

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DIDIER DACUNHA-CASTELLE

Sous-espaces symétriques des espaces d'Orlicz

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 268-284

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__268_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__268_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOUS-ESPACES SYMETRIQUES DES ESPACES D'ORLICZ

par D. DACUNHA-CASTELLE

A) Introduction

La recherche des sous-espaces à base symétrique est un problème assez intéressant car directement lié à des problèmes plus importants concernant les espaces L^p , non abordés ici. Nous traitons ici du cas général des sous-espaces symétriques d'espaces d'Orlicz à valeurs dans certains Banach.

Nous donnons ici une solution complète de ce problème en utilisant l'inégalité très intéressante, assez récemment démontrée par Hoffmann-Jørgensen sur les sommes de variables indépendantes [1] .

En fait notre but, dans cet exposé, est aussi de montrer que ce type de problème sur les Banach se ramène pour l'essentiel à un certain nombre d'inégalités sur les variables de Bernoulli et qu'il s'agit bien de problèmes presque purement probabilistes.

Par rapport à nos résultats antérieurs [4] le point essentiel est que les résultats valent même si la fonction $\frac{F(x)}{x^2}$ n'a pas de comportement régulier.

B) Définitions et notations

E désigne un espace vectoriel mesuré. ρ un module tempéré sur E c'est-à-dire une application $E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que il existe C avec

$$\rho(x+y) \leq C [\rho(x) + \rho(y)] \quad \text{pour tout } x, y \in E, \quad (1)$$

$$\rho(\alpha x) \leq \rho(x) \quad \text{pour } |\alpha| < 1$$

$$\rho(-x) = \rho(x)$$

Une fonction d'Orlicz F sur \mathbb{R} est une fonction paire, strictement croissante $F(0) = 0$, telle que F définisse un module tempéré sur \mathbb{R} .

Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E est dite ϵ -invariante (ou signe-invariante, d'après l'expression anglaise plus ou moins consacrée), si pour tout K , tout K -uplet $(n_1 \dots n_K)$, la loi de $(\epsilon_1 X_{n_1}, \dots, \epsilon_K X_{n_K})$ est indépendante du choix des ϵ_i , $\epsilon_i^2 = 1$. On notera, par convention

$P^{|x_1|, \dots, |x_k|}$ la probabilité conditionnelle régulière lorsque

$X_1 \in \{x_1, -x_1\}, \dots, X_k \in \{x_k, -x_k\}$, (dans le cas de \mathbb{R} , cela signifie simplement $|x_i|$ fixés).

Le lemme suivant est à peu près immédiat et bien connu.

Lemme 1 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

1 - (X_n) est ϵ -invariante.

2 - Les lois $P^{|x_1| \dots |x_k|} (dx_1 \dots dx_k)$ de $X_1 \dots X_k$ à $|x_1|, \dots, |x_k|$ fixés sont celles de k -variables de Bernoulli indépendantes.

3 - Les lois conditionnelles de $(\epsilon_{k+1} X_{k+1}, \dots, \epsilon_{k+n} X_{k+n})$ lorsque $X_1 = \epsilon_1 x_1, \dots, X_k = \epsilon_k x_k$ sont indépendantes de $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k, \epsilon_{k+1}, \epsilon_{k+n}$.

De plus $S_n = X_1 + \dots + X_n$ est une martingale.

C) Quelques inégalités

Conditionnellement à un choix $|X_1|$ de X_1 (dans $\{x_1, -x_1\}$), les variables $X_1 \dots X_n$, se comportent donc comme des vecteurs de Bernoulli $|X_1| \epsilon_1, \dots, |X_n| \epsilon_n$. Toutes les inégalités classiques valables pour de tels vecteurs, s'étendent donc au cas de variables ϵ -invariantes, dont un cas particulier est celui de variables (X_i) indépendantes et symétriques.

Inégalités des modules modérés.

Soit (X, Y) un couple ϵ -invariant. Alors

$$E \rho(X + Y) \geq \frac{1}{2C} E \rho(X) \quad (2)$$

En effet, soit $x, y \in E$, ϵ_1, ϵ_2 deux variables de Bernoulli indépendantes. On a :

$$\rho\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) \leq C\left(\rho\left(\frac{x+y}{2}\right) + \rho\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)$$

donc

$$\rho(x) \leq 2C E(x + \epsilon_2 y)$$

d'où le résultat par intégrations successives. On en déduit

$$E |X|, |Y| \rho(X, Y) \geq \frac{1}{2C} E^{(X)}, (Y) \rho(X)$$

et l'inégalité par intégration.

(Remarque : Si ρ est convexe, on a l'inégalité de Jessen, $E \rho(X + Y) \geq \rho(X)$, qui provient de $\frac{1}{2} [\rho(x+y) + \rho(x-y)] \geq \rho(x)$).

Inégalité de la médiane.

$$\rho(y+x) + \rho(y-x) \geq \frac{1}{C} \rho(2y)$$

donc les événements

$$(\rho(y + x \epsilon_1) < \frac{\rho(2y)}{2C}) \cap (\epsilon_1 = 1)$$

et
$$\rho(y + x \epsilon_1) < \frac{\rho(2y)}{2C} \cap (\epsilon_1 = -1)$$

sont incompatibles et de probabilité $\leq \frac{1}{2}$ par suite

$$P[\rho(y + x \epsilon_1) \geq \frac{\rho(2y)}{2C}] \leq \frac{1}{2}$$

(c'est-à-dire que la médiane de la variable décentrée $\rho(y + x \epsilon_1)$ est supérieure à $\frac{\rho(2y)}{2C}$). Par intégration on obtient donc

$$P(\rho(y + X) \geq \frac{\rho(2y)}{2C}) \leq \frac{1}{2} \quad (3)$$

Inégalité de Paul Lévy.

On a, pour une suite de v.a. ϵ -invariantes

$$P(\max_{1 \leq k \leq n} \rho(S_k) \geq t) \leq 2 P(\rho(S_n) \geq \frac{t}{2C}) \quad (4)$$

Démonstration : Il suffit de la faire pour des variables de la forme $X_i = x_i \epsilon_i$.

Posons $\tau = \inf \{k, 1 \leq k \leq n, \rho(S_k) > t\}$.

On a
$$\{\rho(S_k + (S_n - S_k)) < \frac{t}{2C}\} \subset \{\rho(S_k + (S_n - S_k)) < \frac{\rho(2S_k)}{2C}\}$$

Appliquant l'inégalité sur la médiane on a, si $(\tau = k)$,

$$P^{(S_1 \dots S_k)}(\rho(S_k + (S_n - S_k)) < \frac{t}{2C}) < \frac{1}{2}$$

donc en intégrant et en sommant en k ,

$$P(\rho(S_n) < \frac{t}{2C}) < \frac{1}{2} P(\max_{1 \leq k \leq n} \rho(S_k) > t)$$

d'où le résultat, en utilisant

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1.$$

Inégalité de Hoffmann-Jørgensen

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires ϵ -invariantes. Alors
 si $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, et si

$$P(\rho(S_n) > \frac{1}{2C^3}) \leq \frac{1}{48C^3} \quad (5)$$

on a

$$E \rho(S_n) \leq 6 E \max_{1 \leq k \leq n} \rho(X_k) + 24 \quad (6)$$

Nous renvoyons à [1] ou [2] pour la démonstration de ce résultat important.

Il suffit évidemment de travailler avec $X_i = c_i \epsilon_i$.

D) Convergence de certaines séries de variables aléatoires

Nous supposons maintenant que (E, ρ) est un espace de Banach, modulaire au sens de Nakano, c'est-à-dire que la norme $\|\cdot\|$ est définie par un module convexe et modéré ρ , à partir de $\|x\| = \inf \left\{ \theta, \rho \left(\frac{x}{\theta} \right) \leq 1 \right\}$.

Si (Ω, \mathcal{F}, P) est un espace de probabilité on notera $L_\rho(\Omega, \mathcal{F}, P, E)$ l'espace des classes de variables aléatoires X telles que

$$\int_{\Omega} \rho(X) dP < \infty$$

On supposera de plus que dans E le théorème suivant est vrai. Pour toute martingale S_n à valeurs dans E , convergeant p.s vers S_∞ et telle que $\sup_n E \rho(S_n) < \infty$, on a S_n converge vers S dans $L_\rho(\Omega, \mathcal{F}, P, E)$. Il n'est pas dans notre propos de détailler les conditions dans lesquelles ce théorème est vrai. En tout cas c'est vrai pour $E = \mathbb{R}$ (voir par exemple, [3], chap. V, pour des conditions larges de validité).

On en déduit

Lemme 2 : Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ convergeant p.s, les X_k étant une suite de variables ϵ -invariantes.

Alors S_n converge dans L_ρ si et seulement si

$$\lim_n E \sup_{1 \leq k \leq n} \rho(X_k) < \infty.$$

En effet, d'après le théorème des martingales vu plus haut (qui est bien classique pour $E = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = x^p$ mais qui s'étend sans difficultés majeures à des ρ modérés), si $S_n \rightarrow S$ p.s et si $\sup_n E \rho(S_n) < \infty$ alors $S_n \rightarrow S$ dans L_ρ .

D'après l'inégalité de Hoffmann-Jørgensen si

$$\sup_n E \sup_{1 \leq k \leq n} \rho(X_k) < \infty \quad \text{alors}$$

$$\sup_n E \rho(S_n) < \infty.$$

$$\text{Inversement comme } \rho(X_k) \leq C [\rho(S_k) + \rho(S_{k-1})]$$

$$\sup_{1 \leq k \leq n} \rho(X_k) \leq 2C \sup_{1 \leq k \leq n} \rho(S_k)$$

$$P\left(\sup_{1 \leq k \leq n} \rho(X_k) > t\right) \leq P\left(\sup_{1 \leq k \leq n} \rho(S_k) > \frac{t}{2C}\right)$$

$$\leq 2 P(\rho(S_n) \geq \frac{t}{4C^2})$$

d'après l'inégalité de Paul Lévy et donc

$$E \sup_{1 \leq k \leq n} \rho(X_k) \leq 8C^2 E \rho(S_n) \quad (7)$$

d'où le lemme 2, car on remarque que si $\sum_{k=1}^N c_k X_k$ converge p.s vers S, alors

$$\frac{S - S_N}{\theta} \rightarrow 0 \text{ p.s et donc, par l'inégalité triangulaire}$$

$$P\left(\rho\left(\sum_{k=1}^N \frac{c_k X_k}{\theta}\right) \geq \frac{1}{2C^3}\right) \leq \frac{1}{48C^3}$$

dès que N est assez grand, pour un certain θ (ce qui justifie l'utilisation de l'inégalité (6)).

Supposons maintenant les variables X_k indépendantes et symétriques dans L_ρ . Supposons $\sum c_k X_k$ convergeant p.s vers S. On a divisé éventuellement par θ les c_k de manière à être dans les conditions d'application de l'inégalité (6).

$$\text{On a } P\left(\sup_{1 \leq k \leq n} (\rho(X_k) < t)\right) = \prod_{i=1}^n P(\rho(X_k) < t)$$

$$\text{soit } E \sup_{1 \leq k \leq n} \rho(X_k) = \int_0^\infty 1 - e^{-\sum_{i=1}^n \log[1 - P(\rho(X_k) \geq t)]} dt.$$

Supposons que l'on ait pour tout n,

$$p_n(t) = \sum_{k=1}^n P(\rho(X_k) \geq t) \leq \frac{1}{4}$$

alors il existe des constantes C_1, C_2, C_3 indépendantes de n telles que

$$C_1 \int_1^\infty p_n(t) dt \leq E \sup_{1 \leq k \leq n} \rho(X_k) \leq C_2 \int_1^\infty p_n(t) dt + C_3 \quad (8)$$

(puisque on a pour $u \leq 1$, $1 - e^{-1} \leq 1 - e^{-u} \leq u$, et que $p_n(t)$ décroît vers 0 à l'infini).

Si on se donne une série $\sum_{k=1}^\infty c_k X_k$ convergeant p.s, on sait que en particulier (théorème des 2 séries),

$$\sum_{k=1}^\infty P(\|X_k\| > \frac{t}{|c_k|}) < \infty$$

et donc il existe θ tel que

$$\sum P(\|X_k\| > \frac{t}{\theta |c_k|}) \leq a, \text{ pour } a \text{ donné.}$$

Mais ρ étant modéré $\rho(c_k X_k) \leq \|c_k X_k\|^q$ pour un certain $q \geq 1$ et donc on a aussi

$$\sum_{k=1}^\infty P[\rho(\theta c_k X_k) > t] \leq 1/4 \quad \text{pour } \theta \text{ assez grand.}$$

Donc, puisque $\{(c_k), \sum_{k=1}^\infty c_k X_k \text{ converge dans } L_\rho\}$ est un espace vectoriel, on a

Lemme 3 : La condition nécessaire et suffisante pour que $\sum c_k X_k$ converge dans L_ρ , si X_k est une suite de variables indépendantes et symétriques est que $\sum c_k X_k$ converge p.s et que

$$\int_1^\infty \sum_{k=1}^\infty P(\rho(c_k X_k) > t) dt < \infty \quad (9)$$

Dans le cas particulier où X_k est réelle, et $\rho = F$, on obtient, $\sum c_k X_k$ converge p.s et

$$\int_1^\infty \sum_{k=1}^\infty P(|X_k| > \frac{u}{|c_k|}) F'(u) du < \infty$$

soit après intégration par parties

$$\sum c_k X_k \text{ converge p.s et}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{1/c_k}^{\infty} F(c_k u) dP(X_k > u) < \infty$$

Donc, en appliquant de plus le théorème des 2 séries pour traduire la convergence p.s., on obtient dans le cas réel :

Lemme 4 : Si (X_k) est une suite de variables réelles et symétriques, indépendantes, alors $\sum c_k X_k$ converge dans L_F si et seulement si

$$\sum f_k(c_k) < \infty$$

où

$$f_k(\lambda) = \lambda^2 \int_0^{1/\lambda} u^2 dP(X_k > u) + \int_{1/\lambda}^{\infty} F(\lambda u) dP(X_k > u) \quad (10)$$

De plus, pour $\theta < \theta_0$ (θ_0 défini par $\sum_{k=1}^{\infty} P(c_k X_k \theta_0 > 1) < \frac{1}{4}$) des constantes D_1, D_2, D_3 telles que

$$\begin{aligned} D_1 \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\theta c_k) &\leq E F(\sum \theta c_k X_k) \\ &\leq D_2 \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\theta c_k) + D_3 \end{aligned} \quad (11)$$

cette dernière inégalité résultant de l'inégalité (8) et du lemme 2.

Nous allons maintenant terminer par le cas qui nous intéressera le plus par la suite.

Définition : Une suite de variables aléatoires (U_i) est dite invariante par réarrangement si elle est ϵ -invariante et échangeable c'est-à-dire si la loi de $(\epsilon_1 U_{i_1}, \dots, \epsilon_n U_{i_n})$ est indépendante du choix des ϵ et des n entiers distincts $i_1 \dots i_n$.

Lemme 5 : Les variables (U_i) sont conditionnellement indépendantes et symétriques, par rapport à la σ -algèbre \mathcal{B}_{∞} de queue (des événements symétriques).

D'après ce qui précède, les U_i étant ϵ -invariants $\sum c_k U_k$ converge dans L_{ρ} si et seulement si

$$\sup_n E \sup_{1 \leq k \leq n} \rho(c_k U_k) < \infty$$

soit

$$\sup_n E^{\beta_\infty} \sup_{1 \leq k \leq n} \rho(c_k U_k) < \infty.$$

Notant P_{β_∞} la trace de P sur β_∞ , on a $P(d\omega) = Q(d\omega, a) P_{\beta_\infty}(da)$ et les variables (U_i) sont indépendantes pour les probabilités $Q(d\omega, a)$

Il est facile de vérifier que si $\sum c_k U_k$ converge p.p.S, on a de même $\sum c_k U_k$ converge Q_a p.s., P_{β_∞} p.s.; posant Q_a pour $Q(d\omega, a)$.

Par suite, si l'on définit A_K par

$$A_K = \left\{ a, \sum_k Q_a \left[\rho \left(\frac{c_k U_k}{K} \right) > 1 \right] < \frac{1}{4} \right\}$$

on a $P_{\beta_\infty} \left(\bigcup_{K=1}^{\infty} A_K \right) = 1$. On pose $B_{K,a} = \{ (c_k), a \in A_K \text{ pour la suite } (c_k) \}$.

Donc si $(c_k) \in B_{K,a}$, on a, d'après le lemme 4 que

$$D_1 \sum_{k=1}^{\infty} f^a \left(\frac{c_k}{K} \right) \leq \int F \frac{(\sum c_k U_k)}{K} dQ_a \leq D_2 \sum_{k=1}^{\infty} f^a \left(\frac{c_k}{K} \right) + D_3 \quad (12)$$

en se limitant à partir de maintenant au cas de $E = \mathbb{R}$ et $\rho = F$, pour simplifier, ou

$$f^a(\lambda) = \lambda^2 \int_0^{1/\lambda} u^2 dQ_a(U_k > u) + \int_{1/\lambda}^{\infty} F(\lambda u) dQ_a(U_k > u) \quad (13)$$

$$\text{Posons } f^K(\lambda) = \int_{A_K} f^a(\lambda) dP_{\beta_\infty}(a)$$

et $L_F^K = L_F(\Omega \setminus A_K, \mathcal{A} \cap A_K, P)$

Il résulte de l'inégalité (12) que les espaces de Banach ℓ_{f^K} et $[U_k]_{L_F^K}$ sont isomorphes, les constantes d'isomorphisme étant indépendantes de K .

$$\text{Lorsque } K \uparrow \infty, f^K \uparrow f = \int f^a(\lambda) dP_{\beta_\infty}(a) \quad (14)$$

et $\|(c_k)\|_{\ell_{f^K}} \rightarrow \|(c_k)\|_{\ell_f}$ par continuité. De même $\|\sum c_k U_k\|_{L_F^K}$ tend vers

$\| \sum c_k U_k \|_{L_F}$, d'où :

Théorème 1 : Si (U_k) est une suite de variables aléatoires réelles invariantes par réarrangement, $\sum c_k U_k$ converge dans L_F , si et seulement $\sum f(c_k) < \infty$ où f est donné par (13) et (14).

Un résultat du même type vaut pour des modules sur des Banach, la définition de f étant alors un peu plus compliquée.

E) Application aux sous-espaces symétriques d'un espace d'Orlicz

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite basique inconditionnelle dans un espace $L_\rho(\Omega, \mathcal{A}, P, E)$.

Considérons l'espace produit

$$(\Omega \times \{-1, 1\})^{\mathbb{N}} \quad \mathcal{A} \times \mathcal{B} \quad , \quad P \otimes P_\epsilon$$

où P_ϵ désigne la probabilité associée aux variables de Bernoulli indépendantes (ϵ_n) . On notera E_ϵ (resp. E_ω) l'espérance à ω (resp. (ϵ_n)) fixé.

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n$ une série convergente dans $L_\rho(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On a donc :

$$E_\omega \rho(\sum c_n \epsilon_n X_n) < \infty$$

pour toutes valeurs des ϵ_n , puisque (X_n) est inconditionnelle. En utilisant un argument classique de Kahane (voir [5], p. 18), on voit que

$$E_\epsilon E_\omega \rho(\sum c_n \epsilon_n X_n) < \infty$$

Supposons de plus que $E_\omega \rho(X_n) = 1$

Soit $b = \sup \{ a, \text{ il existe une suite infinie } i_n, \$

$$A_n \subset \Omega \quad , \quad P(A_n) < 2^{-n} \quad , \quad \text{et} \quad \int \rho(X_{i_n}) dP > a - 2^{-n}$$

Lemme 6 : Si $b > 0$, il existe une sous-suite $(X_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ et une suite d'ensembles A_k telle que

$$1 - P(A_k) \longrightarrow 0$$

$$2 - \int_{A_k} \rho(X_{n_k}) \uparrow b$$

3 - $(\rho(X_{n_k} 1_{A_k^c}))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite équi-intégrable.

Démonstration (cf. [4], lemme 3.3.4)

Utiliser la maximalité de b et le procédé diagonal.

Lemme 7 : (Kadec-Pelczynski et [4], lemme 3.3.3). Si $b > 0$, si (X_{n_k}) et (A_k) sont les suites introduites au lemme 6, il existe alors des sous-suites infinies

$$Y_m = X_{n_{k_m}}, \quad A'_m = A_{k_m}$$

et une suite (B_m) d'ensembles 2 à 2 disjoints tels que

$$1 - B_m \subset A_m$$

2 - les espaces engendrés par les variables $(Y_m 1_{A'_m})$ et $(Y_m 1_{B_m})$ sont $(1 + \epsilon)$ isomorphes.

3 - les variables $(Y_m 1_{B_m^c})$ sont équi-intégrables.

Principe de la démonstration : On construit les ensembles B_m de proche en proche en utilisant le lemme classique de perturbation.

Lemme 8 : On a

$$\begin{aligned} (15) \quad & \frac{1}{2C} \max_{\epsilon, \omega} \left(\mathbb{E} \mathbb{E} \rho \left(\sum_{m=1}^N c_m \epsilon_m Y_m 1_{B_m^c} \right), \sum_{m=1}^N \mathbb{E} \mathbb{E} \rho (c_m Y_m 1_{B_m}) \right) \\ & \leq \mathbb{E} \mathbb{E} \rho \left(\sum_{m=1}^N \epsilon_m c_m Y_m \right) \\ & \leq C \left(\mathbb{E} \mathbb{E} \rho \left(\sum_{m=1}^N c_m \epsilon_m Y_m 1_{B_m^c} \right) + \sum_{m=1}^N \mathbb{E} \mathbb{E} \rho (c_m Y_m 1_{B_m}) \right) \end{aligned}$$

Démonstration : Les 2 variables $c_k Y_k 1_{B_k^c} \epsilon_k$ et $\sum_{k \neq j} c_j Y_j 1_{B_j} \epsilon_j$ sont ϵ -invariantes.

On obtient l'inégalité de droite en appliquant (1). On obtient l'inégalité de gauche en appliquant (2), en intégrant sur B_k et en sommant en k .

On déduit du lemme 8 que si $\sum c_n \frac{Y_n}{B_n}$ converge dans L_ρ , alors $\sum c_n Y_n \frac{1}{B_n}$ converge aussi dans L_ρ et donc que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E E (\sum c_n Y_n \epsilon_n \frac{1}{B_n} c) < \infty$.

Donc en utilisant le critère de Cauchy et le théorème de Fubini que

$\sum c_n \epsilon_n Y_n \frac{1}{B_n} c$ converge dans $L_\rho(\Omega, \mathcal{A}, P) P_\epsilon$: p.s.

On suppose maintenant avoir un espace de Banach B à base symétrique, et un isomorphisme de B dans $L_\rho(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Il existe donc A , $0 < A < \infty$ tel que pour toute suite finie (c_n) on ait

$$A^{-1} < \frac{E_\rho \left(\sum_{n=1}^N \epsilon_n c_n X_{\sigma(n)} \right)}{E_\rho \left(\sum_{n=1}^N c_n X_n \right)} < A$$

pour tout choix de $\epsilon_1 \dots \epsilon_n$ et de la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_N$ (car une inégalité est valable pour les normes correspondantes avec d'autres constantes).

Une telle suite (X_n) est dite presque invariante par réarrangement en norme (ou en module ϕ).

Lemme 9 : Si (X_n) est une suite presque invariante en norme par réarrangement, il existe une suite (B_k) d'ensembles 2 à 2 disjoints et une sous-suite (Y_k) de (X_n) tels que

$$1 - P(B_k) \rightarrow 0$$

$$2 - (Y_k \frac{1}{B_k} c) \text{ est équi-intégrable.}$$

$$3 - [Y_n]_{L_\rho} \text{ est isomorphe à } [X_n]_{L_\rho}.$$

$$4 - \sum c_k Y_k \text{ converge si et seulement si } \sum c_k Y_k \frac{1}{B_k} c \text{ et}$$

$$\sum c_k Y_k \frac{1}{B_k} c \text{ convergent dans } L_\rho.$$

Démonstration : Cela résulte simplement de (15) et de la presque ϵ -invariance.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème que nous avons en vue.

Théorème 2 : La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace de Banach B à base symétrique se plonge dans $L_F(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est que B soit isomorphe à un espace $\ell_{F_1+F_2}$ où

$$F_1(\lambda) = \lambda^2 \int_0^{1/\lambda} u^2 dM(u) + \int_{1/\lambda}^\infty F(\lambda u) dM(u)$$

$F_2(\lambda) \in$ convexe fermé engendré par l'ensemble des fonctions $\left\{ \lim_{\mathcal{U}} \frac{F(\lambda x)}{F(x)} \right\}$, où \mathcal{U} est un ultrafiltre à l'infini en x .

Démonstration : Si $b > 0$ pour la suite (X_n) , on peut extraire de la suite

$$F_k(\lambda) = \int_{B_k} F(\lambda Y_k) dP$$

qui est relativement compacte dans l'ensemble des fonctions d'Orlicz sur $(0,1)$ une sous-suite convergente vers $F_2(\lambda)$, en remarquant que pour tout ultrafiltre \mathcal{U} , $\lim_{\mathcal{U}} \frac{F(\lambda Y_k)}{F(Y_k)}$ existe car $\frac{F(\lambda Y_k)}{F(Y_k)} \leq \Phi(\lambda)$ d'après (1) et donc que par le théorème de Lebesgue et un argument standard

$$\lim_{\mathcal{U}} \int \frac{F(\lambda Y_k)}{F(Y_k)} F(Y_k) dP$$

existe, on a F_2 sous la forme indiquée dans le lemme. La convergence de F_k vers F_2 étant uniforme, on peut alors choisir une sous-suite Y_{k_n} de Y_k telle que

$$|F_{k_n}(\lambda) - F(\lambda)| \leq 2^{-n}$$

pour tout $0 < \lambda \leq 1$ et donc $[Y_{k_n}]_{B_{k_n}}]_{L_F}$ est isomorphe à ℓ_F d'après le lemme de perturbation.

Si l'on pose maintenant $Z_n = Y_{k_n} \cdot 1_{B_{k_n}^c}$ la suite Z_n est équi-intégrable et presque invariante par réarrangement en norme puisque Y_{k_n} et $Y_{k_n} \cdot 1_{B_{k_n}^c}$ le sont.

Lemme 11 : Si (\hat{Y}_n) est une suite équi-intégrable et presque invariante par réarrangement en norme alors il existe une suite de variables aléatoires (U_n) , invariante par réarrangement (en loi) telles que

$[U_n]_{L_F(\Omega', \mathcal{A}', P')}$ et $[\hat{Y}_n]_{L_F(\Omega', \mathcal{A}, P)}$ soit isomorphes.

La démonstration de ce lemme se trouve dans ([4], lemme 3.3.7) et est analogue à celle donnée dans [5].

Le théorème est alors démontré en utilisant les lemmes 9 et 11 et le théorème 1.

Dans le cas général d'un espace $L_{\rho}(\Omega, \mathcal{A}, P, E)$, où E est un espace de Banach convenable, on a un théorème analogue, l'espace d'Orlicz ayant seulement une forme un peu plus compliquée.

Bibliographie

- [1] Hoffmann-Jørgensen
Preprint series 1972-73, n° 15 - Matematisk Institut Aarhus

- [2] Kwapien
Séminaire Maurey-Schwartz 1972-73 - Ecole Polytechnique,
Exposé VI.

- [3] Neveu
Martingales à temps discret. Masson-Paris.

- [4] Dacunha-Castelle et Schreiber
Annales IHP, octobre 1974 (à paraître).

- [5] Dacunha-Castelle
Séminaire Strasbourg, même volume.