BERNARD MAISONNEUVE
PAUL-ANDRÉ MEYER

Ensembles aléatoires markoviens homogènes. Mise au point et compléments

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 518-521
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__518_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1973/74

ENSEMBLES ALEATOIRES MARKOVIENS HOMOGENES. MISE AU POINT ET COMPLEMENTS

par B.MAISONNEUVE et P.A.MEYER

Nous avons publié dans le volume VIII du Séminaire un ensemble de cinq exposés contenant : une version des "last exit decompositions" de GETOOR-SHARPE ; une forme un peu plus précise (mais plus compliquée) des "systèmes régénératifs" de MAISONNEUVE ; enfin, des applications diverses. Notre intention était de présenter une première vue d'ensemble d'un sujet important , qui venait tout juste de"cristalliser" . Une année est passée depuis lors , et nous avons découvert dans notre texte des imperfections graves : des erreurs d'abord, qui ont causé bien des tracas à un groupe de Stanford University, composé en particulier de Miss JACOBS, de MM.BALKEMA et HOROWITZ, à qui nous adressons nos excuses et nos remerciements - en particulier à J.HOROWITZ pour la liste de corrections qu'il nous a aimablement communiquée. Ces fautes, qui nous ont valu les vifs reproches de K.L.CHUNG, sont rectifiées dans une première partie, intitulée Erratum.

Mais l'imperfection la plus grave de notre texte était certainement sa complication, justifiée à nos yeux par la nécessité de prouver que les processus d'incursion sont de vrais processus droits, auxquels s'applique la théorie des systèmes de LEVY. Or GETOOR (dans un remarquable ensemble de notes) a bien débarrassé la théorie des processus droits de ses aspects pénibles, et d'autre part la seconde partie de cet exposé, intitulée le comportement de dernière sortie (et qui résume deux articles de MAISONNEUVE) remplace les systèmes de LEVY par une méthode directe plus simple.

Si nous récrivions notre texte maintenant, il serait donc beaucoup plus lisible - mais le courage nous manque, et nous ne somme d'ailleurs pas certains que cela en vaudrait la peine.

ERRATUM

Les numéros de page renvoient au volume VIII du séminaire.

P.213, ligne 1.

Lois sur Ω, non sur E.

P.213, ligne 20 et suivantes.

La condition 2) est insuffisante. Plus exactement, la phrase "D est un temps d'arrêt algébrique" ne s'énonce pas comme il est dit, mais sous la forme

$\forall\omega\ \forall\omega'\ \forall t\quad (t>D(\omega),\ k_t\omega=k_t\omega') \Rightarrow (D(k_t\omega)=D(k_t\omega'))$

qui signifie que si ω et ω' coïncident sur $[0,t[$, $M(\omega)\cap]0,t[$ et $M(\omega')\cap]0,t[$ ont le même début. En appliquant cela à $\theta_r\omega$ et $\theta_r\omega'$ $(r<t)$, on voit que $M(\omega)\cap]0,t[\ =\ M(\omega')\cap]0,t[$.

Comme dans ces exposés l'accent est mis sur l'ensemble aléatoire homogène M plutôt que sur le temps d'arrêt D, il serait plus naturel de prendre cette dernière propriété comme axiome.

La condition 1) ($D\geqq\zeta \Rightarrow D=+\infty$) signifie que M est l'adhérence (dans $]0,\infty[$) de $M\cap]0,\zeta[$; comme on s'intéresse uniquement à ce qui se passe avant ζ, il s'agit en fait d'une convention, et on aurait sans doute tout aussi bien pu prendre la convention opposée 1') $D\leqq\zeta$.

La forme trop faible de 2) indiquée dans le texte ne permet pas non plus de démontrer, p.216 ligne 13, que Ω_i est <u>stable par meurtre</u>.

<u>P.213, note (1).</u>

Cette condition doit être renforcée ainsi : pour toute loi μ, $E^\mu[\varphi|X_0]=E^{X_0}[\varphi]$ P^μ-p.s.. Il suffit de vérifier cela lorsque μ est une masse unité ε_x, et c'est évident lorsque x n'est pas un point de branchement, i.e. lorsque $P^x\{X_0=x\}=1$. Soit B le noyau $B(x,f)=E^x[f\circ X_0]$ sur E ; on a $E^\mu[f\circ X_0 g\circ X_0]=E^\mu[f\circ X_0 Bg\circ X_0]$, donc (classes monotones) pour toute f borélienne bornée sur $E\times E$ $E^\mu[f(X_0,X_0)]=\int\mu B(dx)B(x,dy)f(x,y)$. Prenant pour f l'indicatrice du complémentaire de la diagonale, on voit que pour μB-presque tout x, $B(x,dy)=\varepsilon_x(dy)$, i.e. x est un point de non-branchement. Ainsi, la propriété ci-dessus équivaut à

1) $P^\mu = P^{\mu B}$ 2) pour tout x, $B(x,.)$ est portée par les points de non branchement.

<u>P.216, formule (3.9) et p.218, formule (3.12).</u>

Il y a incompatibilité entre ces deux formules. Si l'on définit comme (3.9)

$$\overline{E}=\{(r,x,w)\ :\ D(\omega)=+\infty,\ r=\zeta(\omega)\ \text{ou}\ r=+\infty\}$$

et comme (3.12)

$$\overline{X}_0(r,\omega) = \begin{cases}(r,X_r(\omega),\ k_r(\omega)) & \text{si } r>0\\ (D(\omega),X_D(\omega),k_D(\omega)) & \text{si } r=0\end{cases}$$

- le texte porte R au lieu de D dans cette dernière expression, ainsi que dans (3.11) : c'est un lapsus pour $R_0 = D$ - alors on n'a pas $\overline{X}_0(r,\omega)\in\overline{E}$ si $r>0$, $D(\omega)=+\infty$, et $r>\zeta(\omega)$: en effet, $\overline{X}_0(r,\omega)$ vaut alors (r,∂,ω), et on n'a ni $r=\zeta(\omega)$, ni $r=+\infty$.

Après plusieurs tentatives, il nous semble que la bonne solution de cette difficulté consiste en une modification de $\overline{E}$

(3.9 corrigé) : $\overline{\underline{E}}=\{(r,x,\omega)\ :\ x\in E,\ D(\omega)=+\infty\ ,\ r=\zeta(\omega)<\infty\}$

$$\cup\{(r,\partial,\omega)\ :\ D(\omega)=+\infty\ ,\ r\geqq\zeta(\omega)\ \}$$

Cette modification simplifiera aussi la discussion des points de branchement. Vérifions qu'elle est compatible avec (3.12). Si $(r,\omega)\in\overline{\Omega}$ nous avons $r\leqq D(\omega)$. <u>Supposons d'abord $r>0$</u> . Si $r<\zeta(\omega)$ nous avons $\zeta(k_r\omega)=r<\infty$, $D(k_r\omega)=+\infty$ - en effet, $D(k_r\omega)$ ne saurait être $<r$, car cela entraînerait $D(\omega)=D(k_r\omega)<r$, contrairement à $r\leqq D(\omega)$; donc $D(k_r\omega)\geqq r=\zeta(k_r\omega)$, donc $D(k_r\omega)=+\infty$ - et alors $\overline{X}_0(r,\omega)=(r,X_r(\omega),k_r(\omega))$ est un point de $\overline{E}$ du premier type. <u>Ensuite si $r=0$</u>, $\overline{X}_0(r,\omega)=(D(\omega),X_D(\omega),k_D\omega)$; si $D(\omega)=+\infty$, cela vaut (∞,∂,ω), point de $\overline{E}$ du second type. Si $D(\omega)<\infty$, alors $D(\omega)<\zeta(\omega)$, $D(\omega)=\zeta(k_D\omega)$, et nous avons un point de $\overline{E}$ du premier type.

On retrouve cette discussion <u>p.219, ligne 9</u>, où il s'agit de vérifier que si $(r,x,w)\in\overline{E}$, alors pour tout ω on a $(r,w/r/\omega)\in\overline{\Omega}$. Si (r,x,w) est du second type, on a $w/r/\omega=w$, et comme $D(w)=+\infty$ on a bien $(r,w)\in\overline{\Omega}$. Si (r,x,w) est du premier type, la vérification que $r\leqq D(w/r/\omega)$ résulte de ce que D est un "temps d'arrêt algébrique" (voir plus haut).

On la retrouve encore <u>p.223, ligne 3, etc</u> dans la discussion des points de branchement. Soit donc $(r,x,w)\in\overline{E}$. Il n'y a rien à changer dans la discussion des points de branchement du premier type :

(r,x,w) : $x\neq\partial$, $r<\infty$ et soit x est un point de branchement pour (X_t)

soit $r=0$, $w=[\partial]$ et $P^x\{R=0\}<1$.

D'autre part, aucun point $(r,\partial,w)\in\overline{E}$ de second type n'est un point de branchement : en effet la mesure correspondante sur $\overline{\Omega}$ est l'image de P^∂ par $\omega\mapsto(r,w/r/\omega)=(r,w)$, c'est donc $\varepsilon_{r,w}$ et on a $\overline{X}_0(r,w)=(r,X_r(w),k_rw)=(r,\partial,w)$. La modification de $\overline{E}$ a donc fait disparaître une classe de points de branchement inutiles.

Enfin, au <u>bas de la page 225</u>, la vérification du fait que $\overline{E}$ est un complémentaire d'analytique doit être légèrement modifiée.

<u>P.220, ligne 9 (formule (3.19))</u>.

Pour tout $r>t$, $\varphi(r,.)$ est $\underline{\underline{F}}^o_r$-mesurable (au lieu de $\underline{\underline{F}}^o_{r+}$: cela n'empêche pas la famille d'être continue à droite, ni $\overline{X}_t$ d'être $\overline{\underline{\underline{F}}}^\times_t$- mesurable).

P.221, ligne 5, démonstration du théorème principal.

Modifier d'abord la ligne 5 : on laisse au lecteur le cas trivial où $x=\partial$, et on suppose que $x\neq\partial$, de sorte que $D(w)=+\infty$, $r=\zeta(w)<\infty$.

L'erreur se trouve deux lignes après (3.22) : l'ensemble $\{S(r,.)<t\}$ n'est pas $\underline{\underline{F}}^o_{t+}$-mesurable comme il est dit. Nous allons rectifier cela en supposant que x n'est pas un point de branchement (si x en était un , on se ramènerait au cas précédant par un conditionnement, grâce à la rectification de la note (1), p.213).

Nous démontrons (3.21) sans passer par (3.22). Pour tout $t<r$, l'ensemble $\{S<t\}$ est $\underline{\underline{F}}^x_t$-mesurable, donc l'ensemble $\{S(r,.)<t\}$ est $\underline{\underline{F}}^o_r$-mesurable (rectification précédente), et il en est de même de $\{S(r,.)<r\}$. De même la v.a. $S(r,.)I_{\{S(r,.)<r\}}$ est $\underline{\underline{F}}^o_r$-mesurable. Comme $P^{r,x,w}$ est l'image de P^x par $\omega\mapsto(r,w/r/\omega)$ et que $P^x\{X_0=x\}=1$, on a pour presque tout ω $X_t(\omega)=X_t(w)$ pour tout $t<r$, $X_r(\omega)=x$, et la tribu $\underline{\underline{F}}^o_r$ est dégénérée. Si $\{S(r,.)<r\}$ a une probabilité nulle (3.21) se réduit à 0=0 ; si la probabilité est 1, $S(r,.)$ est p.s. égale à une constante $r'<r$, et la vérification se poursuit normalement à partir de la ligne 14.

On retrouve des corrections ligne 14 du bas : supprimer "il est bon de rappeler..." . Ensuite, on a vu plus haut que $\{S(r,.)<r\}$ a une probabilité 0 ou 1. Si c'est 1, (3.20) se réduit à 0=0. Supposons que ce soit 0 ; alors $S(r,w/r/\omega)\geq r$ pour presque tout ω. Au lieu de définir U comme dans le texte, on prend

(3.25) $\quad U(\omega) = (S(r,w/r/\omega)-r)^+$

et la vérification se poursuit comme dans le volume VIII.

P.227 (première de l'exposé IV).

Il faut modifier en fonction des changements précédents les toutes premières lignes de l'exposé : la définition de $\overline{E}$, et il ne reste plus que l'ensemble $\overline{B}_2$ de points de branchement.

P.241 ligne 7.

Il n'est pas exact que l'on ait $\hat{D}(r,\omega)=D(\omega)$. Mais on a beaucoup plus simple. Il s'agit d'interpréter $\varphi_p(x)=\frac{1}{p}E^\cdot[e^{-pD}]$ comme $\hat{\varphi}_p(0,x)$, où $\hat{\varphi}_p$ est une fonction p-excessive du processus $(R_t,X_{D_t})=\hat{X}_t$. Or introduisons le temps terminal

$$\delta(r,\omega) = \inf\{\, t : \hat{X}^1_{t-}(\omega)=0 \,\} = \begin{cases} D(\omega) & \text{si } r=0 \\ r & \text{si } r>0 \end{cases}$$

Alors $\hat{\varphi}_p=\hat{E}^\cdot[\frac{1}{p}e^{-p\delta}]$ est p-excessive, et vaut $\varphi_p(x)I_{\{r=0\}}+\frac{1}{p}e^{-pr}I_{\{r>0\}}$.