SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

Jeux infinis avec information complète et temps d'arrêt

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 390-405

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__390_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1973/74

JEUX INFINIS AVEC INFORMATION COMPLETE ET TEMPS D'ARRET [1]

par C. Dellacherie

Cet exposé est postérieur à l'exposé "Ensembles analytiques et temps d'arrêt" de Meyer et moi de ce volume, exposé que nous désignerons par [*] dans toute la suite. Il en est aussi, en quelque sorte, la continuation logique, mais il en est suffisamment indépendant pour être abordé sans avoir pris connaissance de [*]. Par ailleurs, on retrouvera des résultats de [*] comme cas particuliers de ceux établis ici.

Les jeux dont il s'agit ici sont ceux introduits par Gale et Stewart dans [5]. Nous nous contenterons d'examiner ici les jeux "canoniques" qui peuvent être brièvement décrits de la manière suivante . On se donne deux joueurs I et II et une partition de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ en deux ensembles J(I) et J(II). Le jeu se joue ainsi : I choisit un entier n(1), puis II choisit un entier n(2), puis I choisit un entier n(3), puis II choisit un entier n(4) ... A la "fin" (I et II choisissent chacun leur tour un entier une infinité de fois), I et II ont construit une suite infinie d'entiers ω et on dit que I (resp II) a gagné si ω appartient à J(I) (resp J(II)). On dit que le jeu, défini par J(I) et J(II) est déterminé si l'un des deux joueurs a une stratégie qui lui permet de gagner quelle que soit la défense de son adversaire (tout le monde voit ce qu'est intuitivement une stratégie ; nous donnerons des définitions précises plus loin). Le problème auquel nous nous intéressons ici est de savoir si un jeu donné est déterminé. Gale et Stewart [5] ont établi que le jeu est déterminé si J(I) est ouvert ou fermé, $\mathbb{N}$ étant muni de la topologie discrète et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit. Nous donnerons plus loin une liste des résultats connus en ce qui concerne la détermination des jeux. Mais, disons tout de suite qu'un des grands problèmes ouverts est de savoir si le jeu est déterminé lorsque J(I) est un borélien quelconque.

Blackwell [1] a montré que le théorème de Gale et Stewart entraîne facilement le deuxième théorème de séparation des ensembles analytiques. C'est alors que la théorie des jeux infinis, que Steinhaus et Mycielski [9] avait déjà popularisée

---

1 je tiens à remercier le logicien Makkai, de l'Université de Montréal, qui m'a initié à ces jeux et fourni les éléments bibliographiques de 1953 à 1972.

parmi les logiciens, a commencé à les intéresser prodigieusement. Grossièrement parlant, le théorème de Gale et Stewart permet de faire une théorie de l'indice pour les ensembles analytiques (théorie à laquelle est consacrée une grande partie de [*]) et les logiciens (notamment D. Martin, Addison et Moschovakis) ont montré - si j'y ai compris quelquechose, étant donnée mon ignorance en logique - que l'hypothèse que certains jeux appartenant à certaines classes d'ensembles projectifs[1] soient déterminés entraine l'existence d'une théorie de l'indice pour d'autres classes d'ensembles projectifs, se situant dans un niveau plus élevé que les ensembles analytiques dans la hiérarchie des ensembles projectifs : d'où, des théorèmes de séparation, réduction, uniformisation ...

Notre but ici est bien plus modeste. Nous allons montrer d'une part que le langage des temps d'arrêt permet de donner une forme très suggestive au problème de la détermination des jeux boréliens et d'autre part qu'une théorie de l'indice bien choisie permet de démontrer le théorème de Gale et Stewart. Cette théorie de l'indice, qui reprend des idées de [*], est aussi écrite dans le langage des temps d'arrêt.

I. PRELIMINAIRES

Notations

Nous indiquons ici, en style télégraphique, les notations adoptées en ce qui concerne les suites finies ou infinies d'entiers, afin que le lecteur puisse s'y reporter facilement au gré des besoins.

1 $\mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$ <u>ne</u> contient <u>pas</u> 0. Si, pour certains indices parcourant les entiers, la valeur 0 est permise, cela sera indiqué expréssément.

$S_0 = \{\phi\}$ ensemble ayant pour unique élément la suite vide ϕ, de longueur 0

$S_n = \mathbb{N}^n$ ensemble des suites finies d'entiers de longueur n

$S = \Sigma S_n$ ensemble des suites finies d'entiers, ϕ comprise

s ou t = élément générique de S, sauf mention du contraire

$\Omega = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ensemble des suites infinies d'entiers, muni de la topologie habituelle

ω ou w = élément générique de Ω, sauf mention du contraire

$|s|$ = longueur de la suite s

$s(n)$ ou $\omega(n)$ = n-ième terme de la suite s ou ω

$s|n$ ou $\omega|n$ = restriction de s (si $|s| \geq n$) ou ω à $\{1,\dots,n\}$; on pose $s|0 = \omega|0 = \phi$

$s \dashv t$ ou $s \dashv \omega$ si et seulement si $s = t|n$ ou $s = \omega|n$ avec $n = |s|$

$s.t$ ou $s.\omega$ = suite obtenue en "ajoutant" t ou ω "à la droite" de s

1 Que le lecteur qui ne connait rien aux ensembles projectifs ne soit pas effrayé ! nous ne sommes guère mieux loti que lui. Disons, pour fixer les idées, que les sous-ensembles projectifs de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sont les éléments de la plus petite classe de parties de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ contenant les ouverts et stable pour le passage au complémentaire et pour les images directes par les applications continues de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Temps d'arrêt

2 DEFINITION. Une application T de Ω^d dans $\{0\}\cup\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ est un temps d'arrêt (à d variables) si elle satisfait à la propriété suivante : $\forall\omega_1\ldots\forall\omega_d$ $\forall w_1\ldots\forall w_d$ $\forall n\geq 0$

$$\omega_1|n=w_1|n \;\ldots\; \omega_d|n=w_d|n \text{ et } T(\omega_1,\ldots,\omega_d)>n \;\Rightarrow\; T(w_1,\ldots,w_d)>n$$

Un temps d'arrêt T est soit $\equiv 0$, soit partout > 0, et est toujours continu ("∞" étant le point de compactification habituel de $\mathbb{N}$) . Le temps d'arrêt T est dit prévisible si $(T-1)^+$ est un temps d'arrêt. Par conséquent, une application T de Ω^d dans $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ est un temps d'arrêt prévisible si et seulement si on a :

$$\forall\omega_1\ldots\;\forall w_1\ldots\;\forall n\;\; \omega_1|n-1=w_1|n-1\;\ldots \text{ et } T(\omega_1,\ldots)>n \;\Rightarrow\; T(w_1,\ldots)>n$$

3 Par la suite, nous aurons surtout affaire à des temps d'arrêt à une, deux ou trois variables pris individuellement et à l'ensemble des temps d'arrêt à une variable (appelés plus simplement temps d'arrêt ou t.d'a.). Nous rappelons ici quelques résultats sur l'ensemble $\underline{\underline{T}}$ des t.d'a. établis dans [*]. On munit $\underline{\underline{T}}$ de la topologie de la convergence simple sur Ω : $\underline{\underline{T}}$ est alors métrisable compact (cf lemme 1 de [*]) et l'application $(T,\omega)\to T(\omega)$ est continue sur $\underline{\underline{T}}\times\Omega$. On désigne par $\underline{\underline{P}}$ l'ensemble des t.d'a. T qui "ont un pôle" , i.e. pour lesquels existe un ω tel que $T(\omega)=\infty$. Comme $\underline{\underline{P}}$ est la projection sur $\underline{\underline{T}}$ de $\{(T,\omega)\ :\ T(\omega)=\infty\}$, qui est fermé dans $\underline{\underline{T}}\times\Omega$, $\underline{\underline{P}}$ est analytique dans Ω, et on peut montrer qu'il n'est pas borélien (cf théorème 2 de [*]; c'est, à mon avis, l'exemple le plus simple d'analytique non borélien). Le complémentaire $\underline{\underline{P}}^c$ de $\underline{\underline{P}}$ est l'ensemble des temps d'arrêt finis : il est coanalytique, non borélien.

Stratégies

4 DEFINITION. On appelle stratégie (ou codage, ou pliage) une application f de S dans S vérifiant les propriétés suivantes

a) $\forall s\ \ |f(s)| = |s|$

b) $s\dashv t \Rightarrow f(s)\dashv f(t)$

La stratégie f est dite prévisible si elle vérifie de plus la propriété

c) $s,t\in S_n$ et $s|n-1 = t|n-1 \Rightarrow f(s) = f(t)$

Les lettres f et g désigneront toujours une stratégie. Si f est prévisible, nous désignerons par $\underline{f}$ l'application de S dans S définie de la manière suivante : si s appartient à S_{n-1}, $\underline{f}(s)$ est l'élément de S_n tel que l'on ait $f(t) = \underline{f}(s)$ pour tout $t\in S_n$ tel que $s\dashv t$. Elle vérifie les propriétés

a') $\forall s\ \ |\underline{f}(s)| = |s|+1$

b') $s\dashv t \Rightarrow \underline{f}(s)\dashv\underline{f}(t)$

Réciproquement, il est clair qu'une application $\underline{f}$ de S dans S vérifiant ces propriétés provient d'une unique stratégie prévisible f.

5 Une stratégie f définit une application, notée encore f, de Ω dans Ω de la manière suivante : $f(\omega)$ est l'unique w tel que $f(\omega|0)\dashv f(\omega|1)\dashv\ldots\dashv f(\omega|n)\dashv\ldots\dashv w$, ou encore tel que $w|n = f(\omega|n)$ pour tout n. Il est facile de voir que, si f est une

stratégie et T un t.d'a., alors $T \circ f$ est un t.d'a., prévisible si f est prévisible. Réciproquement,[1] on vérifie sans peine qu'une fonction h de Ω dans Ω telle que $T \circ h$ soit un t.d'a. (prévisible) pour tout t.d'a. T est l'extension à Ω d'une stratégie (prévisible) unique.

II. JEUX INFINIS

Définitions

Nous allons d'abord introduire les jeux sous la forme que nous utiliserons par la suite. Nous retrouverons au n°11 la définition de l'introduction.

6 On se donne un sous-ensemble J de $\Omega \times \Omega$: J est un *jeu*. Une *partie jouée* (nous ajouterons toujours "jouée" pour ne pas confondre avec un sous-ensemble) est un point (ω, w) de $\Omega \times \Omega$. On dit que le *joueur* I (resp II) *a gagné la partie jouée* si (ω, w) appartient à J (resp J^c). D'une manière plus imagée, I et II choisissent au n-ième coup de la partie un entier, $\omega(n)$ pour I et $w(n)$ pour II ; J (resp J^c) est l'ensemble des parties jouées gagnées par I (resp II). Nous avons décrit ici une partie jouée, ce qui n'a pas grand intérêt. Ce qui est intéressant, c'est de voir jouer une partie, et, en particulier de voir si I ou II peut choisir judicieusement son entier à chaque coup pour gagner "à la fin". Bien entendu, au n-ième coup, les joueurs I et II n'ont pour information que la connaissance de J (ils ont lu la règle) et des coups précédemment joués; on convient aussi que le joueur I joue avant le joueur II. D'où

7 DEFINITION. *On appelle* partie jouée lorsque I adopte la stratégie *prévisible* f et II la stratégie g *l'unique point* (ω, w) *de* $\Omega \times \Omega$ *satisfaisant à*

$$\omega = f(w) \qquad\qquad w = g(\omega)$$

Ce couple (ω, w) *sera désigné par* $[f, g]$.

On peut donner la forme explicite de ce couple en regardant jouer I et II, le caractère prévisible de f traduisant le fait que I joue avant II. Au début I, ne connaissant que ϕ, décide de former $s_1 = \underline{f}(\phi)$ et II lui répond en formant $t_1 = g(s_1)$; puis I forme $s_2 = \underline{f}(t_1) \vdash s_1$ et II forme $t_2 = g(s_2) \vdash t_1$ ... Finalement I construit des suites $s_n \in S_n$ et II des suite $t_n \in S_n$ telles que $s_1 \dashv s_2 \dashv \ldots$ et $t_1 \dashv t_2 \dashv \ldots$ et $[f, g]$ est l'unique partie jouée (ω, w) telle que $s_n = \omega|n$ et $t_n = w|n$ pour tout n.

8 Identifions chaque ω à l'application constante de Ω dans lui-même valant ω. On associe alors à chaque ω la stratégie prévisible h_ω telle que $h_\omega(s) = \omega|n$ pour tout $s \in S_n$. Il est clair que l'on a $[h_\omega, g] = (\omega, g(\omega))$ pour toute stratégie g et de même $[f, h_w] = (f(w), w)$ pour toute stratégie prévisible f. En particulier, on a $[h_\omega, h_w] = (\omega, w)$ pour tout ω et tout w. Aussi désignerons nous la stratégie h_ω tout simplement par ω, pour tout ω.

9 On dit que I *a une stratégie gagnante* f si f est prévisible et si $[f, g]$ appartient à J pour toute stratégie g, et que II *a une stratégie gagnante* g si $[f, g]$ appartient

1 Ce résultat ne sera pas utilisé.

à J^c pour toute stratégie prévisible f.

PROPOSITION. a) Une stratégie prévisible f est gagnante pour I si et seulement si $(f(w),w)$ appartient à J pour tout w.

b) Une stratégie g est gagnante pour II si et seulement si $(\omega,g(\omega))$ appartient à J^c pour tout ω.

DEMONSTRATION. C'est à peu près trivial. Démontrons par exemple a). La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, donnons nous g ; alors $[f,g] = (\omega,w)$ avec $\omega = f(w)$ et donc $[f,g]$ appartient à J.

10 On dit que I (resp II) part gagnant si I (resp II) a une stratégie gagnante. On a donc, d'après la proposition précédente,

$$\text{I part gagnant} \iff \exists f \text{ prévisible } \forall w \ (f(w),w) \in J$$
$$\text{II part gagnant} \iff \exists g \text{ quelconque } \forall \omega \ (\omega,g(\omega)) \in J^c$$

I et II n'ont pas tout à fait un rôle symétrique pour deux raisons : d'abord J n'est pas en général symétrique par rapport à la diagonale de $\Omega\times\Omega$; ensuite I joue toujours avant II. On pourrait éviter cette seconde raison en prenant pour définition

$$\text{I part presque gagnant} \iff \exists f \text{ quelconque } \forall w \ (f(w),w) \in J$$
$$\text{II part presque gagnant} \iff \exists g \text{ quelconque } \forall \omega \ (\omega,g(\omega)) \in J^c$$

Mais alors, on a deux inconvénients : on ne peut pas définir le crochet $[f,g]$ pour deux stratégies quelconques, et I et II peuvent partir presque gagnants à la fois. C'est pourquoi nous adopterons la première définition comme objet principal d'étude, mais il nous arrivera de parler la seconde en remarque.

11 La méthode indiquée en introduction pour définir un jeu est sans doute plus naturelle. On se donne alors un sous-ensemble J^* de Ω (le jeu) et I et II choisissent alternativement les entiers $u(1)$, $u(2)$, ... ; I (resp II) a gagné si la suite infinie u définie ainsi appartient à J^* (resp J^{*c}). Il n'est pas difficile de ramener un jeu de ce type à un du type du n°6, et vice versa, à l'aide de l'homéomorphisme $(\omega,w) \to \omega * w$ de $\Omega\times\Omega$ dans Ω défini par $(\omega * w)(2n-1) = \omega(n)$ et $(\omega * w)(2n) = w(n)$. On notera, au passage, que si T est un t.d'a., alors $(\omega,w) \to T(\omega * w)$ est un temps d'arrêt à deux variables (il y a là-dessous une notion de stratégie à plusieurs variables). Il n'est pas bien difficile non plus de définir les stratégies, les stratégies gagnantes etc directement pour ce type de jeu. Mais, à notre avis, ces notions sont plus claires dans la première présentation. En particulier, il est bien agréable de pouvoir définir le crochet $[f,g]$ par les deux équations simples $\omega = f(w)$ et $w = g(\omega)$.

12 Le jeu J est dit déterminé si I ou II part gagnant (le "ou" est évidemment exclusif). Désignons par F l'ensemble des stratégies prévisibles et par G l'ensemble de toutes les stratégies. Comme on a

$$\text{I part gagnant} \iff \exists f \in F \ \forall g \in G \ [f,g] \in J$$
$$\text{II ne part pas gagnant} \iff \forall g \in G \ \exists f \in F \ [f,g] \in J$$

on voit que dire qu'un jeu est déterminé, c'est dire qu'on peut permuter un $\exists$ avec un $\forall$, ou encore, c'est dire qu'un théorème de "minimax" est vérifié (en l'occurrence, c'est celui de Von Neumann pour un jeu infini. Voir Gale et Stewart [5]). Il est assez facile d'exhiber, à l'aide de l'axiome de choix, un jeu qui ne soit pas déterminé (le premier exemple est dû à Gale et Stewart). En voici un, essentiellement dû à Aanderaa (cf Fenstad [3]), qui repose "seulement" sur l'existence d'un ultrafiltre non trivial $\underline{\underline{U}}$ sur $\mathbb{N}$. Définissons, pour tout entier k, un t.d'a. T_k par $T_k(u) = \inf\{n : u(1)+u(2)+\ldots+u(n) > k\}$ et, pour tout $(\omega,w) \in \Omega\times\Omega$, posons

$$U(\omega,w) = \{k : T_k(\omega * w) \text{ est impair}\}$$

Le jeu J de Aanderaa est alors donné par $J = \{(\omega,w) : U(\omega,w) \in \underline{\underline{U}}\}$ où $\underline{\underline{U}}$ est un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$. Démontrons, par exemple, que II ne part pas gagnant (le jeu étant essentiellement symétrique, on aurait une démonstration analogue pour I). Soit $h(\omega,w) = (\omega',w')$ l'application de $\Omega\times\Omega$ dans lui-même définie par : $\omega'(1) = \omega(1)+w(1)$, $\omega'(n) = w(n)$ pour $n>1$; $w'(n) = \omega(n+1)$ pour tout n. On a évidemment $T_k(\omega',w') = (T_k(\omega,w)-1)\vee 1$ pour tout k, et donc $(\omega,w) \in J$ si et seulement si $(\omega',w') \in J^c$ puisque $\underline{\underline{U}}$ est un ultrafiltre non trivial. Par ailleurs, il est facile de voir que, pour une stratégie g fixée, il existe ω et ω^o tels que l'on ait $(\omega^o,g(\omega^o)) = h(\omega,g(\omega))$, et donc g ne peut être gagnante.

13 Comme I et II ne jouent pas tout à fait des rôles symétriques, il peut arriver qu'un jeu J soit déterminé alors que le jeu J^c ne l'est pas (cf Gale et Stewart [5]). Cela ne nous arrivera pas par la suite pour les raisons que nous allons exposées maintenant. Soient $\underline{\underline{X}}$ une classe de parties de $\Omega\times\Omega$ et $\underline{\underline{X}}' = \{A : A^c \in \underline{\underline{X}}\}$. Supposons $\underline{\underline{X}}$ et $\underline{\underline{X}}'$ stables pour la symétrie par rapport à la diagonale de $\Omega\times\Omega$ et pour les images réciproques par les applications de la forme $(\omega,w) \to (s.\omega, t.w)$ (par exemple, $\underline{\underline{X}}$ est une classe de Baire, ou une classe projective). Alors, si tout jeu appartenant à $\underline{\underline{X}}$ est déterminé, tout jeu appartenant à $\underline{\underline{X}}'$ l'est aussi. Vérifions cela. Posons, pour tout n

$$J_n = \{(\omega,w) : (n.\omega,w) \in J\}$$

où l'on a identifié n à la suite de longueur 1 valant n. D'après les hypothèses faites, le symétrique de J_n^c par rapport à la diagonale appartient à $\underline{\underline{X}}$ et est donc un jeu déterminé pour tout n. On est alors dans l'un des deux cas exclusifs suivants

$$\text{ou} \quad \exists n \quad \exists f_n \in G \quad \forall w \quad (f_n(w),w) \in J_n \quad (1)$$

$$\text{ou} \quad \forall n \quad \exists g_n \in F \quad \forall \omega \quad (\omega,g_n(\omega)) \in J_n^c \quad (2)$$

On rappelle que F désigne l'ensemble des stratégies prévisibles et G celui de toutes les stratégies. Si on est dans le cas (1), on choisit un n et une f_n vérifiant les conditions indiquées, et I part gagnant dans le jeu J avec la stratégie prévisible f définie par $\qquad \forall s \quad \underline{f}(s) = n.f_n(s)$

Si on est dans le cas (2), on choisit pour tout n une g_n vérifiant les conditions indiquées, et II part gagnant dans le jeu J avec la stratégie g définie par

$$\forall n \quad \forall t \quad g(n.t) = \underline{g}_n(t)$$

<u>Un coup d'oeil sur les résultats connus</u>

14 On dit qu'un jeu J est ouvert, fermé, $\mathbf{G}_{\delta}$, ... , borélien, ... si J est un sous-ensemble ouvert, fermé, $\mathbf{G}_{\delta}$, ... , borélien, ... de $\Omega \times \Omega$. En ce qui concerne la détermination de ces jeux, on a les résultats suivants :

1) Tout jeu ouvert ou fermé est déterminé (Gale et Stewart [5], théorie des jeux, 1953) [la mention "théorie des jeux" indique les techniques utilisées]

2) Tout jeu $\mathbf{G}_{\delta}$ ou $\mathbf{F}_{\sigma}$ est déterminé (Wolfe [11], théorie des jeux, 1955)

3) Tout jeu $\mathbf{G}_{\delta\sigma}$ ou $\mathbf{F}_{\sigma\delta}$ est déterminé (Morton Davis [1], théorie des jeux, 1964)

4) Tout jeu $\mathbf{G}_{\delta\sigma\delta}$ ou $\mathbf{F}_{\sigma\delta\sigma}$ est déterminé (Paris [10], logique, 1972)

5) On ne sait pas si tout jeu borélien est déterminé, mais Friedman [4], 1971, a prouvé qu'on ne pouvait démontrer la détermination des jeux $\mathbf{G}_{\delta\sigma\delta\sigma}$ ou $\mathbf{F}_{\sigma\delta\sigma\delta}$ sans sortir de "l'analyse" (i.e., grossièrement parlant, sans faire intervenir des quantificateurs portant sur des variables décrivant l'ensemble des parties de Ω). Les démonstrations de 1), 2), 3) appartiennent à l'analyse; celle de 4) ne lui appartient pas, semble-t-il. L'article de Friedman m'est à peu près inaccessible, vues mes connaissances en logique, mais sa philosophie doit être quelquechose comme : il est possible qu'un jour on arrive à démontrer la détermination des jeux boréliens, mais la démonstration sera forcément très singulière et devra faire appel à toute la puissance des axiomes usuels de la théorie des ensembles (axiomatique de Zermelo-Fraenkel; en abrégé, ZF, et ZFC avec l'axiome de choix).

6) On ne peut pas démontrer dans ZFC que tout jeu analytique est déterminé (remarque de Mycielski [9], 1964, à partir d'un résultat de Morton Davis [1] et d'un théorème de Goedel-Novikov)

7) Si on suppose l'existence de "grands cardinaux" (par exemple, de cardinaux mesurables de Ulam), on peut montrer que tout jeu analytique ou coanalytique est déterminé (Donald Martin [6], 1970). Inversement, la détermination de certains jeux projectifs entraine l'existence d'un modèle de ZFC dans lequel existent des cardinaux mesurables (Solovay, cité dans Moschovakis [7]).

8) L'axiome "tout jeu est déterminé" a été proposé par Steinhaus et étudié par Mycielski [9], 1964. Il est incompatible avec l'axiome de choix (cf n°12), mais il entraine l'axiome de "choix dépendant" et des tas de résultats mirifiques : toutes les parties de $\mathbb{R}$ sont universellement mesurables et ont la propriété de Baire, etc. Un coup d'oeil (la seule chose à ma portée !) sur les travaux actuels des logiciens semble indiquer que le bon axiome serait "tout jeu projectif est déterminé" (en abrégé, PD) (cf Moschovakis [7], 1973 et [8], 1974). On ne sait pas si PD est compatible avec ZFC. Il n'est pas compatible avec l'axiome de constructibilité de Goedel, mais il donne des résultats plus "normaux" que ce dernier : les ensembles projectifs sont universellement mesurables, et même capacitables pour toute capacité alternée d'ordre ∞ de Choquet; dans la hiérarchie des projectifs, on obtient des théorèmes de séparation, réduction, uniformisation avec une alternance reproduisant celle dans les premiers niveaux de la hiérarchie, pour lesquels ZFC est suffisant.

Jeux analytiques

Nous allons montrer ici que le langage des temps d'arrêt permet de présenter d'une manière suggestive le problème de la détermination d'un jeu analytique.

15 Soient $s_1,s_2,\dots,s_d$ d suites finies de même longueur. On appelle ilot d'indice $s_1,s_2,\dots,s_d$ le sous-ensemble $\{(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_d) : s_1 \dashv \omega_1,\ s_2 \dashv \omega_2,\dots,\ s_d \dashv \omega_d\}$ de Ω^d. Les ilôts sont ouverts et fermés et forment une base dénombrable de la topologie de Ω^d.

LEMME. Soit H un fermé de Ω^d. Il existe un temps d'arrêt T à d variables tel que

$$H = \{(\omega_1,\dots,\omega_d) : T(\omega_1,\dots,\omega_d) = \infty\}$$

DEMONSTRATION. L'ensemble H^c est la réunion d'une suite d'ilôts (I_k). Pour chaque ilot I_k, définissons un temps d'arrêt T_k à d variables en posant

$$T_k(\omega_1,\dots,\omega_d) = \inf\{n : w_1|n = \omega_1|n,\dots,w_d|n = \omega_d|n \implies (w_1,\dots,w_d) \in I_k\}$$

où, comme d'habitude, on a posé $\inf \emptyset = \infty$. Il est clair que T_k vaut ∞ sur I_k^c et est fini, constant, sur I_k. Le temps d'arrêt $T = \inf\limits_k T_k$ satisfait alors à la condition de l'énoncé.

16 Donnons nous maintenant un jeu analytique J, i.e. une partie analytique J de $\Omega\times\Omega$. Il existe alors un fermé H de $(\Omega\times\Omega)\times\Omega$ tel que J soit la projection de H sur $\Omega\times\Omega$. D'après le lemme, il existe donc un temps d'arrêt à trois variables $T(\omega,w,u)$ tel que

$$(\omega,w) \in J \iff \exists u \quad T(\omega,w,u) = \infty$$

Maintenant, J et T étant fixés, on peut considérer que T est une application de $\Omega\times\Omega$ dans l'ensemble $\underline{\underline{T}}$ des t.d'a. (à une variable), à savoir l'application

$$(\omega,w) \to (\ u \to T(\omega,w,u)\ )$$

application que nous noterons $T(.,.)$ ou $T_{.,.}$ suivant notre humeur. Et l'on a

$$(\omega,w) \in J \iff T_{\omega,w} \in \underline{\underline{P}}$$

où $\underline{\underline{P}}$ est l'ensemble des t.d'a. ayant un pôle (cf n°3). Le lecteur connaissant [*] remarquera que l'application $T(.,.)$ de $\Omega\times\Omega$ dans $\underline{\underline{T}}$ est continue et que l'équivalence logique ci-dessus n'est autre que l'écriture d'un schéma de Souslin - particulier - dans le langage des temps d'arrêt (cf [*] définition 3). En fin de compte, I (resp II) part gagnant dans le jeu J si et seulement s'il existe une stratégie f prévisible (resp g quelconque) telle que $T_{f(w),w}$ (resp $T_{\omega,g(\omega)}$) appartienne à $\underline{\underline{P}}$ (resp $\underline{\underline{P}}^c$) pour tout w (resp ω).

17 [Cet alinéa s'adresse au lecteur connaissant [*]]. Soit $j(.)$ la fonction indice définie sur $\underline{\underline{T}}$. On a $j(T_{\omega,w}) = \underline{\Omega}$ (premier ordinal non dénombrable) si et seulement si (ω,w) appartient à J. Que gagne-t-on si J est borélien ? Eh bien, alors, l'image de J^c par $T(.,.)$ est analytique dans $\underline{\underline{T}}$, contenue dans $\underline{\underline{P}}^c$. Il existe donc, d'après le théorème 3 de [*], un ordinal dénombrable ε tel que l'on ait $j(T_{\omega,w}) \leq \varepsilon$ si et seulement si (ω,w) appartient à J^c. L'application $j(T(.,.))$ est alors à valeurs dans $[0,\varepsilon]\cup\{\underline{\Omega}\}$, et, en particulier, ne prend au plus qu'une infinité dénombrable de valeurs. C'est, à notre avis, par le biais de cette application $j(T(.,.))$ qu'on

peut espérer attaquer le problème des jeux boréliens dans le langage des temps d'arrêt, peut-être en arrivant à définir une notion de temps d'arrêt à deux variables à valeurs dans les ordinaux. Si J est fermé, on peut choisir T de sorte qu'il ne dépende pas de u. L'application $T(.,.)$ est alors à valeurs dans les t.d'a. constants, et, si la fonction $j(.)$ est choisie judicieusement, on a $j(T_{\omega,w}) = T_{\omega,w}$ en identifiant l'application constante $T_{\omega,w}$ avec sa valeur et ∞ avec $\underline{\Omega}$. C'est ce cas particulier que nous allons étudier maintenant.

III. LE THEOREME DE GALE ET STEWART

Nous allons démontrer ici que tout jeu fermé J est déterminé. D'après 15, il existe un temps d'arrêt à deux variables $T(\omega,w)$ tel que $J = \{(\omega,w) : T(\omega,w) = \infty\}$. Nous devons donc montrer, qu'étant donné un temps d'arrêt à deux variables T, soit il existe une stratégie prévisible f telle que $T(f(w),w) = \infty$ pour tout w, soit il existe une stratégie g telle que $T(\omega,g(\omega)) < \infty$ pour tout ω.

Nous ne regarderons plus désormais que le temps d'arrêt $T(\omega,w)$ donné une fois pour toutes.

18 DEFINITION. <u>Soit</u> $U(\omega,w)$ <u>un temps d'arrêt à deux variables</u>. <u>On appelle</u> dérivé <u>de</u> U <u>le temps d'arrêt à deux variables</u> $U^*(\omega,w)$ <u>défini par</u>

- $U^*(\omega,w) > 0 \iff \exists\omega' \ \forall w' \ U(\omega',w') > 1$
- $U^*(\omega,w) > n \iff U^*(\omega,w) > n-1$ et
  $\exists\omega' \ \forall w' \ (\omega'|n = \omega|n)$ et $(w'|n = w|n \Rightarrow U(\omega',w') > n+1)$

<u>Autrement dit, on a</u>

$$U^*(\omega,w) = \inf \{k \geq 0 : \forall\omega' \ (\omega'|k = \omega|k) \Rightarrow (\exists w' \ w'|k = w|k \text{ et } U(\omega',w') \leq k+1)\}$$

<u>où, comme d'habitude</u>, $\inf \emptyset = \infty$.

Il est clair que l'on a $U^* \leq U$, $(U+n)^* = U+n-1$, et $U^* \leq V^*$ si on a $U \leq V$.

19 La notion de dérivé nous permet de définir la suite transfinie des dérivés successifs du temps d'arrêt $T(\omega,w)$ de la manière suivante

- $T^0 = T$; $T^1 = T^*$
- $T^{\alpha+1} = (T^\alpha)^*$
- $T^\beta = \inf_{\alpha<\beta} T^\alpha$ si β est un ordinal limite

(on notera au passage que l'enveloppe supérieure ou inférieure d'une famille quelconque de temps d'arrêt est encore un temps d'arrêt)

La suite transfinie (T^α) est décroissante ; donc, pour tout n, les ensembles $\{(\omega,w) : T^\alpha(\omega,w) \geq n\}$ forment une suite transfinie décroissante de fermés de l'espace polonais $\Omega \times \Omega$. D'après un théorème bien connu[1], une telle suite est stationnaire à partir d'un certain ordinal dénombrable. On en conclut l'existence d'un plus petit ordinal dénombrable $i = i(T)$ tel que l'on ait $T^i = T^{i+1} = \ldots$: $i(T)$ est appelé <u>l'indice de Hausdorff de</u> T. On associe à T un autre ordinal $j(T)$, appelé <u>l'indice</u>

1 On peut aussi établir directement - ce n'est pas bien difficile - que l'enveloppe inférieure (resp supérieure) d'une famille quelconque de temps d'arrêt est égale à celle d'une sous-famille dénombrable, et en déduire le théorème "bien connu".

de Sierpinski-Lusin de T, défini de la manière suivante : $j(T) = i(T)$ si $T^{i(T)} = 0$ et $j(T) = \Omega$ sinon, où Ω désigne le premier ordinal non dénombrable. Autrement dit, si I désigne l'ensemble des ordinaux dénombrables, on a [1]

$$j(T) = \inf \{\alpha \in I : T^{\alpha} = 0\} \quad \text{avec } \inf \emptyset = \Omega$$

20 THEOREME. Il existe une stratégie prévisible f telle que l'on ait $T(f(w),w) = \infty$ pour tout w si et seulement si l'indice de Sierpinski-Lusin $j(T)$ est égal à Ω.

DEMONSTRATION. Pour démontrer que la condition est nécessaire, il suffit de montrer que si f est une stratégie prévisible telle que $T(f(w),w) = \infty$ pour tout w, alors on a aussi $T^{\alpha}(f(w),w) = \infty$ pour tout w et tout ordinal α. Et, pour cela, il suffit de montrer que l'on a $T^*(f(w),w) = \infty$ pour tout w. Fixons w et raisonnons par récurrence. On a $T^*(f(w),w) > 0$ car on a $T(f(w),w') > 0$ pour tout w' : en effet, on a $T(f(w'),w') = \infty$, et, comme f est prévisible, on a $f(w)|1 = f(w')|1$ pour tout w' et donc $T(f(w),w') > 1$ pour tout w'. Supposons démontré que l'on a $T^*(f(w),w) > n-1$ et soit w' tel que $w'|n = w|n$. Alors $T(f(w),w')$ est $> n+1$ car $T(f(w'),w') = \infty$ et $f(w')|n+1 = f(w)|n+1$ puisque f est prévisible et donc on a $T^*(f(w),w) > n$. Il est alors clair que l'on a $T^*(f(w),w) = \infty$ pour tout w. Démontrons que la condition est suffisante. Soit $i(T)$ l'index d'Hausdorff de T et posons $U = T^{i(T)}$. Nous allons montrer, en utilisant le fait que $U = U^* > 0$, qu'il existe une stratégie prévisible f telle que $U(f(w),w) = \infty$ pour tout w ; comme on a $U \leq T$, on aura aussi $T(f(w),w) = \infty$ pour tout w. En fait, c'est $\underline{f}$ que nous allons définir. Comme $U^*(\cdot,w) > 0$, il existe un ω_1 tel que $U(\omega_1,w') > 1$ pour tout w' : nous poserons $\underline{f}(\emptyset) = \omega_1|1$. Puisque $U = U^*$, on a $U^*(\omega_1,w) > 1$ et donc il existe un ω_2 avec $\omega_2|1 = \omega_1|1$ tel que $U(\omega_2,w') > 2$ pour tout w' tel que $w'|1 = w|1$: nous poserons $\underline{f}(w|1) = \omega_2|2$ etc Par récurrence, on construit ainsi une suite (ω_n) telle que $\omega_{n+1}|n = \omega_n|n$ et $U(\omega_n,w') > n$ pour tout w' tel que $w'|n-1 = w|n-1$. Il ne reste plus qu'à prendre pour $f(w)$ la suite infinie ω telle que $\omega|n = \omega_n|n$ pour tout n.

REMARQUES. a) Si T ne dépend pas de w, on peut considérer que T est un temps d'arrêt à une variable. La démonstration montre alors que $j(T) = \Omega$ si et seulement si T a un pôle et on retrouve la théorie de l'indice faite dans [*].

b) Supposons que, dans la définition 18, on remplace $\exists \omega'\ \forall w'$ par $\forall w'\ \exists \omega'$. On définit ainsi une notion de dérivé U' plus faible (on a $U^* \leq U' \leq U$) et U' est encore un temps d'arrêt. Si $j'(T)$ est l'indice de Sierpinski-Lusin de T pour cette notion de dérivé, il n'est pas difficile de voir qu'on a $j'(T) = \Omega$ si et seulement s'il existe une stratégie f, non nécessairement prévisible, telle que $T(f(w),w) = \infty$ pour tout w. C'est l'indice qui correspond à la notion de "presque" gagnant du n°10. Par ailleurs, U' a une interprétation en terme de "réduite". Pour w fixé, désignons par $U^{\circ}(\cdot,w)$ le plus petit temps d'arrêt à une variable $\geq U(\cdot,w) - 1$: alors U' est le plus grand temps d'arrêt à deux variables tel que $U'(\cdot,w) \leq U^{\circ}(\cdot,w)$ pour tout w.

1 Comme tout temps d'arrêt non $\equiv 0$ est ≥ 1, il est clair que $j(T)$, s'il n'est pas égal à Ω, est toujours un ordinal de première espèce.

21 Avant d'étudier le cas où l'indice $j(T)$ est un ordinal dénombrable, nous allons introduire une opération sur les temps d'arrêt qui interviendra dans cette étude. Si U est un temps d'arrêt à deux variables et si s et t sont deux suites finies de longueur n, nous poserons, pour tout (ω,w),

$$U_{s,t}(\omega,w) = [U(s.\omega,t.w)-n]^+$$

On vérifie aisément qu'on définit ainsi un temps d'arrêt à deux variables $U_{s,t}$, pour tout $s,t \in S_n$, et que l'on a, si u et v sont deux suites finies de même longueur, $(U_{s,t})_{u,v} = U_{s.u,t.v}$. Il n'est pas bien difficile non plus de voir que l'opération ainsi définie commute avec la dérivation : on a $(U_{s,t})^* = (U^*)_{s,t}$ et donc on a $(U_{s,t})^\alpha = (U^\alpha)_{s,t}$ pour tout ordinal α. D'où les notations $U^*_{s,t}$ et $U^\alpha_{s,t}$.

22 THEOREME. <u>Il existe une stratégie</u> g <u>telle que l'on ait</u> $T(\omega,g(\omega))<\infty$ <u>pour tout</u> ω <u>si et seulement si l'indice de Sierpinski-Lusin</u> $j(T)$ <u>est</u> $<\Omega$.

DEMONSTRATION. La condition est évidemment nécessaire d'après le théorème précédent. Nous allons démontrer qu'elle est suffisante en construisant une stratégie g par récurrence sur la longueur de la suite s. On doit évidemment poser $g(\phi) = \phi$. Supposons $g(s)$ construit pour tout $s \in S_n$ de sorte qu'on ait l'inégalité

$$j(T_{s,g(s)}) \leq j(T_{s|n-1,g(s|n-1)})$$

avec égalité possible seulement si les deux membres sont égaux à 0 (i.e. si le temps d'arrêt $T_{s|n-1,g(s|n-1)}$ est $\equiv 0$). Soit maintenant s' une suite de longueur n+1 et posons $s = s'|n$ et $p = s'(n+1)$; nous identifierons les entiers avec les suites de longueur 1. Si $T_{s,g(s)}$ est $\equiv 0$, on pose $g(s') = g(s).q$ où q est un entier quelconque ; si $T_{s,g(s)}$ n'est pas $\equiv 0$, son indice $j = j(T_{s,g(s)}) \leq j(T)$ est un ordinal de première espèce (cf note de la page précédente) qui a un prédécesseur $j-1$ et $T^{j-1}_{s,g(s)}$ est $\equiv 1$. Il existe donc un plus petit ordinal dénombrable $\alpha \leq j-1$ tel que l'on ait $\inf_w T^\alpha_{s,g(s)}(p.\omega,w) = 1$ pour tout ω, et il existe alors un entier q tel que l'on ait, pour tout (ω,w),

$$T^\alpha_{s,g(s)}(p.\omega,q.w) = 1$$

On pose alors $g(s') = g(s).q$. D'après l'inégalité précédente, on a $j(T_{s',g(s')}) \leq \alpha$ et donc $< j(T_{s,g(s)})$ et l'hypothèse de récurrence est vérifiée. On construit ainsi par récurrence une stratégie g et il reste à vérifier que l'on a $T(\omega,g(\omega))<\infty$ pour tout ω. Fixons ω et faisons décrire à s les $\omega|n$ quand n décrit les entiers. Alors l'indice $j(T_{s,g(s)})$ est strictement décroissant, jusqu'au moment où il atteint sa limite, et ceci quand on arrive au premier entier m tel que $j(T_{\omega|m,g(\omega|m)}) = 0$. Mais alors on a $T_{\omega|m,g(\omega|m)} \equiv 0$ et donc $T(\omega|m.\omega',g(\omega|m).w') = m$ pour tout (ω',w') : ainsi $T(\omega,g(\omega)) = m < \infty$.

On obtient, comme corollaire des deux théorèmes précédents, le théorème de Gale et Stewart, dans le langage des temps d'arrêt

23 THEOREME. <u>Soit</u> $T(\omega,w)$ <u>un temps d'arrêt à deux variables. Ou bien il existe une stratégie prévisible</u> f <u>telle que</u> $T(f(w),w)=\infty$ <u>pour tout</u> w ; <u>ou bien il existe une stratégie</u> g <u>telle que</u> $T(\omega,g(\omega))<\infty$ <u>pour tout</u> ω.

REMARQUE. Si on veut un résultat plus "symétrique", il faut utiliser l'indice j' défini au b) de la remarque du n°20 (auquel la démonstration du n°22 est applicable). Il existe alors f quelconque telle que ... si $j'(T) = \underline{\Omega}$ et g quelconque telle que ... si $j'(T) < \underline{\Omega}$, f et g pouvant exister simultanément si $j'(T) = \underline{\Omega}$. D'autre part, de l'existence de f ou g quelconques, pour tout temps d'arrêt, on déduit aisément l'existence de f prévisible ou g quelconque, ou encore de f quelconque ou g prévisible, pour tout temps d'arrêt, à l'aide d'un argument analogue à celui du n°13 : le temps d'arrêt T étant donné, on considère les temps d'arrêt U_n et V_n définis pour tout n par $U_n(\omega,w) = T(n.\omega,w)$ et $V_n(\omega,w) = T(\omega,n.w)$ pour tout (ω,w) etc

Intuitivement, l'indice j(T) mesure la difficulté que le joueur II a à "borner" le temps d'arrêt T en jouant contre I. Nous allons préciser cette idée, en termes de stratégies, dans les numéros qui suivent.

Nous allons d'abord regarder le cas particulier des temps d'arrêt à une variable, identifiés aux temps d'arrêt à deux variables ne dépendant pas de la seconde variable. On retrouve alors l'idée de Blackwell [1], dans le langage des temps d'arrêt, avec une démonstration très simple grâce à une opération élémentaire sur les temps d'arrêt bien connue des probabilistes. C'est aussi le lemme 6 de [*].

24 THEOREME. <u>Soient</u> U <u>et</u> V <u>deux temps d'arrêt à une variable</u>. <u>Alors</u>

(1) <u>ou bien il existe une stratégie</u> g <u>telle que l'on ait</u> $U \leq V\circ g$, <u>auquel cas on a</u> $j(U) \leq j(V)$

(2) <u>ou bien il existe une stratégie</u> f <u>telle que l'on ait</u> $V < U\circ f$, <u>auquel cas on a</u> $j(V) < j(U)$, <u>et la stratégie</u> f <u>peut être choisie prévisible</u>.

DEMONSTRATION. On est évidemment dans le cas (1), et pas dans le cas (2), si V n'est pas fini : on prend alors pour g une stratégie constante ω_o telle que $V(\omega_o) = \infty$. Supposons donc V fini et posons, pour tout (ω,w),

$$\begin{aligned} T(\omega,w) &= U(\omega) \text{ si } U(\omega) \leq V(w) \\ &= +\infty \text{ si } U(\omega) > V(w) \end{aligned}$$

On définit ainsi un temps d'arrêt à deux variables T, et, d'après 23, on est dans l'un des cas exclusifs suivant

(1) il existe g telle que $T(\omega,g(\omega)) < \infty$, i.e. $U(\omega) \leq V(g(\omega))$, pour tout ω

(2) il existe f prévisible telle que $T(f(w),w) = \infty$, i.e. $U(f(w)) > V(w)$ pour tout w

Il ne reste plus qu'à vérifier les inégalités sur les indices. On vérifie d'abord que pour tout temps d'arrêt à une variable W et toute stratégie h, on a $(W\circ h)^* \leq (W^*)\circ h$, et donc $j(W\circ h) \leq j(W)$. D'où les inégalités sur les indices de U et V, compte tenu de l'implication $V < U\circ f \Rightarrow j(V) < \underline{\Omega}$ et $V + 1 \leq U\circ f$.

Nous passons au cas général. L'énoncé sera un peu plus complexe : il fera intervenir des stratégies à deux variables ; la démonstration nettement plus complexe : il faudra en particulier réinvestir la démonstration de 22. Afin de ne pas trop compliquer la situation, nous laisserons tomber les problèmes de prévisibilité.

Voici la définition des stratégies à deux variables, que nous appellerons codages pour changer.

25 DEFINITION. Une application h de $\Omega\times\Omega$ dans Ω est un codage si elle satisfait à la condition suivante

$$\forall n\ \forall\omega\ \forall\omega'\ \forall w\ \forall w'\quad (\omega|n=\omega'|n \text{ et } w|n=w'|n)\ \Rightarrow\ h(\omega,w)|n=h(\omega',w')|n$$

Bien entendu, on peut aussi voir un codage h comme une application de $\bigcup_{n\geq 0}(S_n\times S_n)$ dans S telle que

a) $|h(s,t)|=|s|=|t|$

b) $s\dashv s'$ et $t\dashv t'$ $\Rightarrow$ $h(s,t)\dashv h(s',t')$ (si $|s|=|t|$ et $|s'|=|t'|$)

et c'est cette définition que nous adopterons dans les constructions de codage.

Nous nous contenterons d'esquisser la démonstration du lemme suivant

26 LEMME. Soient T un temps d'arrêt à deux variables et h un codage. Posons

$$^{h}T(\omega,w)=T(h(\omega,w),w)\qquad T^{h}(\omega,w)=T(\omega,h(\omega,w))$$

pour tout (ω,w). Les fonctions ^{h}T et T^{h} ainsi définies sont des temps d'arrêt et on a

$$j(^{h}T)\leqq j(T)\leqq j(T^{h})$$

DEMONSTRATION. Il est clair que ^{h}T et T^{h} sont des temps d'arrêt à deux variables. Pour démontrer l'inégalité sur les indices, il suffit de montrer que l'on a $(^{h}T)^*\leqq {}^{h}(T^*)$ et $(T^*)^h\leqq(T^h)^*$. Nous laissons les détails au lecteur : intuitivement le joueur I a réduit ses possibilités de jeu dans le jeu ^{h}T; de même pour le joueur II dans le jeu T^{h}.

Nous donnons maintenant la généralisation de 24 , en deux énoncés, ce qui rendra les démonstrations plus claires, mais nous imposera des redites

27 THEOREME. Soient U et V deux temps d'arrêt à deux variables. On a $j(U)\leqq j(V)$ si et seulement s'il existe deux codages f et g tels que l'on ait $U^f\leqq {}^{g}V$, i.e.

$$U(\omega,f(\omega,w))\leqq V(g(\omega,w),w)$$

pour tout (ω,w).

DEMONSTRATION. La condition est suffisante d'après le lemme précédent. Pour démontrer qu'elle est nécessaire, nous allons construire des codages f et g vérifiant la condition suivante

$$(\circ)\quad \forall n\geqq 0\ \ \forall s,t\in S_n\qquad j(U_{s,f(s,t)})\leqq j(V_{g(s,t),t})\qquad\qquad \text{(cf 21)}$$

Comme, pour tout $n\geqq 0$, on a l'équivalence

$$U(\omega,f(\omega,w))>n\ \Leftrightarrow\ j(U_{\omega|n,f(\omega,w)|n})>0$$

on aura bien $U(\omega,f(\omega,w))\leqq V(g(\omega,w),w)$ pour tout (ω,w) si f et g vérifient $(\circ)$. Nous allons construire f et g par récurrence sur la longueur des suites s et t. On doit évidemment poser $f(\emptyset,\emptyset)=g(\emptyset,\emptyset)=\emptyset$. Supposons f et g construits pour tout $s,t\in S_n$ et soient $s',t'\in S_{n+1}$. Nous poserons

$$s=s'|n\ ,\ t=t'|n\qquad p=s'(n+1)\ ,\ q=t'(n+1)\ ^{1}$$

et nous identifierons les entiers aux suites finies de longueur 1.

1 q ne joue pas de rôle explicite dans la construction ; voir la remarque suivant 28

a) Supposons que $j(V_{g(s,t),t}) = \underline{\Omega}$. Alors, d'après 20, il existe une stratégie prévisible h telle que l'on ait $V_{g(s,t),t}(h(w),w) = \infty$ pour tout w. Nous poserons alors $g(s',t') = g(s,t).\underline{h}(\phi)$, ce qui assure que l'on a encore $j(V_{g(s',t'),t'}) = \underline{\Omega}$.
En effet, si h' est la stratégie prévisible définie par l'équation

$$\underline{h}(\phi).h'(u) = h(q.u) \text{ pour tout } u \in S$$

on a $V_{g(s',t'),t'}(h'(w),w) = \infty$ pour tout w et on conclut par 20. On peut alors poser, par exemple, $f(s',t') = f(s,t).1$. La condition (°) est alors vérifiée pour s' et t'.

b) Supposons que $j(V_{g(s,t),t}) < \underline{\Omega}$. On a alors aussi $j(U_{s,f(s,t)}) < \underline{\Omega}$.

b.1) si on a $j(U_{s,f(s,t)}) = 0$, on peut poser $f(s',t') = f(s,t).1$ et de même $g(s',t') = g(s,t).1$. La condition (°) est alors vérifiée pour s' et t'.

b.2) sinon, $j(U_{s,f(s,t)})$ est un ordinal de première espèce j_o ayant un prédécesseur $j_o - 1$. Il existe alors un plus petit ordinal dénombrable $\alpha \leqq j_o - 1$ tel que l'on ait

$$\inf_w U^{\alpha}_{s,f(s,t)}(p.\omega,w) = 1$$

pour tout ω , et un entier v tel que l'on ait

$$U^{\alpha}_{s,f(s,t)}(p.\omega,v.w) = 1$$

pour tout (ω,w). Nous poserons alors $f(s',t') = f(s,t).v$. L'indice j_1 de $U_{s',f(s',t')}$ est alors un ordinal de première espèce $\leqq \alpha$ et donc $< j_o$. Si $j_1 = 0$, nous poserons $g(s',t') = g(s,t).1$: (°) sera alors vérifiée pour s' et t'. Si j_1 n'est pas nul, il a un prédecesseur $j_1 - 1$. Comme on a $j_1 < j_o \leqq j(V_{g(s,t),t})$, le temps d'arrêt $V^{j_1}_{g(s,t),t}$ est > 0 : il existe donc un ω tel que l'on ait

$$V^{j_1-1}_{g(s,t),t}(\omega,w) > 1$$

pour tout w. Nous poserons alors $g(s',t') = g(s,t).\omega(1)$. L'indice de $V_{g(s',t'),t'}$ est alors $\geqq j_1$, qui est l'indice de $U_{s',f(s',t')}$: la condition (°) est vérifiée pour s' et t'.

28 THEOREME. Soient U et V deux temps d'arrêt à deux variables. On a $j(U) < j(V)$ si et seulement s'il existe deux codages f et g tels que l'on ait $U^f < {}^gV$, i.e.

$$U(\omega,f(\omega,w)) < V(g(\omega,w),w)$$

pour tout (ω,w).

DEMONSTRATION. Montrons d'abord que la condition est suffisante. D'après 25, de l'inégalité $U(\omega,f(\omega,w))+1 \leqq V(g(\omega,w),w)$ pour tout (ω,w) on déduit l'inégalité $j(U) < j(V)$ si on a $j(U^f) < \underline{\Omega}$. Montrons donc que l'on a $j(U^f) < \underline{\Omega}$ en raisonnant par l'absurde. Si $j(U^f) = \underline{\Omega}$, il existe d'après 20 une stratégie (prévisible) h telle que l'on ait $U(h(w),f(h(w),w)) = \infty$ pour tout w : on a alors $U(\omega,f(\omega,w)) = \infty$ pour $\omega = h(w)$, ce qui est impossible.

Pour démontrer que la condition est nécessaire, nous allons construire des codages f et g vérifiant les conditions suivantes

(°) $\forall n \geq 0$ $\forall s,t \in S_n$ $j(U_{s,f(s,t)}) \leq j(V_{g(s,t),t})$ avec égalité seulement si $j(V_{g(s,t),t}) = 0$

(°°) $\forall n > 0$ $\forall s,t \in S_n$ $j(U_{s,f(s,t)}) \leq j(U_{s|n-1,f(s,t)|n-1})$ avec égalité seulement si $j(U_{s|n-1,f(s,t)|n-1}) = 0$

Il résultera alors de (°°) que $U(\omega,f(\omega,w))$ est fini pour tout (ω,w) (cf la fin de la démonstration de 22), puis de (°) que l'on a $U(\omega,f(\omega,w)) < V(g(\omega,w),w)$ pour tout (ω,w) (cf le début de la démonstration de 27).

La démonstration de 28 reprend alors maintenant celle de 27 au b). On suppose f, g construits pour tout $s,t \in S_n$; on prend $s', t' \in S_{n+1}$ et on pose

$$s = s'|n \ , \ t = t'|n \qquad p = s'(n+1) \ , \ q = t'(n+1)$$

L'indice j_o de $U_{s,f(s,t)}$ est $< \underline{\Omega}$. Si $j_o = 0$, on pose $f(s',t') = f(s,t).1$ et $g(s',t') = g(s,t).1$: les conditions (°) et (°°) sont alors vérifiées pour s' et t'. Si j_o est > 0 , c'est un ordinal de première espèce ayant un prédecesseur $j_o - 1$. Il existe alors un plus petit ordinal dénombrable $\alpha \leq j_o - 1$ tel que l'on ait

$$\inf_w U^{\alpha}_{s,f(s,t)}(p.\omega,w) = 1$$

pour tout ω et un entier v tel que l'on ait

$$U^{\alpha}_{s,f(s,t)}(p.\omega,v.w) = 1$$

pour tout (ω,w). Nous poserons alors $f(s',t') = f(s,t).v$: l'indice j_1 de $U_{s',f(s',t')}$ est un ordinal de première espèce $\leq \alpha$ et donc $< j_o$. Ainsi la condition (°°) est vérifiée pour s' et t'. D'autre part, on a $j_1 < j_o < j(V_{g(s,t),t})$ et donc le temps d'arrêt $V^{j_o}_{g(s,t),t}$ est > 0 , et il existe un ω tel qu'on ait

$$V^{j_o-1}_{g(s,t),t}(\omega,w) > 1$$

pour tout w . Nous poserons alors $g(s',t') = g(s,t).\omega(1)$. L'indice de $V_{g(s',t'),t'}$ est alors $> j_1$, qui est l'indice de $U_{s',f(s',t')}$: la condition (°) est vérifiée pour s' et t' .

REMARQUE. Dans les constructions de 27 et 28, $f(s',t')$ et $g(s',t')$ ne dépendent pas de $q = t'(n+1)$; de même, dans 28, $g(s',t')$ ne dépend pas de $p = s'(n+1)$. Cela correspond à des propriétés de prévisibilité .

Il y aurait encore bien des choses à dire sur l'indice, mais c'est la rentrée scolaire, et je n'ai plus le temps de jouer.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLACKWELL (D.) : Infinite games and analytic sets (Proc. N.A.S. 58 (1967) p 1836-1837)

[2] DAVIS (M.) : Infinite games of perfect information (Advances in game theory, Annals of Math. Studies 52 (1964) p 85-101)

[3] FENSTAD (J.E.) : The axiom of determinateness (J.E. Fenstad ed., Proc. second Scandin. logic symposium, North-Holland, p 41-61)

[4] FRIEDMAN (H.) : Higher set theory and mathematical practice (Annals of Math. Logic, 2 (1971) p 325-357)

[5] GALE (D.), STEWART (F.M.) : Infinite games with perfect information (Contributions to game theory, Vol II, Annals of Math. Studies 28 (1953) p 245-266)

[6] MARTIN (D.) : Measurable cardinals and analytic games (Fund. Math. 66 (1970) p 287-291)

[7] MOSCHOVAKIS (Y.N.) : Analytical definability in a playful universe (Logic, Methodology and Philosophy of Science IV, P. Suppes et al., eds., North-Holland Pub. Co. 1973)

[8] : New methods and results in descriptive set theory (talk given at the Vancouver I.C.M. , to appear)

[9] MYCIELSKI (J.) : Of the axiom of determinateness (Fund. Math. 53 (1964) p 205-224)

[10] PARIS (J.B.) : $ZF \vdash \Sigma_4^0$ Determinateness (J. Symbolic Logic 37 (1972) p 661-667)

[11] WOLFE (P.) : The strict determinateness of certain infinite games (Pacific J. Math. 5 (1955) p 841-847)

Les articles [9], [3], [7] et [8] (par ordre chronologique) sont des articles de synthèse, et contiennent en particulier une abondante bibliographie sur le sujet.