Claude Dellacherie

# Une remarque sur les espaces sousliniens de Bourbaki

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 9 (1975), p. 406-407
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__406_0>

# UNE REMARQUE SUR LES ESPACES SOUSLINIENS DE BOURBAKI

par C. Dellacherie

Rappelons que, selon Bourbaki, un espace topologique séparé E est dit souslinien (resp lusinien) s'il existe un espace polonais P et une application continue (resp continue et injective) f de P sur E.

Il est clair qu'une topologie est une topologie lusinienne si et seulement si elle est séparée et s'il existe une topologie plus fine à la fois lusinienne et métrisable. Nous allons voir qu'il en est de même pour une topologie souslinienne. Comme une topologie séparée moins fine qu'une topologie souslinienne est évidemment souslinienne, il nous reste à démontrer :

THEOREME. Soit E un espace souslinien. Il existe sur E une topologie plus fine à la fois souslinienne et métrisable.

Avant de passer à la démonstration, nous dirons quelques mots sur la topologie d'Effros. Soit P un espace polonais, que nous plongeons comme sous-espace topologique d'une espace métrique compact Q, muni de la distance d. On peut alors identifier l'ensemble $\underline{\underline{F}}(P)$ des fermés de P au sous-ensemble de l'ensemble $\underline{\underline{K}}(Q)$ des compacts de Q constitué par les compacts K tels que $K\cap P$ soit dense dans K. Si $\underline{\underline{K}}(Q)$ est muni de la distance de Hausdorff associée à d ($\underline{\underline{K}}(Q)$ est alors métrique compact), on a le résultat suivant, dû à Effros

PROPOSITION. $\underline{\underline{F}}(P)$ est un $\underline{\underline{G}}_\delta$ ( = intersection dénombrable d'ouverts) de $\underline{\underline{K}}(Q)$.

DEMONSTRATION. Je reprends la démonstration donnée dans un autre exposé de ce volume. Soit $(U_n)$ une base dénombrable d'ouverts de la topologie de Q, et soit $(V_n)$ une suite d'ouverts de Q telle que $P = \bigcap_n V_n$ (on sait qu'un espace polonais plongé dans un espace métrisable compact est une $\underline{\underline{G}}_\delta$ de cet espace). Il résulte du théorème de Baire que, pour $K\in\underline{\underline{K}}(Q)$, $K\cap P$ est dense dans K si et seulement si $K\cap V_n$ est dense dans K pour tout n. On a donc l'équivalence logique

$$K\in\underline{\underline{F}}(P) \Leftrightarrow \forall n\ \ K\subset\overline{K\cap V_n} \Leftrightarrow \forall m\ \forall n\ \ K\cap U_m = \emptyset \text{ ou } K\cap V_n\cap U_m \neq \emptyset$$

On en déduit aisément que $\underline{\underline{F}}(P)$ est un $\underline{\underline{G}}_\delta$ de $\underline{\underline{K}}(Q)$.

Comme tout $\underline{G}_\delta$ d'un espace métrisable compact est un espace polonais pour la topologie induite, on a

COROLLAIRE. $\underline{F}(P)$, muni de la topologie induite par $\underline{K}(Q)$, est un espace polonais.

REMARQUES. a) La restriction de d à P n'est pas en général une distance pour laquelle P soit complet; de même la restriction à $\underline{F}(P)$ de la distance de Hausdorff associée à d n'est pas en général une distance pour laquelle $\underline{F}(P)$ soit complet.
b) La topologie définie sur $\underline{F}(P)$ ne dépend que de la topologie de Q (et non de d). Elle dépend du plongement du polonais P dans un espace métrisable compact; mais la tribu borélienne de cette topologie ne dépend pas du plongement . Autrement dit, $\underline{F}(P)$ n'a pas de structure topologique intrinsèque, mais a une structure mesurable intrinsèque, appelée structure d'Effros. Pour plus de détails, voir les travaux de Christensen, et, en particulier, son livre "Topology and Borel structure" , North Holland Mathematics Studies 10, North Holland Company 1974.

DEMONSTRATION DU THEOREME. Soient P un espace polonais et f une application continue de P sur l'espace souslinien E. On peut alors identifier tout point x de E au fermé $f^{-1}(\{x\})$ de P et donc E à un sous-ensemble E' de $\underline{F}(P)$. Plongeons P dans un espace métrique compact Q, muni de la distance d et munissons $\underline{F}(P)$ de la topologie définie plus haut : pour la topologie induite, E' est métrisable. Comme d est compatible avec la topologie de P et que f est continue, il est clair que l'application canonique de E' dans E est continue. Il ne reste plus qu'à montrer que E' est un sous-espace souslinien de $\underline{F}(P)$. Soit $(U_n)$ une base dénombrable d'ouverts de la topologie de P. Comme P est régulier et E séparé, il est facile de voir qu'un fermé F de P n'appartient pas à E' si et seulement s'il existe des entiers m,n tels que $U_m \cap F \neq \emptyset$ , $U_n \cap F \neq \emptyset$ et $f(\overline{U}_m \cap F) \cap f(\overline{U}_n \cap F) = \emptyset$. Autrement dit, on a l'équivalence logique

$$F \in E' \Leftrightarrow \forall m \forall n \exists x \in P \exists y \in P \quad U_m \cap F = \emptyset \text{ ou } U_n \cap F = \emptyset \text{ ou } [x \in \overline{U}_m \cap F \text{ et } y \in \overline{U}_n \cap F \text{ et } f(x) = f(y)]$$

Le lecteur qui connait bien le calcul symbolique de Kuratowski-Tarski en déduira immédiatement que E' est souslinien dans $\underline{F}(P)$. Le lecteur ignorant n'aura pas de mal à voir que, pour m et n fixés, l'ensemble des x,y,F vérifiant la proposition logique écrite à droite des quantificateurs est fermé dans $P \times P \times \underline{F}(P)$, donc polonais, et donc que la projection de cet ensemble sur $\underline{F}(P)$ est souslinien dans $\underline{F}(P)$ : E', égal à l'intersection de ces projections lorsque m et n décrivent les entiers, est aussi souslinien dans $\underline{F}(P)$.

REMARQUE. Il y a quelques années, j'avais posé le problème suivant (toujours non résolu, à ma connaissance) : est ce que tout espace souslinien est plongeable dans un espace lusinien ? La réponse est trivialement oui si l'espace est métrisable (plongement dans un compact métrisable). Hoffmann-Jørgensen m'a appris récemment qu'une solution positive à ce problème aurait des conséquences intéressantes.
Le théorème que nous venons de démontrer, quoique plus faible que le résultat désiré, ne m'en semble pas bien loin.