CLAUDE DELLACHERIE
PAUL-ANDRÉ MEYER

Un nouveau théorème de projection et de section

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 239-245
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__239_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1974/75

UN NOUVEAU THEOREME DE PROJECTION ET DE SECTION

par C. DELLACHERIE et P.A. MEYER

Considérons un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, muni d'une famille croissante $(\underline{\underline{F}}_t)$ de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}$. Jusqu'à maintenant, on n'a étudié en théorie générale des processus que le cas où la famille satisfait aux "conditions habituelles", ce qui signifie qu' avant de pouvoir appliquer les théorèmes généraux on doit rendre la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ continue à droite, et l'augmenter de tous les ensembles P-négligeables. Cela aboutit à faire disparaître la distinction, pourtant bien claire pour l'intuition, entre le <u>présent</u> $\underline{\underline{F}}_t$ et le <u>futur infinitésimal</u> $\underline{\underline{F}}_{t+}$.

Comme nous avons commencé ensemble à récrire le livre "probabilités et potentiel", nous nous sommes tout naturellement demandé dans quelle mesure les"conditions habituelles" étaient nécessaires en théorie générale des processus, et nous avons découvert (par un chemin tortueux) que celles-ci n'étaient absolument pas nécessaires pour la validité du théorème de section optionnel. Une fois ce point acquis, il était clair qu'elles ne devaient pas l'être non plus pour la validité du théorème de projection optionnel... Il ne s'agit là de rien de profond, et nous aurions pu établir ces théorèmes en toute généralité il y a dix ans au moins, si seulement nous y avions pensé - mais nous n'y croyions pas.

Nous exposons ici les deux théorèmes de manière assez schématique, en renvoyant pour beaucoup de détails au livre de Dellacherie " capacités et processus stochastiques". Le nouveau théorème de section paraîtra avec une démonstration complète dans la publication prochaine des chapitres I à IV de "probabilités et potentiel"(nouvelle édition) chez Hermann. Le théorème de projection paraîtra avec le chapitre VI , dans un avenir plus éloigné.

DEFINITIONS. THEOREME DE SECTION

Soulignons que la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ est croissante, mais qu'on ne lui impose aucune autre condition.

DEFINITION 1. $T : \Omega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}_+$ est un temps d'arrêt si pour tout t on a

(1) $$\{T\leq t\} \in \underline{\underline{F}}_t$$

Pour bien préciser, il nous arrivera d'appeler temps d'arrêt <u>stricts</u> les vrais temps d'arrêt, et temps d'arrêt <u>larges</u> les temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+})$.

DEFINITION 2. Soit T un temps d'arrêt strict. On note $\underline{\underline{F}}_T$ la tribu formée des $A\in\underline{\underline{F}}_\infty$ ($= \bigvee_t \underline{\underline{F}}_t$) tels que l'on ait pour tout t

(2) $$A\cap\{T\leqq t\} \in \underline{\underline{F}}_t$$

Cela revient à dire que la variable aléatoire

(3) $$T_A = T.I_A + (+\infty)I_{A^c}$$

est un temps d'arrêt strict. On définit de manière analogue la tribu $\underline{\underline{F}}_{T+}$ associée à un temps d'arrêt large T .

DEFINITION 3. On appelle tribu (strictement) optionnelle la tribu sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ engendrée par les processus adaptés à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, dont les trajectoires sont càdlàg. (continues à droite, avec des limites à gauche sur $]0,\infty[$).

On définit de même, en remplaçant $(\underline{\underline{F}}_t)$ par $(\underline{\underline{F}}_{t+})$, la tribu optionnelle au sens large.

Le mot optionnel est substitué ici, selon la terminologie de CHUNG et DOOB, à l'ancien mot "bien-mesurable".

Soient Y une v.a. $\underline{\underline{F}}_\infty$-mesurable, T un temps d'arrêt. On peut montrer sans aucune difficulté que Y est $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable si et seulement s'il existe un processus optionnel (X_t) tel que $Y=X_T$ sur $\{T<\infty\}$.

Toute la nouveauté tient dans le lemme suivant, qui est très simple. Mais nous aurions honte de montrer nos premières démonstrations, qui utilisaient les résultats les plus profonds de la théorie des ensembles analytiques. A vrai dire, les temps d'arrêt que nous employons ici sont connus depuis des années (ils ont été utilisés par DYNKIN tout au début de la théorie des processus de Markov). Nous avions simplement oublié leur existence.

LEMME 1. La tribu optionnelle sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ est engendrée par les intervalles stochastiques $[\![S,T[\![$, où S et T sont des temps d'arrêt (stricts) tels que $S\leqq T$.

DEMONSTRATION. L'indicatrice d'un tel intervalle $[\![S,T[\![$ est un processus adapté à trajectoires càdlàg., donc optionnel. Pour obtenir la réciproque, il nous suffit de savoir approcher tout processus (X_t), adapté et à trajectoires càdlàg., par des combinaisons linéaires d'indicatrices de tels intervalles stochastiques. Nous renvoyons maintenant le lecteur à la démonstration analogue dans Dellacherie CPS p.81 : il y trouvera qu'il suffit d'établir l'existence d'une suite (T_n) de temps d'arrêt (stricts !) tels que $T_0=0$, $\lim_n T_n = +\infty$, et que l'oscillation de la trajectoire $X_{\bullet}(\omega)$ sur chacun des intervalles $[T_n(\omega),T_{n+1}(\omega)[$ n'excède pas un nombre $\varepsilon>0$ donné. Ici nous construirons les T_n par récurrence : $T_0=0$ et

$$T_{n+1}(\omega) = \inf \{t>T_n(\omega) \ : \ |X_t(\omega)-X_{T_n}(\omega)|\geqq\varepsilon \text{ ou } |X_{t-}(\omega)-X_{T_n}(\omega)|\geqq\varepsilon \ \}$$

Il faut vérifier que les T_n sont des temps d'arrêt stricts. Nous raisonnerons sur $T_1=T$. Posons

$$A(\omega) = \{ \ s \ : \ |X_s(\omega)-X_0(\omega)|\geqq\varepsilon \text{ ou } |X_{s-}(\omega)-X_0(\omega)|\geqq\varepsilon \}$$

$$A_n(\omega)=\{ \ r \text{ rationnels} \ , \ |X_r(\omega)-X_0(\omega)|>\varepsilon-1/n \ \}$$

Alors le lecteur vérifiera aussitôt que $(T(\omega)\leq t) \Leftrightarrow (A(\omega)\cap]0,t]\neq\emptyset \ )$ $\Leftrightarrow(\forall n, \ A_n(\omega)\cap]0,t[\ \neq \emptyset$ ou $|X_t(\omega)-X_0(\omega)|\geqq \varepsilon$). Il en résulte que T est bien un temps d'arrêt.

Dans ces conditions, une très légère modification du théorème général de section de Dellacherie CPS p.71 (la classe de temps d'arrêt n'étant pas saturée pour l'égalité p.s.) entraîne le résultat suivant, où π désigne la projection de $\mathbb{R}_+\times\Omega$ sur Ω

THEOREME 1. <u>Soient</u> A <u>un ensemble optionnel</u>, ε <u>un nombre</u> >0. <u>Il existe un temps d'arrêt strict</u> T <u>tel que</u>

1) $T(\omega)<\infty \Rightarrow (T(\omega),\omega)\in A$
2) $P\{T<\infty\} \geqq P(\pi(A))-\varepsilon$. (Comme P est complète, on peut se passer ici de la probabilité extérieure P^*)

THEOREME DE PROJECTION

Il s'énonce ainsi :

THEOREME 2. <u>Soit</u> (X_t) <u>un processus mesurable borné sur</u> $\mathbb{R}_+\times\Omega$. <u>Il existe alors un processus optionnel</u> (Y_t) <u>possédant la propriété suivante</u> : <u>pour tout temps d'arrêt</u> T

(3) $$E[X_T I_{\{T<\infty\}}|\underline{\underline{F}}_T] = Y_T I_{\{T<\infty\}} \quad P\text{-}\underline{p.s.}$$

<u>Si</u> (Y'_t) <u>est un second processus satisfaisant à</u> (3), (Y_t) <u>et</u> (Y'_t) <u>sont indistinguables</u>.

DEMONSTRATION. Nous renvoyons le lecteur à Dellacherie, CPS p.98 pour les détails : l'unicité résulte du théorème 1, ainsi que l'argument de classes monotones qui permet de ramener le théorème 2 au cas particulier suivant

THEOREME 2'. <u>Soit</u> X <u>une variable aléatoire bornée</u>. <u>Il existe alors une version</u> (X_t) <u>de la martingale</u> $(E[X|\underline{\underline{F}}_t])$ <u>possédant les propriétés suivantes</u>

1) (X_t) <u>est optionnelle</u>
2) <u>Pour tout temps d'arrêt</u> T, $E[XI_{\{T<\infty\}}|\underline{\underline{F}}_T]=X_T I_{\{T<\infty\}}$ <u>p.s.</u>.

Cette version n'est en général, ni continue à droite, ni continue à gauche. Démontrons le théorème 2'.

Nous allons commencer par fixer quelques notations, en choisissant de bonnes versions continues à droite ou à gauche de la martingale. Pour chaque t rationnel, soit Z_t une v.a. $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable (aucun ensemble de mesure nulle ici) telle que $Z_t=E[X|\underline{\underline{F}}_t]$ p.s.. Soit $S(\omega)$ la borne supérieure des nombres t rationnels tels que la fonction $Z_{\bullet}(\omega)$, considérée sur les rationnels de $[0,t]$, soit la restriction d'une fonction càdlàg. sur $[0,t]$. Cela s'écrit au moyen de nombres de montées et de descentes,[1] et il en résulte sans peine que S est un temps d'arrêt large. Modifions alors Z_t, en le remplaçant (sans changer de notations) par 0 si $t \geqq S$ (t rationnel). Le processus (Z_t) ainsi modifié admet partout des limites à droite Z_{t+} , qui forment une version continue à droite, adaptée (sans complétion) à la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+})$, de la martingale $E[X|\underline{\underline{F}}_{t+}]$. Il admet aussi des limites à gauche Z_{t-} pour tout $t>0$, sauf peut être pour $t=S$ - on a $S=+\infty$ p.s., mais on ne peut pas jeter cet ensemble de mesure nulle de manière "progressive" . Nous conviendrons que l'assertion "$Z_{t+}(\omega)\neq Z_{t-}(\omega)$" signifie :"$0<t<\infty$; ou bien $Z_{t-}(\omega)$ existe et est différent de $Z_{t+}(\omega)$, ou bien $Z_{t-}(\omega)$ n'existe pas ".

Nous représentons maintenant l'ensemble $\{(t,\omega) : Z_{t+}(\omega)\neq Z_{t-}(\omega)\}$ comme une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt <u>larges</u>, de la manière suivante : introduisons les temps d'arrêt larges

$$U_\varepsilon^0=0 \ , \ U_\varepsilon^{n+1}= \inf \ \{ \ t>U^n \ , \ |Z_{t+}-Z_{U^n+}|>\varepsilon \ \}$$

les U^n ne peuvent s'accumuler qu'en un point où la limite Z_{t-} n'existe pas, c'est à dire en S. Un instant de réflexion montre que tous les (t,ω) où $Z_{t+}(\omega)\neq Z_{t-}(\omega)$ figurent parmi les points $S(\omega)$, $U^n_{1/m}(\omega)$ ($n\geqq 1$, $m\geqq 1$). Nous énumérons ces temps d'arrêt larges en une suite unique (V_n), nous rendons leurs graphes disjoints, d'où une nouvelle suite (W_n), et finalement nous posons

$$(4) \qquad R_n = W_n \ \text{ si } Z_{W_n+}\neq Z_{W_n-} \quad , \ R_n=+\infty \ \text{ sinon}$$

Cela nous donne l'énumération cherchée.

Nous utilisons maintenant le lemme suivant, qui a son intérêt propre

LEMME 2. <u>Soit</u> R <u>un temps d'arrêt large</u>. <u>Il existe</u> $A\in\underline{\underline{F}}_{R+}$ <u>tel que</u>, <u>si l'on pose</u> $B=A^c$

1) <u>Le graphe de</u> R_A <u>soit contenu dans une réunion dénombrable de temps d'arrêt stricts</u>.

2) <u>On ait</u> $P\{R_B=H<\infty\}= 0$ <u>pour tout temps d'arrêt strict</u> H.

1 Il faut encore écrire la continuité à droite pour s rationnel.

La démonstration de ce lemme est immédiate : soit (H_n) une suite de temps d'arrêt stricts, telle que l'ensemble $A=\bigcup_n \{R=H_n<\infty\}$ soit une réunion essentielle de tous les ensembles $\{R=H<\infty\}$, où H est strict. Alors le graphe de R_A est contenu dans la réunion des graphes $[\![H_n]\!]$, etc.

Nous poserons $R_A=R'$. Reprenons alors les temps d'arrêt larges R_n de la formule (4), formons les R'_n correspondants. Les $[\![R'_n]\!]$ sont contenus chacun dans une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt stricts H_{nm}, que nous rangeons en une suite unique encore notée H_n. Nous rendons ces graphes disjoints, sans changer de notation, et nous choisissons, pour tout n, une variable aléatoire $\underline{\underline{F}}_{H_n}$-mesurable X^n égale à $E[X|\underline{\underline{F}}_{H_n}]$ p.s. .

Construisons maintenant le processus cherché (X_t) de la manière suivante

(5) si $(t,\omega) \notin \bigcup_n [\![H_n]\!]$, $X_t(\omega)=Z_{t-}(\omega)$[1]

si $(t,\omega) \in [\![H_n]\!]$, $X_t(\omega)=X^n(\omega)$

Ce processus est optionnel : en effet, le processus (Z_{t-})[1] est prévisible, donc optionnel ; les ensembles $[\![H_n]\!]=[\![H_n,\infty[\![\setminus]\!]H_n,\infty[\![$ sont optionnels, et de même les processus $X^n I_{[\![H_n]\!]}$.

Soit T un temps d'arrêt strict. Pour vérifier que $E[XI_{\{T<\infty\}}|\underline{\underline{F}}_T] = X_T I_{\{T<\infty\}}$ il nous suffit en fait de vérifier que $E[XI_{\{T<\infty\}}] = E[X_T I_{\{T<\infty\}}]$, et d'appliquer ce résultat à tous les T_A, $A\in\underline{\underline{F}}_T$. Il nous suffit alors de vérifier que

(6) $E[XI_{\{T=H_n<\infty\}}] = E[X_T I_{\{T=H_n<\infty\}}]$ pour tout n

(7) $E[XI_{\{T<\infty,\forall n\ T\neq H_n\}}] = E[X_T I_{\{T<\infty,\ \forall n\ T\neq H_n\}}]$

Commençons par (6): T étant un temps d'arrêt strict, $\{T=H_n<\infty\}$ appartient à $\underline{\underline{F}}_{H_n}$, et (6) découle de la relation $X_{H_n}=X^n=E[X|\underline{\underline{F}}_{H_n}]$.

D'autre part, T étant un temps d'arrêt strict, la relation $T\neq H_n$ pour tout n entraîne $T\neq R_n$ pour tout n aux ensembles de mesure nulle près, donc $Z_{T-}=Z_{T+}$ p.s.. L'ensemble $\{\forall n,\ T\neq H_n\}$ appartient à $\underline{\underline{F}}_T$, donc à $\underline{\underline{F}}_{T+}$. Ainsi (7) découle de la formule $E[XI_{\{T<\infty\}}|\underline{\underline{F}}_{T+}] = Z_{T+}I_{\{T<\infty\}}$, qui est la forme classique du théorème d'arrêt pour les martingales continues à droite.

---

1 Pour que ce processus soit défini partout — même à l'instant S — nous conviendrons de définir Z_{t-} non comme une limite le long des rationnels de $]0,t[$, mais comme une lim sup.

UNE REMARQUE SUPPLEMENTAIRE

Revenons sur les temps d'arrêt T_n qui ont joué un rôle essentiel dans la démonstration du lemme 1. Nous voudrions leur donner une forme qui ne fasse plus apparaître les limites à gauche. A cet effet, nous désignons par $\alpha_t(\omega)$ l'ensemble des <u>valeurs d'adhérence</u> de la trajectoire $X_{\cdot}(\omega)$ au point t, et nous définissons

$$T_{n+1}(\omega) = \inf \{ t>T_n(\omega) : \exists x \in \alpha_t(\omega) \text{ tel que } |X_{T_n}(\omega)-x|\geqq\varepsilon \}$$

Lorsque X est càdlàg., cela coïncide avec la définition précédente, mais maintenant cela a un sens lorsque X est simplement continu à droite, et la même démonstration montre que les T_n sont des temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$. Seulement, cette fois les T_n peuvent s'accumuler à distance finie, et il convient de définir, par récurrence transfinie, des temps d'arrêt T_α (avec la convention que si α est un ordinal limite, $T_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} T_\beta$). Poursuivons alors la démonstration, en remplaçant partout n par α, et notons qu'il existe pour toute loi P un ordinal dénombrable γ tel que $T_\gamma = +\infty$ P-p.s.. Il vient que

<u>Tout processus adapté continu à droite</u> (X_t) <u>est indistinguable</u> (<u>pour la loi</u> P) <u>d'un processus optionnel</u>.

Ce résultat est établi en général sous les conditions habituelles, alors qu'il est vrai, comme le théorème de section et de projection, sans aucune hypothèse sur la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$.

PROJECTIONS DUALES

Soit μ une mesure bornée sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$, qui ne charge pas les ensembles évanescents, et commute avec la projection optionnelle que nous venons d'étudier (si X est un processus mesurable borné, Y sa projection optionnelle, on a $\mu(X)=\mu(Y)$). Alors μ peut s'écrire

$$\mu(X) = E[\int_{[0,\infty[} X_s dB_s]$$

où (B_t) est un processus croissant continu à droite construit de la manière suivante : pour tout r rationnel >0, soit B^1_r une densité de la mesure $A\longmapsto\mu([0,r]\times A)$ par rapport à P, densité que nous pouvons choisir $\underline{\underline{F}}_r$-mesurable du fait que μ commute avec la projection optionnelle. Puis soit $B^2_r = \sup B^1_s$, s parcourant l'ensemble des rationnels $\leqq r$. On pose enfin pour tout t réel $B_t=B^2_{t+}$, processus croissant continu à droite (non nul en 0 si μ charge $\{0\}\times\Omega$: on convient seulement que $B_{0-}=0$). Nous allons montrer que le processus croissant (B_t), qui a priori est seulement adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+})$, est <u>indistinguable d'un processus croissant optionnel</u>. Le raisonnement étant classique en théorie générale des processus, nous n'allons pas le détailler.

Nous commençons par choisir une suite de temps d'arrêt larges R_n, portant tous les sauts du processus (B_t). Quitte à décomposer chaque R_n à la manière du lemme 2, nous construisons deux suites $(R'_n),(R''_n)$, portant à elles deux tous les sauts de (B_t), et telles que

- les R'_n soient des temps d'arrêt stricts
- pour tout temps d'arrêt strict T, $P\{R''_n=T<\infty\}=0$ pour tout n

En utilisant le fait que μ commute avec la projection optionnelle, on montre alors que

- B ne charge aucun R''_n , de sorte que la suite R''_n est entièrement inutile,
- pour tout n, $B_{R'_n}$ (et donc aussi le saut $\Delta B_{R'_n}$) est égal p.s. à une v.a. $\underline{\underline{F}}_{R'_n}$-mesurable .

Soit (B^c_t) la partie continue du processus croissant (B_t) ; posons $T_n=R'_n$, et soit H_n une v.a. $\underline{\underline{F}}_{T_n}$ -mesurable positive égale p.s. à ΔB_{T_n} . Alors (B_t) est indistinguable du processus croissant optionnel

$$A_t = B^c_t + \sum_n H_n I_{\{t\geq T_n\}}$$

(On notera cependant que ce processus optionnel n'est pas <u>identiquement</u> continu à droite : pour des ω qui forment un ensemble P-négligeable, il peut exister un t fini tel que $A_t(\omega)<\infty$, $A_{t+}(\omega)=+\infty$; si l'on cherche à faire disparaître cet ensemble, on perd l'optionalité stricte).

REMARQUES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Le procédé de régularisation de martingales qui figure ici a une portée plus générale. Il est dû à Föllmer, <u>the exit measure of a supermartingale</u>, Z.f.W-theorie 21, 1972, p.154-166.

2. Le théorème de projection et de section de ce travail est, à une nuance près, un cas particulier du théorème général de projection figurant dans Dellacherie, <u>sur les théorèmes fondamentaux de la théorie générale des processus</u> , Séminaire de Prob. VII (L.N. n°321), 1973, p.28-47. Nous nous en sommes aperçus une fois l'article achevé !
Le lecteur décidera si, dans ces conditions, le titre de l'exposé est justifié. Le fait que nous le publions indique notre réponse à cette question.