Paul-André Meyer

# Sur la démonstration de prévisibilité de Chung et Walsh

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 9 (1975), p. 530-533
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__530_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1974/75

# SUR LA DEMONSTRATION DE PREVISIBILITE DE CHUNG ET WALSH

par P.A. MEYER

Dans leur article [1], CHUNG et WALSH donnent une démonstration très améliorée du fait que, pour un processus de HUNT $(X_t)$, tout temps d'arrêt T tel que $X_T=X_{T-}$ p.s. est prévisible. L'étape cruciale de la démonstration consiste à prouver que toutes les martingales sont continues à l'instant T, ou, plus généralement, continues en tous les points de continuité du processus. Nous allons donner ici une autre démonstration de ce fait, inspirée par la leur, mais reposant sur la formule magique de DAWSON qui donne une construction explicite de toutes les martingales à la fois. Au lieu de travailler sur un processus de HUNT, nous considérerons un processus de RAY, car la présence de points de branchement donne du piquant à la situation.

NOTATIONS. E est un espace métrique compact, $\partial \in E$ est le cimetière, $(U_p)$ est une résolvante de RAY sur E telle que $pU_p 1=1$, $\varepsilon_\partial U_p = \varepsilon_\partial/p$ ( caractère absorbant du point $\partial$) ; $(P_t)$ est le semi-groupe de RAY ( continu à droite ) associé à $(U_p)$. $\Omega$ est l'ensemble de toutes les applications $\omega$ de $[0,\infty[$ dans E qui 1) sont continues à droite avec limites à gauche sur $]0,\infty[$, 2) admettent une limite à droite en 0, 3) admettent une durée de vie $\zeta(\omega)\leq+\infty$. Comme d'habitude, on note $X_t(\omega)$ la valeur $\omega(t)$ pour $t>0$, $X_{t-}(\omega)$ la limite à gauche, mais contrairement à l'habitude nous noterons $X_0(\omega)$ la limite à droite $\omega(0+)$, et $X_{0-}(\omega)$ la valeur $\omega(0)$. Il ne faut pas prendre cela à la légère, car c'est la principale contribution de cet article !

Nous désignons par $\underline{\underline{F}}^\circ_t$ , $\underline{\underline{F}}^\circ$ les tribus non complétées usuelles[1]. Pour toute loi $\mu$ sur E, il existe une ( unique ) loi $P^\mu$ sur $\Omega$ pour

1. $\underline{\underline{F}}^\circ_0 = \underline{\underline{T}}(X_{0-},X_0)$.

laquelle les variables aléatoires $X_{0-}$, $X_t$ $(t>0)$ forment un processus de Markov admettant $(P_t)$ comme semi-groupe de transition, et la loi de $X_{0-}$ est $\mu$. On a $X_{0-}=X_0$ $P^{\mu}$-p.s. si et seulement si $\mu$ ne charge pas l'ensemble B des points de branchement. L'opérateur de translation $\Theta_t$ est défini par

(1) $$X_s(\Theta_t\omega) = X_{s+t}(\omega) \quad , \; X_{0-}(\Theta_t\omega)=X_t(\omega)$$

de sorte que $\Theta_0$ n'est pas l'identité, mais applique $\Omega$ sur l'ensemble des trajectoires continues à droite en 0. Si c est $\underline{\underline{F}}^{\circ}$-mesurable bornée sur $\Omega$, on a

(2) $$E^{\mu}[c\circ\Theta_0] = E^{\mu P_0}[c] \; .$$

Le résultat suivant est une variante d'un lemme bien connu de DYNKIN. Ici $k_t$ désigne l'opérateur de meurtre ( on convient que $X_{0-}(k_t\omega)=X_{0-}(\omega)$ pour tout t ).

LEMME 1. <u>Soit</u> $g(\omega,t,\omega')$ <u>une fonction bornée sur</u> $\Omega\times\mathbb{R}_+\times\Omega$, <u>mesurable par rapport à</u> $\underline{\underline{F}}^{\circ}\times\underline{\underline{B}}\times\underline{\underline{F}}^{\circ}$. <u>Soit</u> $G(\omega,t,x)=E^x[g(\omega,t,\Theta_0 .)]$. <u>Alors pour tout temps d'arrêt</u> T <u>de la famille complétée</u> $(\underline{\underline{F}}_t^{\mu})$ <u>on a</u>

(3) $$E^{\mu}[g(k_T\omega,T,\Theta_T\omega)\,|\,\underline{\underline{F}}_T^{\mu}] = G(k_T\omega,T(\omega),X_T(\omega)) \quad \underline{\text{p.s.}}$$

( les deux côtés sont nuls par convention sur $\{T=\infty\}$ )

DEMONSTRATION. D'après le théorème des classes monotones, il suffit de traiter le cas où $g(\omega,t,\omega')=a(\omega)b(t)c(\omega')$. Soit $c'=c\circ\Theta_0$ , qui ne dépend plus de $X_{0-}$ . Le lemme se réduit à l'égalité $E^{\mu}[c\circ\Theta_T|\underline{\underline{F}}_T^{\mu}] = E^{X_T}[c\circ\Theta_0]$, ou encore à $E^{\mu}[c'\circ\Theta_T|\underline{\underline{F}}_T^{\mu}]=E^{X_T}[c']$, ce qui est juste la propriété de Markov forte ordinaire du processus ( continu à droite ) $(X_t)_{t\geqq 0}$ .

Soient $\omega,\omega' \in \Omega$, $t\in\mathbb{R}_+$ . Nous définissons $\omega/t/\omega' \in \Omega$ par la formule

(4) $$\text{si } t\leqq\zeta(\omega) \;,\; X_s(\omega/t/\omega') = X_s(\omega) \text{ pour } s<t \text{ ( y compris } s=0-) \\ = X_{s-t}(\omega') \text{ pour } s\geqq t$$

$$\text{si } t>\zeta(\omega),\; \omega/t/\omega' = \omega$$

Nous avons maintenant la règle de DAWSON. Etant donnée une fonction $\underline{\underline{F}}^{o}$-mesurable bornée $\gamma$ sur $\Omega$, nous voulons calculer la martingale $E^{\mu}[\gamma|\underline{\underline{F}}_t^{\mu}]$, et à cet effet nous posons successivement

$$(4) \qquad g(\omega,t,\omega') = \gamma(\omega/t/\omega')$$

$$(5) \qquad G(\omega,t,x) = E^{x}[g(\omega,t,\Theta_0.)]$$

$$(6) \qquad \Gamma_t^{+}(\omega) = G(k_t\omega,t,X_t(\omega))$$

LEMME 2. Pour toute loi $\mu$, le processus $(\Gamma_t^{+})$ est une version, $P^{\mu}$-p.s. continue à droite, de la martingale $E^{\mu}[\gamma|\underline{\underline{F}}_t^{\mu}]$.

DEMONSTRATION. Comme $(P_t)$ est un semi-groupe borélien et $\gamma$ est $\underline{\underline{F}}^{o}$-mesurable, il est très facile de vérifier que $(\Gamma_t^{+})$ est un processus bien-mesurable. D'autre part, on a identiquement $\omega=k_t\omega/t/\Theta_t\omega$ pour tout t, et le lemme 1 entraîne alors que $E^{\mu}[\gamma|\underline{\underline{F}}_T^{\mu}]=\Gamma_T^{+}$ pour tout T. La famille $(\underline{\underline{F}}_t^{\mu})$ satisfaisant aux conditions habituelles, il existe une seule version bien-mesurable de la martingale satisfaisant au théorème d'arrêt, c'est la version continue à droite.

Tout ce qui précède est, en fait, bien connu. Maintenant commencent les remarques nouvelles, mais presque triviales. Désignons par $\underline{\underline{F}}_{0-}^{\mu}$ la tribu engendrée par $X_{0-}$ et les ensembles $P^{\mu}$-négligeables

LEMME 3. Avec les notations du lemme 1, supposons que T soit prévisible. Alors

$$(7) \qquad E^{\mu}[g(k_T\omega,T(\omega),\Theta_T\omega) \mid \underline{\underline{F}}_{T-}^{\mu}] = G(k_T\omega,\ T(\omega),\ X_{T-}(\omega)) \text{ p.s. }.$$

DEMONSTRATION . On utilise le théorème des classes monotones comme pour le lemme 1, et la formule se réduit alors à

$$(8) \qquad E^{\mu}[c\circ\Theta_T \mid \underline{\underline{F}}_{T-}^{\mu}] = E^{X_{T-}}[c\circ\Theta_0]$$

Ceci ne fait qu'exprimer la propriété de Markov "modérée" du processus $(X_{t-})$, mise en évidence par WALSH dans le cas des processus de RAY. Mais c'est aussi très facile à démontrer directement. Posons $C(x) =$

$E^x[c\circ\Theta_0]$ ; d'après la propriété de Markov forte usuelle, le côté gauche de (8) vaut $E^\mu[C\circ X_T|\underline{\underline{F}}^\mu_{T-}]$. Le côté droit vaut $P_0(X_{T-},C)$, et sous cette forme, l'égalité est connue ( voir [3], théorème 4, mais on pourrait souligner que ce résultat vient de [2], théorème 7.1 , ce qui n'a pas été dit bien clairement dans [3] ).

On obtient alors la forme prévisible de la règle de DAWSON. Pour la comparer au lemme 2, il est bon de remarquer que la martingale $E[\gamma|\underline{\underline{F}}^\mu_t]$ ( version continue à droite ) est la projection bien-mesurable du processus constant égal à $\gamma$.

LEMME 4. <u>Avec les notations du lemme</u> 2, <u>la projection prévisible du processus constant égal à</u> $\gamma$ <u>est le processus</u> .

(9) $$\Gamma^-_t(\omega) = G(k_t\omega,t,X_{t-}(\omega))$$

DEMONSTRATION. Découle du lemme 3 comme le lemme 2 du lemme 1.

Seulement, la projection prévisible de la martingale continue à droite $(\Gamma^+_t)$ est aussi - c'est un résultat classique - indistinguable du processus $(\Gamma^+_{t-})$ de ses limites à gauche. Donc les processus $(\Gamma^+_{t-})$ et $(\Gamma^-_t)$ sont indistinguables.

Et maintenant, regardons les côtés droits de (6) et de (9) : là où $X_t(\omega)=X_{t-}(\omega)$, i.e. en tout instant de continuité de la trajectoire, on a $\Gamma^+_t=\Gamma^-_t$ , donc $\Gamma^+_t=\Gamma^+_{t-}$ , et l'on voit bien que les martingales sont continues ( à indistinguabilité près ) aux points de continuité des trajectoires.

BIBLIOGRAPHIE

[1]. CHUNG (K.L.) et WALSH (J.B.). Meyer's theorem on predictability. Z.f.W-theorie, 29, 1974, 253-256.

[2]. DOOB (J.L.). Compactification of the discrete state space of a Markov chain. Z.f.W-theorie, 10, 1966, p.236-251.

[3]. MEYER (P.A.) et WALSH (J.B.). Quelques applications des résolvantes de Ray. Invent. Math. 14, 1971, p.143-166.