives telle que

1) Pour tous les $\tilde{\omega}$ appartenant à un ensemble de probabilité voisine de 1, on a pour tout s appartenant à un intervalle [0,A] - où A est grand - $J(\theta_s\tilde{\omega})=J(\tilde{\omega})-s$.

2) La loi de J est "bien étalée" sur $\mathbb{R}_+$

Notre méthode va consister à construire des processus ponctuels discrets ayant de moins en moins de sauts, et de prendre pour J le premier saut après 0. Pour commencer, construisons ces processus.

D'après le théorème d'AMBROSE, nous pouvons identifier notre flot $(\tilde{\Omega},\dots,\tilde{\theta}_t)$ à un flot sous une fonction f <u>bornée inférieurement</u> , au dessus d'un flot discret $(\Omega^{\circ}, \underline{\underline{F}}^{\circ}, P^{\circ}, s)$. Comme f est bornée inférieurement, la mesure $P^\bullet$ est bornée. D'autre part, un ensemble s-invariant non $P^\bullet$-négligeable donne évidemment lieu à un ensemble invariant non négligeable dans le flot sous f : celui-ci étant ergodique, l'automorphisme s est ergodique. Mais un espace mesuré fini admettant un automorphisme ergodique est sans atomes[1]: il existe donc une suite décroissante A_n d'éléments de $\underline{\underline{F}}^\bullet$ tels que $A_1=\Omega^\bullet$, $P(A_n)>0$ pour tout n , $A_n \downarrow \emptyset$. Dans ces conditions, notre n-ième processus ponctuel sera le processus dont les sauts seront les rencontres de $A_n \times \{0\}$, et nous noterons J_n le premier saut après 0 du n-ième processus ponctuel . Noter les propriétés :

1) J_n est p.s. fini pour tout n, et $J_n \uparrow \infty$ p.s.

2) Si $0 \leqq s < J_n$, on a $J_n(\theta_s \omega) = J_n(\omega) - s$.

Nous aurons besoin du lemme suivant sur les lois μ_n des v.a. J_n

LEMME 1. <u>Il existe des lois de probabilité λ_n sur $\mathbb{R}_+^*$, telles que</u> $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(]A,\infty[) = 1$ <u>pour tout</u> A , <u>et que l'on ait</u>

$$\mu_n = \int_{]0,\infty[} \upsilon_t \lambda_n(dt)$$

<u>où υ_t désigne la loi uniforme sur l'intervalle</u> $]0,t[$.

DEMONSTRATION. Omettons d'abord l'indice n : soit J le premier saut >0 d'un processus ponctuel discret, dont l'ensemble de sauts soit p.s. non borné. Soit μ la loi de J. Nous savons d'abord (exposé 1) que $\mu(\{t\})=0$ pour tout $t \geqq 0$. Ensuite, si s>0

$$P\{ J\in(a,b) \} = P(\{\text{au moins un saut entre a et b}\} \cap \{\text{pas de saut entre 0 et a}\})$$

$$= P(\{\text{au moins un saut entre a+s et b+s}\} \cap \{\text{pas de saut entre s et a+s}\})$$

tandis que

$$P\{ J\in(a+s,b+s) \} = P(\{\text{au moins un saut entre a+s et b+s}\} \cap \{\text{pas de saut entre 0 et a+s}\})$$

Ainsi, $\mu(a,b) \geqq \mu(a+s,b+s)$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que cela entraîne que μ est absolument continue avec une densité décroissante h, que l'on peut supposer continue à droite. Alors on a

$$\mu = \int_{]0,\infty[} \upsilon_t \lambda(dt) \quad \text{avec } \lambda(dt) = -t\,dh(t).$$

Il est clair maintenant que si des mesures μ_n 'partent vers $+\infty$' il en est de même des mesures λ_n correspondantes.

---

1 **C'est faux, mais pas trop faux. Rectification à la fin de l'exposé.**

Revenons maintenant à notre problème initial : flot $(\Omega,\ldots,)$, processus stationnaire ergodique (X_t). Choisissons un ω "typique" dans ω , c'est à dire tel que pour toute fonction continue φ sur l'espace compact métrisable W, on ait

$$\text{(i)} \qquad E[\varphi(\tau.)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\int_{-N}^{0}\varphi(\Theta_s\tau\omega)ds = \lim_{N\to\infty} \int\varphi(\Theta_{-s}\tau\omega)\upsilon_N(ds)$$

Construisons des processus stationnaires Z^n sur le flot $(\tilde{\Omega},\ldots)$ en posant

$$Z_t^n(\tilde{\omega}) = X_{-J_n(\Theta_t\tilde{\omega})}(\omega)$$

Soit $\underline{\underline{L}}_n$ la loi de (Z_t^n) sur W : je dis que $\underline{\underline{L}}_n$ converge vers $\underline{\underline{L}}_X$. Il suffit de vérifier que $\underline{\underline{L}}_n(\varphi)$ converge vers $\underline{\underline{L}}_X(\varphi)$ pour une fonction continue φ sur W, comprise entre 0 et 1, qui ne dépend que des valeurs prises par w sur un intervalle compact I (ces fonctions forment un ensemble total pour la convergence uniforme : th. de Stone). Par la stationnarité, on peut supposer que I est un intervalle $[0,a]$. Notons w la"trajectoire" $\tau\omega$, et $\tilde{w}_n$ la"trajectoire"correspondant à $Z_\cdot^n(\tilde{\omega})$. Si $J_n(\tilde{\omega}) > a$, on a $Z_t^n(\tilde{\omega}) = X_{t-J_n(\tilde{\omega})}(\omega)$ pour $t\in[0,a]$, de sorte que $\tilde{w}_n=\Theta_{-J_n(\tilde{\omega})}w$ pour $t\in[0,a]$, et que $\varphi(\tilde{w}_n) = \varphi(\Theta_{-J_n(\tilde{\omega})}w)$.

Choisissons $\varepsilon>0$, puis $A>a/\varepsilon$ assez grand pour que

$$|\underline{\underline{L}}_X(\varphi) - \int\varphi(\Theta_{-s}w)\upsilon_N(ds)| < \varepsilon \quad \text{pour tout } N\geq A$$

puis n_0 assez grand pour que $\lambda_n([0,A])< \varepsilon$ si $n\geq n_0$. On a alors aussi

$$|\underline{\underline{L}}_X(\varphi) - \int\varphi(\Theta_{-s}w)\mu_n(ds)| < 2\varepsilon \quad \text{si } n\geq n_0$$

Mais aussi $P\{J_n\leq a\} = \mu_n([0,a]) \leq \varepsilon+ \frac{a}{A}\leq 2\varepsilon$. Ainsi

$$|\underline{\underline{L}}_X(\varphi)-\int_{]a,\infty[}\varphi(\Theta_{-s}w)\mu_n(ds)|=|\underline{\underline{L}}_X(\varphi)-E[\varphi(\Theta_{-J_n(\tilde{\omega})}w)I_{\{J_n(\tilde{\omega})>a\}}|\leq 4\varepsilon$$

Nous remplaçons $\varphi(\Theta_{-J_n(\tilde{\omega})}w)$ par $\varphi(\tilde{w}_n)$, puis nous faisons à nouveau disparaître l'indicatrice $I_{\{J_n>a\}}$, et il vient

$$|\underline{\underline{L}}_X(\varphi) - E[\varphi(\tilde{w}_n)]| \leq 6\varepsilon$$

Ceci vaut $|\underline{\underline{L}}_X(\varphi)-\underline{\underline{L}}_n(\varphi)|$, et nous avons prouvé[1]:

THEOREME 1. <u>Etant donné un processus stationnaire ergodique</u> (X_t) <u>à valeurs dans</u> K, <u>on peut trouver sur</u> tout[1] <u>flot ergodique</u> $(\tilde{\Omega},\underline{\underline{F}},\tilde{P},\Theta_t)$ <u>une suite de processus stationnaires</u> (Z_t^n) <u>dont les lois convergent vers celle de</u> X.

On voit donc que cette propriété d'approximation n'est pas, comme on pourrait le croire, propre au flot brownien. Seule la construction explicite par NISIO des temps J_n utilise des propriétés quelque peu spéciales à ce flot.

1 C'est faux. Voir rectification à la fin de l'exposé.

REMARQUE. Un examen de la démonstration montre que le point essentiel est la possibilité de construire des processus ponctuels discrets ayant de très grands intervalles entre leurs sauts, et dont l'ensemble des sauts est p.s. non borné. C'est une hypothèse certainement bien moins forte que l'ergodicité : par exemple, elle est trivialement satisfaite pour un mélange fini de flots ergodiques[1] : l'espace est décomposé en un nombre fini d'ensembles invariants, sur chacun desquels le flot induit est ergodique : on construit alors sur chacun d'eux les processus ponctuels nécessaires. Cet exemple est troublant, car on aurait envie de passer des mélanges finis aux mélanges continus, et d'en conclure que le théorème 1 vaut pour "n'importe quel" espace $\tilde{\Omega}$. Cela vaudrait la peine d'être examiné.

3. QUELQUES REMARQUES SUR LES FLOTS NON ERGODIQUES

Notre but est ici d'esquisser une démonstration du second théorème de NISIO, suivant lequel toute loi de processus stationnaire peut être approchée par des lois de processus stationnaires ergodiques (et donc, d'après le th.1, approchée par des lois de processus stationnaires construits sur un flot ergodique arbitraire[1]).

Nous allons montrer d'abord que la topologie introduite dans l'ensemble des lois de processus stationnaires se prête bien à la théorie de la décomposition ergodique. A cet effet, considérons d'abord l'ensemble W des mesures sur $K\times\mathbb{R}$ dont la projection sur $\mathbb{R}$ est la mesure de Lebesgue, muni de la topologie vague qui en fait un compact métrisable. Cet ensemble est trop gros pour nos besoins : les mesures qui nous intéressent sont les mesures images de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ par une application $t\mapsto(f(t),t)$ de $\mathbb{R}$ dans $K\times\mathbb{R}$, i.e. les éléments de W portés par un graphe. Nous noterons par W_0 l'ensemble des éléments de W possédant cette propriété : on peut montrer que W_0 est l'ensemble des éléments extrémaux du convexe compact métrisable W, c'est donc (th. de CHOQUET) un $\underline{\underline{G}}_\delta$ de W, donc un espace polonais .

La loi d'un processus stationnaire est une loi sur W, portée par W_0 et invariante par translation. Inversement, toute loi μ sur W_0 invariante par translation est la loi d'un processus stationnaire à valeurs dans K. Pour voir cela, nous supposerons que K est une partie de l'intervalle $I=[0,1]$ (le cas général exige de procéder de la même manière avec le cube $[0,1]^{\mathbb{N}}$: seules les notations sont plus compliquées).

---

1 Toutes ces assertions doivent être un peu tempérées par la rectification de la dernière page : il y a des flots ergodiques bêtes sur lesquels le théorème de Nisio n'est pas vrai.

Fixons $k_0 \in K$ et posons

$$X_0(w) = \limsup_{h\to 0} \frac{1}{h} w(I\times[-h,0]) \text{ si cette quantité appartient à } K$$
$$= k_0 \text{ sinon}$$

et $X_t(w)=X_0(\theta_t w)$. La fonction $(t,w)\longmapsto X_t(w)$ est borélienne sur $\mathbb{R}\times W$, et le théorème de dérivation de Lebesgue entraîne que w est bien l'image de la mesure de Lebesgue par $t\longmapsto (X_t(w),t))$. Toute loi μ sur W_0 est donc la loi d'un processus (le processus (X_t) sur W_0 muni de μ) et toute loi μ invariante par translation est la loi d'un processus stationnaire.

L'ensemble des lois sur W invariantes par translation est un ensemble convexe fermé dans l'ensemble de toutes les lois sur W : il est donc convexe compact métrisable, et d'après le théorème de CHOQUET toute loi μ invariante par translation admet une représentation intégrale

$$\mu = \int \iota\lambda(d\iota)$$

où λ est portée par l'ensemble des lois invariantes par translation extrémales. Si μ est portée par W_0 , la loi ι est portée par W_0 pour λ-presque tout ι , et μ est bien un mélange de lois de processus stationnaires extrémales. Il est trivial qu'une loi extrémale est ergodique (car une décomposition de W en deux ensembles invariants non triviaux donne lieu à une décomposition non triviale de la loi). Nous ne nous occuperons ici ni de la réciproque, ni de l'unicité : tout cela est classique (la seule chose qui ne le soit peut être pas est le choix de l'espace topologique W).

Une conséquence est alors la suivante : la loi μ sur W_0 est limite de lois de la forme $t_1\mu_1+\ldots+t_n\mu_n$, où $\mu_1,\ldots,\mu_n$ sont ergodiques, et les t_i sont tous >0 de somme 1. Pour approcher μ par des lois de processus stationnaires ergodiques, il suffit donc d'approcher une telle combinaison convexe.

Voici quelle est l'idée de l'approximation. Nous fabriquons n copies de l'espace W, que nous appelons $W_1,\ldots W_n$, et que nous munissons respectivement des mesures $\mu_1,\ldots,\mu_n$. Nous notons d'autre part Ω l'ensemble des applications continues à droite et pourvues de limites à gauche de $\mathbb{R}$ dans l'espace discret $\{1,2..,n\}$, muni d'une mesure π pour laquelle les applications coordonnées forment une chaîne de Markov stationnaire, de mesure invariante $t_1\varepsilon_1+\ldots+t_n\varepsilon_n$, et ergodique . Formons l'espace probabilisé produit $\Omega\times W_1\times\ldots\times W_n$, et définissons une application g de cet espace dans W, qui associe à $(\omega,w_1,\ldots,w_n)$ l'unique mesure w qui coincide avec w_i sur tout intervalle ouvert où ω est dans l'état i , pour tout $i=1,\ldots,n$. Alors la loi image $g(\pi\otimes\mu_1\otimes\ldots\otimes\mu_n)$ est une loi de processus stationnaire etgodique. Mais par ailleurs elle est très proche de $t_1\mu_1+\ldots+t_n\mu_n$ en loi si la chaîne de Markov est " presque constante", i.e. à évolution très lente. Dire que nous avons démontré ceci serait exagéré : c'est tout juste intuitivement évident. Mais de toute façon il s'agit d'un résultat connu, et il n'est sans doute pas utile de passer beaucoup de temps à le redémontrer sans l'améliorer.

RECTIFICATION

<u>Tous nos remerciements vont à A.Benveniste pour les remarques suivantes.</u>
Il est dit dans la démonstration du théorème de Nisio que "tout espace mesuré fini $(\dot{\Omega},\dot{\underline{F}},\mu)$ admettant un automorphisme ergodique s est sans atomes" . C'est faux, mais les conséquences de cette erreur ne sont pas graves.

Regardons les choses de plus près. Soit A un atome ; les ensembles $s^k(A)$, $k\in Z$, ont tous la même mesure (strictement positive), et leur réunion est un ensemble invariant. Comme s est ergodique, leur réunion est l'espace entier. Comme la mesure est finie, ils ne peuvent être tous disjoints. Comme ce sont des atomes, ils sont deux à deux ou disjoints, ou égaux. De tout cela résulte qu'il existe un plus petit entier $n>0$ tel que $s^n(A)=A$, et que les ensembles $A,s(A),\ldots,s^{n-1}(A)$ forment une partition de l'espace. Autrement dit, le flot est isomorphe au flot discret suivant :

$\dot{\Omega} = \{0,1,\ldots,n-1\}$ avec la tribu de tous les sous-ensembles
$\mu(\{0\})=\mu(\{1\})\ldots=\mu(\{n-1\})= c$
$s(0)=1,\ s(1)=2,\ldots,s(n-1)=0$

Ces flots discrets sont évidemment ergodiques, et deux à deux non isomorphes pour des valeurs différentes de n et de c. Mais ce qui nous intéresse, c'est le flot bâti sur $(\dot{\Omega},s,\mu)$, sous une fonction f partout >0 , telle que $c(f(0)+f(1)+\ldots+f(n-1))=1$, et un instant de réflexion montrera que ce flot admet des trajectoires périodiques de période $f(0)+f(1)+\ldots+f(n-1)=1/c$, et qu'il est en fait <u>isomorphe au flot de translation uniforme sur le tore de longueur</u> $1/c$, muni de sa loi uniforme.

Il est bien clair qu'on ne peut approcher en loi un processus stationnaire quelconque par des processus stationnaires périodiques de période fixée. Donc ce flot ne vérifie effectivement pas le résultat de Nisio.

Enfin, nous devons montrer que le flot du mouvement brownien vérifie le th. de Nisio, autrement dit n'est pas isomorphe à une translation uniforme sur un tore. C'est immédiat, le mouvement brownien étant un K-flot, et la translation uniforme n'étant pas faiblement mélangeante.