SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Retour aux retournements

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 556-564
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__556_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1974/75

RETOUR AUX RETOURNEMENTS

par P.A.Meyer

Cet exposé se compose de deux paragraphes indépendants. Le premier a pour but d'attirer l'attention sur une difficulté dans l'exposé de l'an dernier (les travaux d'AZEMA sur le retournement du temps, séminaire VIII, p.262-287), difficulté signalée à AZEMA par SHARPE. Le second donne des indications sur une théorie du retournement non homogène, à peu près triviale.

1. REPRESENTATION DE MESURES PAR DES FONCTIONNELLES

Soit (X_t) un processus de Markov droit à valeurs dans un espace d'états E, que nous supposerons transient. Rappelons l'énoncé du théorème qui figure p.285 de l'exposé antérieur.

THEOREME. <u>Soient</u> α <u>et</u> β <u>deux mesures bornées</u>, β <u>ne chargeant pas les ensembles</u> α-<u>négligeables et</u> α-<u>polaires</u>. <u>Il existe alors une fonctionnelle additive gauche</u> (A_t) - <u>essentiellement unique</u> - <u>telle que l'on ait pour toute</u> f <u>borélienne positive sur</u> E

(1) $$<\beta,f> = E^{\alpha}[\int_{[0,\infty[} f\circ X_s \, dA_s]$$

Cet énoncé et sa démonstration sont corrects, mais à condition d'élargir un peu le sens du mot "fonctionnelle additive" : il faut permettre que l'on ait P^x-p.s. $A_{0+}=+\infty$ (donc $A_t=+\infty$ pour tout $t>0$) pour des x qui forment un ensemble H, α-négligeable et α-polaire.

Avant de prouver cela, indiquons l'exemple de SHARPE : considérons le processus de translation uniforme sur la demi-droite positive

$$E=\mathbb{R}_+ \ , \ \Omega=\mathbb{R}_+ \ , \ X_t(\omega)=\omega+t \ , \ \underline{\underline{F}}=\underline{\underline{F}}_t=\underline{\underline{B}}_u(\mathbb{R}_+), \ P^x=\varepsilon_x \ , \ \theta_t\omega=\omega+t$$

et prenons pour α la mesure bornée $\alpha(dx)=e^{-x}dx$, pour β une mesure bornée $\beta(dx)=f(x)dx$. Alors la fonctionnelle additive est donnée par $A_t(\omega) = \int_{\omega}^{\omega+t} \frac{f(x)dx}{1-e^{-x}}$, et on peut avoir une explosion P^x-presque sûre pour x=0.

Reprenons donc rapidement la démonstration en question. Celle ci comporte la construction d'une mesure bornée λ sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$, qui ne charge pas les ensembles P^{α}-évanescents, et qui est à la fois optionnelle et coprévisible, telle en outre que $\beta(f) = \int f(X_s(\omega))\lambda(ds,d\omega)$. C'est cette mesure qu'il s'agit de représenter.

Nous commençons par l'écrire sous la forme

$$\lambda(Z) = E^{\alpha}[\int_{[0,\infty[} Z_s d\mathring{A}_s]$$

avec un processus croissant gauche $(\mathring{A}_t)$, adapté et coprévisible. Nous faisons la remarque suivante de théorie générale des processus :

LEMME. Tout processus croissant prévisible (B_t) est somme d'une série de processus croissants prévisibles (B^n_t) tels que les v.a. B^n_∞ soient partout majorées par 1.

La démonstration est immédiate.

Appliquant alors l'argument de retournement du temps du haut de la page 281, il vient :

LEMME. Le processus croissant $(\mathring{A}_s)$ est P^{α}-indistinguable de la somme d'une série $(\mathring{A}^n_t)$ de fonctionnelles gauches (i.e., de processus croissants gauches coprévisibles, mais non nécessairement adaptés) tels que les v.a. $\mathring{A}^n_\infty$ soient majorées par 1.

Considérons alors la fonction fortement surmédiane régulière $\varphi_n = E^{\cdot}[\mathring{A}^n_\infty]$: elle est partout majorée par 1, et on peut trouver une fonctionnelle additive gauche adaptée (A^n_t) telle que $\varphi_n = E^{\cdot}[A^n_\infty]$ - c'est l'opération qu'on ne savait pas faire directement sur la fonction $\varphi = E^{\cdot}[\mathring{A}_\infty]$, qui n'était pas partout finie. (A^n_t) est la projection duale optionnelle de $(\mathring{A}^n_t)$; comme $(\mathring{A}_t)$ est adaptée, $\mathring{A}_t$ est indistinguable de la fonctionnelle

(2) $$A_t = \sum_n A^n_t$$

C'est une fonctionnelle additive adaptée. Soit G l'ensemble $\{\varphi=\infty\}$. Comme $\alpha(\varphi)=\beta(1)<\infty$, G est α-négligeable. Comme on a pour tout temps d'arrêt T $E^{\alpha}[\varphi\circ X_T] \leqq E^{\alpha}[\varphi\circ X_0] = \alpha(\varphi) < \infty$, on a aussi $P^{\alpha}\{X_T \in G\}=0$, et G est α-polaire. Pour $x \notin G$ on a $E^x[A_\infty] < \infty$, donc $A_\infty < +\infty$ P^x-p.s., la série (2) converge uniformément P^x-p.s., et sa somme est continue à gauche sur $\mathbb{R}_+$. Examinons ce qui se passe si $x \in G$.

Suivant un raisonnement de DELLACHERIE (séminaire IV, p.74), nous remarquons que l'on a P^x-p.s. $X_{1/n} \notin G$, donc P^x-p.s. $A_\infty(\theta_{1/n}\omega) < \infty$, de sorte que $\{A_\infty=+\infty\}$ et $\{A_{1/n}=+\infty\}$ sont P^x-p.s. égaux. Alors $\{A_\infty=+\infty\} = \{A_{0+}=+\infty\}$ P^x-p.s., et la probabilité de ce dernier ensemble est 0 ou 1. Soit $H=\{x : A_{0+}=+\infty\ P^x\text{-p.s.}\}$; comme $H\subset G$, H est α-négligeable et α-polaire. Maintenant , de deux choses l'une

- si $x \in G\setminus H$, A_∞ est fini P^x-p.s., et le même argument de convergence uniforme que plus haut montre que $A_.$ est P^x-p.s. continue à gauche.

- Si $x \in H$, on a $A_{0+}=+\infty$ P^x-p.s., ce sont les "explosions" annoncées.

REMARQUE. Le résultat auxiliaire que nous avons utilisé (décomposition de (A_t) en les (A_t^n), de φ en les $\varphi_n \leqq 1$) est une version sans dualité des résultats suivants, connus sous les hypothèses de dualité, et pas trop faciles à établir :

- si β est une mesure qui ne charge pas les ensembles polaires, alors β est somme d'une série de mesures dont les potentiels sont bornés,
- en particulier, β est équivalente à une mesure dont le potentiel est borné.

CALCUL DE LA PARTIE PUREMENT DISCONTINUE DE (A_t)

Comment caractériser directement la partie discontinue de (A_t) ? Nous décomposons β sous la forme $\beta^c+\gamma$, où β^c ne charge pas les semi-polaires, et γ est portée par un ensemble semi-polaire C. On a le résultat suivant :

<u>la mesure qui compte les rencontres de</u> C

$$\lambda(f) = E^{\alpha}[\sum_s I_{\{X_s \in C\}}]$$

<u>est</u> σ-<u>finie</u>, γ <u>est absolument continue par rapport à</u> λ, <u>et la partie discontinue de</u> (A_t) <u>est égale à</u> $\sum_{s \leqq t} \frac{d\gamma}{d\lambda} \circ X_s$

Nous n'allons pas démontrer ce résultat, mais seulement le point curieux, que λ est σ-finie. Nous commençons, l'opérateur potentiel U étant transient, par faire un changement de temps associé à une fonction partout >0, qui le rend <u>borné</u>. L'ensemble C est resté semi-polaire, nous le représentons comme réunion d'une suite d'ensembles disjoints, <u>totalement effilés</u> pour le semi-groupe changé de temps, et il nous suffit maintenant de montrer

<u>si</u> U <u>est borné</u>, <u>si</u> C <u>est totalement effilé</u>, <u>la mesure</u> λ <u>est bornée</u>.

Par définition de l'effilement total, la fonction $E^{\cdot}[\exp(-T_C)]$ est bornée sur C par un nombre a<1. On sait qu'alors la fonction

$$E^{\cdot}[\sum_s e^{-s} I_{\{X_s \in C\}}]$$

est bornée. Il en résulte que la fonction $h=E^{\cdot}[\sum_{0 \leqq s<1} I_{\{X_s \in C\}}]$ est bornée. D'autre part, on a

$$E^{\cdot}[\sum_s I_{\{X_s \in C\}}] = h+P_1h+P_2h+\dots$$

et comme h est bornée il suffit de prouver que $1+P_1 1+P_2 1\dots$ est bornée. Or 1 est excessive, ceci est majoré par $1+\int_0^1 P_s 1 ds+ \int_1^2 P_s 1 ds+\dots$

$\leq$ U1 + 1, qui est une fonction bornée. Le résultat est établi.

2. RETOURNEMENT DU TEMPS NON HOMOGENE

Avant la découverte (par Hunt dans le cas discret, puis par Nagasawa dans le cas continu) du retournement aux temps de retour, qui transforme un processus de Markov homogène en un processus de Markov homogène, on utilisait le retournement à un temps fixe, qui préservait la propriété de Markov, mais non l'homogénéité. Le but de ce paragraphe est d'esquisser la théorie du retournement non homogène en théorie générale des processus.

Nous commençons par des remarques sur les familles croissantes de tribus indexées, <u>non par</u> $\mathbb{R}_+$, <u>mais par</u> $\mathbb{R}_-$. Soit $(H_t)_{t\leq 0}$ une telle famille, définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{H}},P)$.

On dit qu'un processus $(X_t)_{t\leq 0}$ est <u>prévisible</u> s'il appartient à la tribu sur $]-\infty,0]\times\Omega$ engendrée par les processus adaptés et continus à gauche, et que $(X_t)_{t<0}$ est optionnel s'il appartient à la tribu sur $]0,\infty[\times\Omega$ engendrée par les processus adaptés à trajectoires càdlàg sur $]0,\infty[$ (on peut imposer ou non une limite à gauche en 0, cela ne change rien). Ces définitions sont les mêmes que dans le cas usuel de $\mathbb{R}_+$, à la nuance près tenant à l'ensemble d'indices.

Un <u>temps d'arrêt</u>[1] sera aussi, comme d'habitude, une v.a. T à valeurs dans l'ensemble $[-\infty,0]$, telle que $\{T\leq t\}\in\underline{\underline{H}}_t$ pour tout t. L'intervalle stochastique $[\![T,0[\![$ de $]-\infty,0[$ a pour indicatrice un processus adapté à trajectoires càdlàg., et les ensembles de cette forme engendrent la tribu optionnelle.

Soit A une partie de $]-\infty,0[\times\Omega$; on définit le début D_A de la manière habituelle, avec la convention que $\inf\emptyset = 0$, et le début de A est un temps d'arrêt. La relation $D_A(\omega)=0$ permet d'affirmer que la coupe $A(\omega)$ est vide. Mais si l'on travaille sur des parties de $]-\infty,0]\times\Omega$, avec la même convention sur $\inf\emptyset$, la relation $D_A(\omega)=0$ signifie, soit que $A(\omega)=\emptyset$, soit que $A(\omega)=\{0\}$. Pour lever cette ambiguité, on est amené à adjoindre à $\mathbb{R}_-$ un point 0+ tel que 0+>0, et à convenir que $\inf\emptyset = 0+$, et - comme dans la théorie d'Azéma - on pose la définition suivante :

un <u>temps prévisible</u> est une v.a. T à valeurs dans $[-\infty,0]\cup\{0+\}$,

1 Ou temps optionnel.

telle que l'intervalle $[\![T,0]\!]$ soit prévisible (la coupe de cet intervalle stochastique est vide lorsque $T=0+$). On vérifie alors sans peine que la tribu prévisible est engendrée par les intervalles $[\![T,0]\!]$ où T est prévisible, et même par ceux de la forme $[\![T,0]\!]$, où il existe $r\leqq 0$, $A\in\underline{\underline{H}}_{r-}$ tels que $T=r$ sur A, $T=0+$ sur A^c.

Maintenant, on a des théorèmes de projection et de section comme dans les théories usuelles : noter simplement que, si π désigne la projection sur Ω , et A est une partie mesurable de $]-\infty,0]$ (resp. $]-\infty,0[$), on a $\pi(A)=\bigcup_n \pi(A\cap[\![-n,0]\!])$ (resp. $[\![-n,0[\![$). Nous énonçons seulement le théorème de section et de projection prévisible :

THEOREME. <u>Soit</u> A <u>une partie prévisible de</u> $]-\infty,0]\times\Omega$. <u>Il existe alors un temps prévisible</u> T (<u>que l'on peut supposer borné inférieurement</u>) <u>tel que</u>

- <u>pour tout</u> ω <u>tel que</u> $T(\omega)\neq 0+$, <u>on ait</u> $(T(\omega),\omega)\in A$
- $P\{T<0+\}\geqq P(\pi(A))-\varepsilon$

<u>Soit</u> $(X_t)_{t\leqq 0}$ <u>un processus mesurable positif ou borné</u>. <u>Il existe alors un processus prévisible</u> $(Y_t)_{t\leqq 0}$ <u>unique tel que l'on ait</u>, <u>pour tout temps prévisible</u> T (<u>ou seulement tout</u> T <u>borné inférieurement</u>)

$$E[X_T I_{\{-\infty<T<0+\}}]=E[Y_T I_{\{-\infty<T<0+\}}] .$$

Ces théorèmes ne sont pas nouveaux : compte tenu du fait qu'on peut se ramener à $[\![-n,0]\!]$, l'ensemble de temps $[-n,0]\cup\{0+\}$ est isomorphe à l'ensemble de temps $[0,1]\cup\{+\infty\}$, pour lequel le théorème est classique.

Le théorème optionnel présente une forme encore plus familière, puisque le bizarre point 0+ en est absent.

Restent enfin les projections duales. Soit μ une mesure bornée sur $]-\infty,0]\times\Omega$ qui ne charge pas les ensembles évanescents. Alors pour tout n, $I_{]\!]-n-1,-n]\!]}\cdot\mu$ est définie par un processus croissant c.à d. (A_t^n) nul pour $t=-n-1$, constant pour $t\geqq -n$[1]. Si μ commute avec la projection prévisible, (A_t^n) peut être choisi prévisible par rapport à la famille $\underline{\underline{H}}_{-n-1+t}$ - sans aucune complétion, mais non <u>identiquement</u> continu à droite : c'est une <u>somme</u> de processus croissants continus à droite, nuls en $-n-1$, prévisibles et bornés par 1, comme on l'a dit plus haut. Prolongeons par 0 tous ces processus à gauche de $-n-1$. Alors on voit que μ admet une "primitive" (A_t), prévisible, somme d'une série de processus croissants prévisibles continus à droite nuls au point $-\infty$ et bornés par 1. Pour tous les ω tels que $A_0(\omega)<\infty$ - donc pour presque tout ω - la série converge uniformément sur toute la

1. Si $n=0$, noter que A_0-A_{0-} représente la masse de la mesure en 0.

demi-droite, et on a donc aussi $A_{-\infty}(\omega)=0$ p.s.. En remplaçant $A_t(\omega)$ par $A_t(\omega)-A_{-\infty}(\omega)$ lorsque $A_{-\infty}(\omega)$ est fini, par 0 lorsque $A_{-\infty}(\omega)=+\infty$, on voit que l'on peut supposer que $A_{-\infty}(\omega)\equiv 0$.

RETOURNEMENT DU TEMPS (SANS OPERATEUR DE TRANSLATION)

Nous considérons maintenant un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, muni d'une famille décroissante $(\underline{\underline{G}}_t)_{t\geq 0}$ de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}$. Pour chaque t, $\underline{\underline{G}}_t$ représente le futur compté à partir de l'instant t. Nous adjoignons à l'ensemble des temps un élément supplémentaire noté 0−.

DEFINITIONS. a) La tribu cooptionnelle est engendrée sur $]0,\infty[\times\Omega$ par les processus $(X_t)_{t>0}$ adaptés à la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$ (i.e., tels que X_t soit $\underline{\underline{G}}_t$-mesurable pour tout t), dont les trajectoires sont continues à gauche et pourvues de limites à droite sur $]0,\infty[$.

Un temps cooptionnel est une v.a. T à valeurs dans $[0,\infty]$, tel que pour tout t on ait $\{T\geq t\}\in\underline{\underline{G}}_t$.

b) La tribu coprévisible est engendrée sur $[0,\infty[\times\Omega$ par les processus $(X_t)_{t\geq 0}$, adaptés à la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$, et dont les trajectoires sont continues à droite.

Un temps coprévisible est une v.a. T à valeurs dans $\{0-\}\cup[0,+\infty]$, telle que l'intervalle $[\![0,T]\!]$ soit coprévisible.

Cette terminologie ne présente aucun danger lorsque Ω n'est pas muni d'un opérateur de translation, puisqu'alors les notions nouvelles de processus cooptionnel ou coprévisible n'existent pas. Si Ω est muni d'un opérateur de translation (θ_t), on peut poser $\underline{\underline{G}}_t=\theta_t^{-1}(\underline{\underline{G}})$, et alors tout processus cooptionnel (coprévisible) au sens d'Azéma est cooptionnel (coprévisible) par rapport à la famille $(\underline{\underline{G}}_{t-})$ $((\underline{\underline{G}}_t))$, mais non inversement. Il faudra donc distinguer soigneusement les deux notions, par exemple en parlant d'ensembles cooptionnels ou coprévisibles non homogènes, pour ceux dont il est question ici.

Maintenant, nous avons une remarque bien triviale : posons pour $t<0$ $\underline{\underline{H}}_t=\underline{\underline{G}}_{-t}$. Alors un processus (X_t) est cooptionnel (coprévisible) par rapport à la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$ si et seulement si le processus (X_{-t}) est optionnel (prévisible) par rapport à la famille $(\underline{\underline{H}}_t)$. De même, T est un temps cooptionnel (coprévisible) si et seulement si −T est optionnel (prévisible) par rapport à $(\underline{\underline{H}}_t)$, en convenant que $-(0-)=0+$. Il en résulte aussitôt que l'on a un théorème de section et de projection cooptionnel (coprévisible), sans démonstration nouvelle.

<u>Passons aux projections duales</u>. Soit μ une mesure positive bornée sur $[0,\infty[\times\Omega$, qui ne charge pas les ensembles évanescents. Il existe un processus croissant (A_t) continu à gauche, tel que $A_0=0$, unique, tel que l'on ait

$$\mu(Z) = E[\int_{[0,\infty[} Z_s dA_s] \text{ pour tout processus mesurable } Z\geqq 0 .$$

- on pourrait utiliser aussi le processus croissant droit, avec la convention que $A_{0-}=0$, mais ce n'est pas intéressant ici . A quelle condition sur (A_t) μ commute t'elle avec la projection coprévisible ?

Définissons une mesure $\hat{\mu}$ sur $]-\infty,0]\times\Omega$ en posant, pour tout processus mesurable positif $(Y_t)_{t<0}$

$$\hat{Y}_t=Y_{-t} \quad (t\geqq 0) \text{ et } \quad \hat{\mu}(Y) = \mu(\hat{Y})$$

Alors $\hat{\mu}$ doit commuter avec la projection prévisible de la famille $(\underline{\underline{H}}_t)$. Mais on a

$$\hat{\mu}(Y) = E[\int_{]-\infty,0]} Y_s dB_s]$$

où $B_t=(A_\infty-A_{-t})I_{\{A_\infty<\infty\}}$ est un processus croissant continu à droite, nul pour $t\to-\infty$, pouvant présenter un saut en 0. Dire que $\hat{\mu}$ commute avec la projection prévisible revient à dire que (B_t) est P-indistinguable d'un processus prévisible, donc

> μ est coprévisible si et seulement si le processus croissant gauche associé (A_t) est tel que $(A_\infty-A_t)$ soit un processus P-indistinguable de coprévisible.

On peut alors bien choisir (A_t) de la manière suivante : choisissons (B_t) de la forme $\sum B_t^{cn} + \sum B_t^{dn}$, où

B_t^{cn} est un processus croissant continu, adapté à $(\underline{\underline{H}}_t)$, tel que $B_{-\infty}^{cn}=0$, $B_0^{cn} \leqq 1$,

$B_t^{dn} = \lambda_n I_{\{t\geqq\hat{L}_n\}}$, où λ_n est une constante positive, et les $\hat{L}_n$ sont des temps prévisibles à valeurs dans $]-\infty,0]\cup\{0+\}$, finis, et dont les graphes sont disjoints.

Posons alors $A_t^{cn} = B_\infty^{cn} - B_{-t}^{cn}$, $A_t^c = \sum_n A_t^{cn}$, $L_n=-\hat{L}_n$; nous pouvons choisir comme version de (A_t) :

$$A_t = A_t^c + \sum_n \lambda_n I_{\{0\leqq t\leqq L_n\}}$$

On a des considérations tout analogues pour le cas cooptionnel : on définit alors μ par le processus croissant gauche associé (A_t), tel que $A_{0+}=0$ puisque μ est une mesure sur $]0,\infty[\times\Omega$.

Mais il y a encore quelque chose d'intéressant à dire : à quelle condition la mesure μ sur $]0,\infty[\times\Omega$ est elle cooptionnelle par rapport à la famille $(\underline{\underline{G}}_{t-})$ ("cooptionnelle au sens large") ? Cette fois-ci, définissons μ par son processus croissant droit (A_t) tel que $A_0=0$, de sorte que la mesure $\hat{\mu}$ est associée au processus croissant gauche $B_t=A_\infty-A_{-t}$, le processus croissant droit correspondant étant naturellement (B_{t+}). Il s'agit d'écrire que (B_{t+}) est adapté à la famille $(\underline{\underline{H}}_{t+})$, et cela revient à écrire que (B_t) est prévisible par rapport à la famille $(\underline{\underline{H}}_t)$, ou encore que $(A_\infty-A_t)$ est coprévisible par rapport à la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$.

> μ est cooptionnelle au sens large si et seulement si le processus croissant droit associé (A_t) est tel que $(A_\infty-A_t)$ soit un processus P-indistinguable de coprévisible par rapport à $(\underline{\underline{G}}_t)$

Cela explique le rôle joué par les fonctionnelles droites brutes en théorie des processus de Markov : elles définissent des mesures aléatoires cooptionnelles au sens large.

PROCESSUS CANONIQUES

Soit Ω l'ensemble des applications continues à droite (ou càdlàg.) à durée de vie de $\mathbb{R}_+$ dans E métrisable séparable ; notons X_t la coordonnée d'indice t, et posons

$$\underline{\underline{F}}^o_{st} = \underline{\underline{T}}(X_r,\ s<r\leq t)\ (=\underline{\underline{T}}(X_r,\ r\leq s\leq t)\text{ par continuité à droite })$$

$$\underline{\underline{F}}^o_t=\underline{\underline{F}}^o_{0t}\ ,\quad \underline{\underline{G}}^o_t=\underline{\underline{F}}^o_{t\infty}\ ,\quad \underline{\underline{F}}^o=\underline{\underline{F}}^o_{0\infty}=\underline{\underline{G}}^o_0$$

Ω admet des opérateurs de meurtre k_t, de translation θ_t, de raccordement ./\./. , et on a $\underline{\underline{G}}^o_t=\theta_t^{-1}(\underline{\underline{F}}^o)$.

La tribu coprévisible admet une caractérisation simple dans ce cas : c'est la tribu engendrée sur $[0,\infty[\times\Omega$ par les applications $(t,\omega)\mapsto t$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $(t,\omega)\mapsto\theta_t\omega$ à valeurs dans $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$. Vérifions cela :

1) Le processus $(t,\omega)\mapsto t$ est continu et adapté à $(\underline{\underline{G}}^o_t)$. Pour toute fonction φ sur Ω de la forme $f_1\circ X_{t_1}\dots f_n\circ X_{t_n}$, où $f_1,\dots,f_n$ sont continues et bornées sur E, le processus $(\varphi\circ\theta_t)$ est adapté à la famille $(\underline{\underline{G}}^o_t)$ et continu à droite, donc coprévisible. La tribu engendrée par les deux applications est donc contenue dans la tribu coprévisible. Ou encore, l'application $(t,\omega)\mapsto(t,\theta_t\omega)$ de $[0,\infty[\times\Omega$ muni de la tribu coprévisible $\hat{\underline{\underline{P}}}$, dans $[0,\infty[\times\Omega$ muni de $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^o$, est mesurable.

2) Pour tout ω et tout t, notons ω^t l'élément de Ω défini par

$$X_s(\omega^t)=X_0(\omega)\text{ si }s<t\ ,\quad X_s(\omega^t)=X_{s-t}(\omega)\text{ si }s\geq t$$

On vérifie aussitôt que $(t,\omega)\mapsto\omega^t$ est mesurable de $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^o$ dans $\underline{\underline{F}}^o$.

Soit alors Z un processus coprévisible (donc mesurable). Posons

$$H(t,\omega) = Z_t(\omega^t)$$

C'est encore un processus mesurable. D'autre part, Z_t est $\underline{\underline{G}}_t^o$-mesurable, donc il existe J $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable telle que $Z_t(\omega) = J(\Theta_t\omega)$ pour tout ω. Remplaçant ω par ω^t, comme $\Theta_t\omega^t=\omega$ il vient $J(\omega)=Z_t(\omega^t)=H(t,\omega)$, et la relation $Z_t=J\circ\Theta_t$ s'écrit alors

$$Z_t(\omega) = H(t,\Theta_t\omega)$$

le processus (Z_t) est donc mesurable par rapport à la tribu engendrée par $(t,\omega)\longmapsto(t,\Theta_t\omega)$, ce que l'on voulait prouver.

On voit donc bien la relation avec la tribu coprévisible au sens d' AZEMA : celle ci est engendrée par $(t,\omega)\longmapsto\Theta_t\omega$ seulement. La tribu coprévisible non homogène est donc engendrée par la tribu coprévisible homogène, et les processus déterministes.

Il semble qu'il n'y ait pas de difficultés à démontrer les théorèmes de commutation d'AZEMA pour les projections dont il est question ici, et pour des processus de Markov <u>non homogènes</u>.