Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Christophe Stricker

Une caractérisation des quasimartingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 420-424
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__420_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1973/74

UNE CARACTERISATION DES QUASIMARTINGALES

par C. STRICKER

Titchmarsh a montré dans [1] qu'une fonction f nulle en dehors de $[a,b]$ est à variation bornée si et seulement si

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)|\,dx = O(h) .$$

Orey s'est alors posé la question suivante dans [2] : que peut-on dire des processus $(X_t)_{t\geq 0}$ continus à droite tels que

$$\int_0^\infty E|E[X_{t+h} - X_t|\mathcal{F}_t]|\,dt = O(h) .$$

Nous allons répondre à cette question dans l'exposé qui suit.

1. Définition d'une quasimartingale.

Soit $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace probabilisé muni d'une suite croissante de tribus $(\mathcal{F}_t)$ continues à droite. Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ adapté à la famille $\mathcal{F}_t$ est une quasimartingale si $\mathrm{Var}\, X = \sup \sum_{i=0}^{n-1} E|X_{t_i} - E[X_{t_{i+1}}|\mathcal{F}_{t_i}]|$ est fini, le sup étant pris sur l'ensemble des suites finies : $0 = t_0 < t_1 <\ldots< t_n < \infty$.

Nous allons maintenant préciser dans le théorème suivant les analogies entre les quasimartingales et les fonctions à variation bornée.

2. THEOREME. <u>Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique adapté à la famille $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et continu à droite dans L^1 . Alors</u>

i) la fonction : $t \to E|E[X_{t+h} - X_t|\mathcal{F}_t]|$ est continue à droite ;

ii) $(X_t)_{t\geq 0}$ est une quasimartingale si et seulement si

$$\int_0^\infty E|E[X_{t+h} - X_t|\mathcal{F}_t]|dt = O(h) \; ;$$

iii) $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale si et seulement si

$$\int_0^\infty E|E[X_{t+h} - X_t|\mathcal{F}_t]|dt = o(h) \; .$$

De plus, dans les cas ii) et iii) $\operatorname{Var} X = \lim\limits_{h\to 0} \displaystyle\int_0^\infty \frac{E|E[X_{t+h} - X_t|\mathcal{F}_t]|}{h} dt$.

<u>Démonstration</u> : i) résulte immédiatement de la continuité à droite dans L^1 de (X_t).

ii) si X est une quasimartingale, montrons que

$$\int_0^\infty \frac{E|E[X_{t+h} - X_t|\mathcal{F}_t]|}{h} dt \leq \operatorname{Var} X \; .$$

Pour calculer l'intégrale du membre de gauche utilisons une somme de Riemann associée aux intervalles de longueur $\frac{h}{m}$

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{m} E|E[X_{\frac{kh}{m}+h} - X_{\frac{kh}{m}}|\mathcal{F}_{\frac{kh}{m}}]|$$

$$\leq \sum_{k=0}^\infty E|E[X_{\frac{(k+1)h}{m}} - X_{\frac{kh}{m}}|\mathcal{F}_{\frac{kh}{m}}]| \leq \operatorname{Var} X \; .$$

En faisant tendre m vers l'infini on obtient le sens direct de ii). Réciproquement : soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu à droite dans L^1 vérifiant : $\int_0^\infty E|E[X_{t+h} - X_t|\mathcal{F}_t]|dt = O(h)$. Etant donnés $t_0 = 0 < t_1 <\ldots< t_n < \infty$ et $Z_k \in \mathcal{F}_{t_k}$, définissons f et g de la manière suivante :

$$f(t) = E[Z_k . X_t] \quad \text{si} \quad t \in [t_k, t_{k+2}[\; , \; k \; \text{pair}$$

$$g(t) = E[Z_k . X_t] \quad \text{si} \quad t \in [t_k, t_{k+2}[\; , \; k \; \text{impair} \; .$$

Pour ε assez petit, on a l'inégalité suivante :

$$\liminf_{h\to 0}\Big[\sum_{k \text{ pair}} \int_{t_k}^{t_{k+1}+2\varepsilon} \frac{|f(t+h)-f(t)|}{h}dt + \sum_{k \text{ impair}} \int_{t_k}^{t_{k+1}+2\varepsilon} \frac{|g(t+h)-g(t)|}{h}dt\Big]$$

$$\leq \liminf_{h\to 0}\Big[\int_0^\infty \frac{E|E[X_{t+h} - X_t|\mathcal{F}_t]|}{h}dt + \sum_k \int_{t_k}^{t_k+2\varepsilon} \frac{E|E[X_{t+h} - X_t|\mathcal{F}_t]|}{h}dt\Big] .$$

Cette limite inférieure est finie par hypothèse. Appelons-la M_ε . Posons :

$$\Phi_p(x) = p\int_x^{x+\frac{1}{p}} f(t)dt = p\int_0^{\frac{1}{p}} f(x+t)dt$$

$$\Psi_p(x) = p\int_x^{x+\frac{1}{p}} g(t)dt = p\int_0^{\frac{1}{p}} g(x+t)dt .$$

Soit (x_k,x_k') un couple de points de l'intervalle $[t_k,t_{k+1}+\varepsilon[$. On a les inégalités suivantes :

$$\sum_{k \text{ pair}} |\Phi_p(x_k)-\Phi_p(x_k')| + \sum_{k \text{ impair}} |\Psi_p(x_k)-\Psi_p(x_k')|$$

$$= \sum_{k \text{ pair}} \Big|\int_{x_k}^{x_k'} \Phi_p'(x)dx\Big| + \sum_{k \text{ impair}} \Big|\int_{x_k}^{x_k'} \Psi_p'(x)dx\Big|$$

$$\leq \sum_{k \text{ pair}} \int_{x_k}^{x_k'} |\Phi_p'(x)|dx + \sum_{k \text{ impair}} \int_{x_k}^{x_k'} |\Psi_p'(x)|dx$$

$$\leq \liminf_{h\to 0}\Big[\sum_{k \text{ pair}} \int_{t_k}^{t_{k+1}+\varepsilon} \frac{|\Phi_p(x+h)-\Phi_p(x)|}{h}dx + \sum_{k \text{ impair}} \int_{t_k}^{t_{k+1}+\varepsilon} \frac{|\Psi_p(x+h)-\Psi_p(x)|}{h}dx\Big]$$

$\leq M_\varepsilon$ dès que $\frac{1}{p} < \varepsilon$.

Mais $\lim_{p\to\infty} \Phi_p(x) = f(x)$ et $\lim_{p\to\infty} \Psi_p(x) = g(x)$ presque partout pour la mesure de Lebesgue.

Grâce à la continuité à droite dans L^1 de (X_t) , il en résulte que

$$\sum_k |E[Z_k(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})]| \leq M_\varepsilon .$$

D'où, en prenant :

$$Z_k = 1 \quad \text{si} \quad E[X_{t_{k+1}} - X_{t_k} | \mathcal{F}_{t_k}] \geq 0$$

$$Z_k = -1 \quad \text{si} \quad E[X_{t_{k+1}} - X_{t_k} | \mathcal{F}_{t_k}] < 0$$

nous obtenons :

$$\sum_k E|E[X_{t_{k+1}} - X_{t_k} | \mathcal{F}_{t_k}]| \leq M_\varepsilon \; . \tag{1}$$

Par conséquent, (X_t) est une quasimartingale. Nous allons améliorer ce résultat et démontrer iii) grâce aux deux lemmes suivants :

LEMME. Si (X_t) est une quasimartingale continue à droite dans L^1 alors $\lim_{\varepsilon \to 0} V_a^{a+\varepsilon}(X) = 0$ où $V_a^{a+\varepsilon}(X) = \sup \sum_k E|E[X_{t_{k+1}} - X_{t_k} | \mathcal{F}_{t_k}]|$ le sup étant pris sur l'ensemble des subdivisions $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = a+\varepsilon$.

Démonstration : En vertu de la continuité à droite dans L^1 , pour tout $\eta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $E|X_t - X_a| < \frac{\eta}{2}$ si $0 < t-a < \alpha$.

Il existe aussi une subdivision : $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = a+1$ telle que $t_1 - a < \alpha$ et $\sum_{k=0}^{n-1} E|E[X_{t_{k+1}} - X_{t_k} | \mathcal{F}_{t_k}]| \geq V_a^{a+1}(X) - \frac{\eta}{2}$. Comme $E|X_{t_1} - X_a| < \frac{\eta}{2}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} E|E[X_{t_{k+1}} - X_{t_k} | \mathcal{F}_{t_k}] \geq V_a^{a+1}(X) - \eta \; .$$

Puisque $V_a^{a+1} = V_a^{t_1} + V_{t_1}^{a+1}$, nous obtenons pour tout $t < t_1$ l'inégalité $V_a^t < \eta$. Donc $\lim_{\varepsilon \to 0} V_a^{a+\varepsilon} X = 0$.

LEMME 2. Si (X_t) est une quasimartingale continue à droite dans L^1 ,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\sup_{h > 0} \int_a^{a+\varepsilon} \frac{E|E[X_{t+h} - X_t | \mathcal{F}_t]|}{h} dt \Big) = 0 \; .$$

Pour démontrer ce lemme, il suffit d'utiliser le lemme 1 et la majoration démontrée au début de ii) :

$$\int_a^{a+\varepsilon} \frac{E|E[X_{t+h} - X_t|\mathcal{F}_t]|}{h} dt \leq V_a^{a+\varepsilon}(X) .$$

Le lemme 2 entraîne que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Big(\sup_{h>0} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_k}^{t_k+2\varepsilon} \frac{E|E[X_{t+h} - X_t|\mathcal{F}_t]|}{h} \Big) = 0 .$$

Par conséquent, l'inégalité (1) : $\sum_{k=1}^{n} E|E[X_{t_{k+1}} - X_{t_k}|\mathcal{F}_{t_k}]| \leq M_\varepsilon$ peut être remplacée par

$$\sum_{k=1}^{n} E|E[X_{t_{k+1}} - X_{t_k}|\mathcal{F}_{t_k}]| \leq \liminf_{h\to 0} \int_0^{\infty} \frac{E|E[X_{t+h} - X_t|\mathcal{F}_t]|}{h} dt .$$

Il en résulte que :

$$\operatorname{Var} X \leq \liminf_{h\to 0} \int_0^{\infty} \frac{E|E[X_{t+h} - X_t|\mathcal{F}_t]|}{h} dt$$

et d'après la majoration démontrée au début de ii) :

$$\operatorname{Var} X \geq \limsup_{h\to 0} \int_0^{\infty} \frac{E|E[X_{t+h} - X_t|\mathcal{F}_t]|}{h} dt .$$

D'où :

$$\operatorname{Var} X = \lim_{h\to 0} \int_0^{\infty} \frac{E|E[X_{t+h} - X_t|\mathcal{F}_t]|}{h} dt .$$

REFERENCES

[1] TITCHMARSH, E. E. — The Theory of functions. London, Oxford, University Press, 1939 (2d ed.).

[2] OREY, S. — F - processes . Proc. 5th Berkeley Symposium on Math. Stat. and Prob. University of California, 1965-66, vol. II , part. 1 , 301 - 313 .