SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Une remarque sur la construction de noyaux

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 464-465

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__464_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1973/74

UNE REMARQUE SUR LA CONSTRUCTION DE NOYAUX

par P.A.Meyer

Nous présentons ici une réponse - insuffisante - à une question posée par GETOOR à la fin de la section 4 de son exposé "on the construction of kernels" dans ce volume.

Voici nos notations : E et F sont deux espaces compacts métrisables ; H est un noyau sous-markovien de E dans F, borélien ; γ est une capacité de CHOQUET sur E (descendant sur les compacts); A est une partie analytique de F, "intérieurement négligeable" au sens suivant

(1) pour tout compact $M \subset A$, la fonction $H(I_M)$ est γ-négligeable

Nous allons montrer qu'alors

PROPOSITION. L'ensemble $J=\{x \in E : H(x,A)>0\}$ est analytique γ-négligeable.

Voici comment ce résultat permet de répondre à la question de GETOOR. Tout d'abord, J est contenu dans un borélien B, γ-négligeable. En effet, la fonction d'ensemble

$$\overline{\gamma}(U) = \inf \gamma(V) \quad V \text{ borélien contenant } U$$

est une capacité de CHOQUET, coïncidant avec γ sur les boréliens. J est analytique, intérieurement $\overline{\gamma}$-négligeable, donc $\overline{\gamma}(J)=0$, et il existe bien un tel borélien B. Si l'on remplace la mesure $H(x,dy)$ par 0 sur B, on obtient un nouveau noyau borélien, qui ne diffère de H que sur un ensemble γ-négligeable, et dont les mesures sont portées par le complémentaire d'analytique $\Omega=F\setminus A$. Seulement, la classe d'ensembles négligeables considérée est très spéciale.

DEMONSTRATION. Nous noterons S l'ensemble des mesures de masse ≤ 1 sur F, compact métrisable pour la topologie étroite, et nous considérerons H comme une application de E dans S. Nous noterons π la projection de $E \times S$ sur E . Le graphe de H dans $E \times S$ - que nous noterons encore H pour éviter la multiplication de lettres inutiles - est alors borélien dans $E \times S$.

1) Montrons que J est analytique. Soit $\underline{\underline{P}}(A)$ l'ensemble des lois de probabilités sur F portées par A ; J est l'image directe de $\underline{\underline{P}}(A) \times \{(s,t) : s>0, t\geq 0, s+t\leq 1\} \times S$ par l'application $(\lambda,s,t,\mu) \mapsto s\lambda+t\mu$, et il est classique que $\underline{\underline{P}}(A)$ est analytique (Bourbaki, Intégr. chap. IX , §5, cor.2 de la prop.10). D'où l'analyticité.

2) Supposons que J ne soit pas γ-négligeable. Alors l'ensemble analytique $(J\times S)\cap H$ n'est pas négligeable pour la capacité sur $E\times S$

$$\Gamma(U) = \gamma(\pi(U))$$

Donc $(J\times S)\cap H$ contient un compact L non Γ-négligeable (th. de CHOQUET). Le compact $K=\pi(L)$ n'est pas γ-négligeable, et le graphe de $H|_K$ est L, qui est compact : donc l'application H est continue sur K .

3) Posons alors, cette fois pour $U\subset F$

$$\Theta(U) = \int_0^1 \gamma(K\cap\{x : H^*(x,U)>a\})da = \int_0^1 \gamma(K\cap\{\ldots\geqq a\})da$$

où $H^*(x,U)$ est la mesure extérieure de U pour $H(x,.)$. Du fait que H est continue sur K, on déduit sans peine que Θ est une capacité de CHOQUET . Si l'on prend U=A, on a

$$0<\gamma(K) = \lim_{a\to 0} \gamma(K\cap\{x : H(x,A)>a\}$$

donc $\Theta(A)>0$. D'après le théorème de CHOQUET, il existe donc un compact $M\subset A$ tel que $\Theta(M)>0$, et cela contredit l'hypothèse (1).

REMARQUE. Le théorème ne s'applique pas à une classe d'ensembles négligeables telle que celle des ensembles semi-polaires - qui ne sont en général pas les ensembles négligeables pour une capacité descendant sur les compacts. Mai il y a plus : la compacité de E est effectivement utilisée dans la démonstration, les ensembles "analytiques" qui y figurent devant être $\underline{\underline{K}}$-analytiques pour satisfaire aux hypothèses du théorème de CHOQUET. On peut affaiblir l'hypothèse de compacité de E en supposant un peu plus sur γ : la continuité à droite. Alors les ensembles sousliniens sont capacitables, et E peut être supposé souslinien. Mais l'énoncé obtenu, relatif à la construction d'un noyau entre E souslinien et $\Omega=F\setminus A$ cosouslinien, n'est pas satisfaisant. Il est clair que le bon théorème est encore à découvrir.