SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHING-SUNG CHOU
PAUL-ANDRÉ MEYER

Sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques dans les processus ponctuels

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 226-236
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__226_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1973/74

SUR LA REPRESENTATION DES MARTINGALES COMME INTEGRALES STOCHASTIQUES DANS LES PROCESSUS PONCTUELS [1]

par CHOU Ching-Sung et P.A. MEYER

Il y a deux cas où l'on sait que toute martingale d'une famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$ peut se représenter comme intégrale stochastique par rapport à une martingale fondamentale (q_t) : celui de la famille de tribus naturelle du mouvement brownien (B_t) [où la martingale fondamentale est le mouvement brownien lui même] , et celui de la famille de tribus naturelle du processus de Poisson (P_t) [où la martingale fondamentale est le processus de Poisson compensé P_t-t] . Nous expliquerons à la fin de l'exposé pourquoi ces processus sont, parmi les processus à accroissements indépendants et stationnaires réels, les seuls à posséder cette propriété.

Nous allons étendre ce théorème de représentation dans une autre direction en considérant, non plus des processus à accroissements indépendants et stationnaires, mais des processus ponctuels. Plus précisément, nous allons étendre à cette situation un théorème récent de M.H.A. DAVIS, suivant lequel le théorème de représentation vaut en fait pour toute <u>martingale locale</u> .

1. LE CAS ELEMENTAIRE

Ce cas a déjà été étudié par DELLACHERIE [2]. Nous considérons un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ et une v.a. S <u>strictement</u> positive, mais pouvant prendre la valeur $+\infty$. Nous munissons Ω de la plus petite famille croissante de tribus $(\underline{\underline{F}}^o_t)$, continue à droite, pour laquelle S est un temps d'arrêt : un ensemble A appartient à $\underline{\underline{F}}^o_t$ si et seulement si

$$\left|\begin{array}{l} A\cap\{S\leq t\} \text{ est de la forme } S^{-1}(B), \text{ où B est borélien dans }]0,t] \\ A\cap\{S>t\} \text{ est ou bien vide, ou bien } \{S>t\} \text{ tout entier} \end{array}\right.$$

La caractéristique fondamentale de la situation est la <u>loi</u> de S, que <u>nous définirons</u> par sa fonction de répartition (ou "fonction de queue")

[1] Cet exposé avait été d'abord conçu comme une démonstration nouvelle du théorème de DAVIS sur le processus de Poisson. La contribution de CHOU Ching Sung est le passage du cas exponentiel au cas général, lorsque $c=+\infty$, $F(\infty-) = 0$.

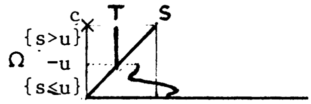
(1) $$F(t) = P\{S>t\}$$

fonction décroissante, continue à droite, telle que $F(0)=1$, $F(\infty)=0$ (mais $F(\infty-)$ peut être >0). <u>Nous notons</u> c <u>le plus petit</u> t <u>tel que</u> $F(t)=0$. Quitte à remplacer S par $S\wedge c$, qui lui est p.s. égale, nous pouvons supposer que S est partout majorée par c. Nous aurons à distinguer trois cas

i) $c=+\infty$, ii) $c<+\infty$, $F(c-)=0$, iii) $c<+\infty$, $F(c-)>0$

La nécessité d'une telle distinction mérite d'être notée dès maintenant : il existe un "changement de temps" simple - déterministe - qui ramène les problèmes sur $]0,c]$ à des problèmes sur $]0,\infty]$, mais la notion de martingale locale n'est pas invariante par changement de temps.

On se ramène très facilement à une situation canonique, dans laquelle il est possible de faire de petits dessins : Ω y est l'intervalle $]0,c]$, muni de la tribu borélienne et de la mesure $-dF$; S y est l'application identique de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Le graphe tracé dans le dessin ci-dessous représente, d'après DELLACHERIE [2], le modèle le plus général de temps d'arrêt T de la famille $(\underline{\underline{F}}^o_t)$.



S'il existe <u>un</u> ω tel que $T(\omega)=u<S(\omega)$, alors $T = u$ sur l'ensemble $\{S>u\}$ tout entier , et $T\geqq S$ sur l'ensemble $\{S\leqq u\}$.

Nous pouvons écrire explicitement <u>toutes</u> les martingales uniformément intégrables de la famille $(\underline{\underline{F}}^o_t)$, de la manière suivante : tout élément de $L^1(\underline{\underline{F}}^o_\infty)$ peut s'écrire $H\circ S$, où H est une fonction borélienne finie sur $]0, c]$ satisfaisant à

(2) $$\int -|H(u)|dF(u) < \infty$$

La martingale $E[H\circ S|\underline{\underline{F}}^o_t]$ s'écrit alors

(3) $$M^H_t = I_{\{t<S\}}\frac{1}{F(t)}\int_{]t,\,c]} -H(u)dF(u) + I_{\{t\geqq S\}}H\circ S$$

Parmi ces martingales, nous nous intéressons particulièrement à celles qui sont nulles à l'origine. La fonction H correspondante satisfait alors, outre (2), la condition

(4) $$\int H(u)dF(u) = 0$$

et la martingale (3) s'écrit alors

(5) $$\overline{M}^H_t = I_{\{t<S\}}\frac{1}{F(t)}\int_{]0,t]} H(u)dF(u) + I_{\{t\geqq S\}}H\circ S$$

Le processus ainsi défini a un sens pour des fonctions H qui ne satisfont pas à (2), mais seulement à

(6) $\quad$ pour tout $t<c$, $\int_{]0,t]} |H(u)|dF(u) < +\infty$

Alors le processus $(\overline{M}^H_t)$ donné par (6) est bien défini pour tout t fini, arrêté à l'instant S, continu à droite. On peut écrire autrement la formule (6) . Sur l'espace des fonctions H satisfaisant à (6), introduisons les opérateurs $\mathcal{E}_t$ ainsi définis : si $t\geq c$, $\mathcal{E}_tH=H$. Si $0<t<c$

(7) $\quad \mathcal{E}_tH(u) = H(u)$ pour $0<u\leq t$, $\mathcal{E}_tH(u)=\frac{1}{F(t)}\int_{]0,t]}H(u)dF(u)$ pour $u>t$

$\mathcal{E}_tH$ est, pour $t<c$, une fonction intégrable pour la mesure dF, d'intégrale nulle, constante sur l'intervalle $]t,\infty]$ et égale à H sur $]0,t]$. Cela la caractérise à une dF-équivalence près. On en déduit aussitôt que $\mathcal{E}_s\mathcal{E}_t=\mathcal{E}_{s\wedge t}$, et il est clair aussi que

(8) $\quad \overline{M}^H_t = \mathcal{E}_tH\circ S$.

Nous pouvons maintenant énoncer notre premier résultat sur la structure des martingales locales, qui est très voisin de résultats de DELLACHERIE [2].

PROPOSITION 1. a) *Toute martingale locale* (M_t) *telle que* $M_0=0$ *est une vraie martingale sur l'intervalle* $[0,c[$; (M_t) *est arrêtée à l'instant* S , *et on a p.s.* $M_S=M_{S-}$ *sur l'ensemble* $\{S=c\}$ *si* $c<\infty$.

b) *Dans les cas* i) *et* ii) , *toute martingale locale* (M_t) *telle que* $M_0=0$ *est de la forme* $(\overline{M}^H_t)$, *où* H *satisfait à* (6), *et inversement tout processus de cette forme est une martingale locale*. *Dans le cas* iii), *toute martingale locale* (M_t) *telle que* $M_0=0$ *est uniformément intégrable, et donc de la forme* $(\overline{M}^H_t)$, *où* H *satisfait à* (2) *et* (4), *et inversement* ...

DEMONSTRATION. a) Nous commençons par remarquer que toute martingale uniformément intégrable (M_t) nulle en 0 est de la forme $(\overline{M}^H_t)$, avec une fonction H satisfaisant à (2) et à (4). Une telle martingale est arrêtée à l'instant S. Supposons que l'ensemble $\{S=c\}$ ait une probabilité >0, et que $c<\infty$. On a pour tout ω tel que $S(\omega)=c$

$$\overline{M}^H_{c-}(\omega) = \frac{1}{F(c-)}\int_{]0,c[} H(u)dF(u) \ , \ \overline{M}^H_c(\omega) = H(c)$$

et ces quantités sont égales d'après (4).

Dire que (M_t) est une martingale locale revient à dire qu'il existe des temps d'arrêt finis T_n de la famille $(\underline{\underline{F}}^o_t)$ tels que $T_n(\omega)\uparrow+\infty$ p.s.

et que les processus $(M_{t\wedge T_n})$ soient des martingales uniformément intégrables [la définition usuelle concerne plutôt des temps d'arrêt de la famille complétée tendant vers $+\infty$ partout, mais c'est équivalent]. D'après ce qui vient d'être dit des martingales uniformément intégrables, (M_t) est arrêtée à l'instant S, et continue à l'instant S sur l'ensemble $\{S=c\}$ si $c<+\infty$, $F(c-)>0$.

S'il existe un n tel que $T_n \geqq S$ p.s., on a $M_t=M_{t\wedge T_n}$, donc (M_t) est une martingale uniformément intégrable. Supposons donc que l'on ait pour tout n $P\{T_n<S\} > 0$. Il existe alors une constante t_n telle que $T_n\wedge S = t_n \wedge S$; comme $P\{S>t_n\}>0$, on a $t_n \leqq c$, et on a nécessairement $t_n<c$ (sans quoi on aurait $T_n \geqq S$, ce qui vient d'être exclu). Comme $T_n \uparrow \infty$, on a $\lim_n P\{S>t_n\} = 0$, donc $t_n \uparrow c$. Comme (M_t) est arrêtée à l'instant S, on a $M_{t\wedge T_n} = M_{t\wedge t_n}$, et le processus $(M_t)_{t \leqq t_n}$ est une martingale uniformément intégrable. Donc (M_t) est une vraie martingale sur $[0,c[$. Les propriétés a) sont établies.

Pour établir b), nous distinguerons les trois cas, en commençant par le plus simple.

Cas iii) : $c<+\infty$, $F(c-)>0$. L'ensemble des ω tels que $S(\omega)=c$ a une mesure >0 . Le fait que $T_n \uparrow +\infty$ p.s. entraîne donc qu'il existe un ω tel que $S(\omega)=c$, $T_n(\omega)>c$. Un regard au petit dessin de la 2e page montre qu'alors $T_n \geqq S$ partout. Le processus $(M_{t\wedge T_n})=(M_t)$ est alors une martingale uniformément intégrable.

Cas ii) : $c<+\infty$, $F(c-)=0$. Tout est évident si (M_t) est une martingale uniformément intégrable. Si elle ne l'est pas, nous avons vu qu'on peut écrire $T_n\wedge S = t_n\wedge S$, où $t_n<c$, $t_n \uparrow t$, et les martingales $(M_{t\wedge t_n})$ sont uniformément intégrables. Ecrivons $M_{t_n} = H_n \circ S$; H_n est intégrable par rapport à dF, d'intégrale nulle, et la propriété de martingale entraîne que $H_n = \mathcal{E}_{t_n} H_{n+1}$ p.p.. Revenant au calcul des $\mathcal{E}_t$ on voit que $H_n=H_{n+1}$ dF-p.p. sur $]0,t_n]$. Il existe donc une fonction H sur $]0,c[$, finie, telle que $H=H_n$ dF-p.p. sur $]0,t_n]$ pour tout n. Comme $F(c-)=0$, H est définie dF-p.p. ; si nous voulons qu'elle soit définie partout, nous n'avons qu'à poser $H(c)=0$. Comme $H=H_n$ sur $]0,t_n]$, (6) est satisfaite, et on a $M_t=\overline{M}^H_t$ pour $t<c$. Comme on a $S<c$ p.s., et les deux processus sont arrêtés à l'instant S, on a $M_t=\overline{M}^H_t$ pour tout t.

Cas iii) : $c=+\infty$. Le raisonnement est le même, mais plus simple, car les t_n tendent vers $+\infty$. Si $F(\infty-)>0$, la fonction H n'est pas complètement déterminée dF-p.p. par le fait que $H=H_n$ sur $]0,t_n]$, mais nous pouvons attribuer n'importe quelle valeur à $H(\infty)$ sans changer $\overline{M}^H_t$ pour t fini.

Il ne reste donc plus qu'une chose à établir : le fait que si H satisfait à l'énoncé, $(\overline{M}_t^H)$ est effectivement une martingale locale. Dans le cas iii), il s'agit d'une martingale uniformément intégrable et tout est évident. Dans le cas i), il s'agit d'une vraie martingale, et c'est aussi clair. Reste le cas ii) . Nous prenons des $t_n<c$, $t_n \uparrow c$, et nous posons

$$T_n=t_n \text{ sur } \{t_n<S\} \text{ , } T_n = nc \text{ sur } \{t_n \geqq S\}$$

Les temps d'arrêt T_n tendent vers $+\infty$ p.s. du fait que $F(c-)=0$. D'autre part, le processus $(\overline{M}^H_{t\wedge t_n})=(\overline{M}^H_{t\wedge T_n})$ est une martingale uniformément intégrable, et il en résulte bien que $(\overline{M}_t^H)$ est une martingale locale.

REPRESENTATIONS COMME INTEGRALES STOCHASTIQUES

Nous introduisons la fonction sur $[0,c]$, croissante et continue à droite , nulle en 0

$$(9) \qquad \varphi(t) = \int_{]0,t]} \frac{-dF(u)}{F(u-)}$$

Si $F(c-)>0$ (que c soit fini ou non), on a $\varphi(c)<\infty$. Supposons que $F(c-)=0$, de sorte que nous pouvons nous placer sur $]0,c[$. On a $\varphi(c) =+\infty$, mais je dis que la mesure $d(\varphi F)$ sur $]0,c[$ est <u>bornée</u> et de <u>masse nulle</u> .

Nous remarquons d'abord que $\varphi(0)F(0)=0$, et $\lim\limits_{t\uparrow c} \varphi(t)F(t)=0$. En effet si $s<t$, $\varphi(t)-\varphi(s) \leqq \frac{F(s)-F(t)}{F(t)}$, donc $\varphi(t)F(t) \leqq \varphi(s)F(t)+F(s)$, d'où ce qu'on cherche en faisant tendre t vers c, puis s vers c.

Ensuite, nous remarquons que la mesure $-\varphi dF$ est bornée : en effet $\int_0^t -\varphi dF = \varphi(t)F(t)+\int_0^t F(s-)d\varphi(s) = \varphi(t)F(t)+1-F(t)$, et donc $-\varphi dF$ est une loi de probabilité. De même, $F(s-)d\varphi(s) = -dF(s)$ est une loi de probabilité. Donc $|d(\varphi(s)F(s))| \leqq -\varphi(s)dF(s)+ F(s-)d\varphi(s)$ est une mesure bornée de norme au plus 2 et de masse nulle .

Nous démontrons rapidement, d'après DELLACHERIE [2], le lemme suivant

LEMME 1. <u>Le compensateur prévisible</u>[1] <u>du processus croissant</u>

$$(10) \qquad N_t = I_{\{t\geqq S\}}$$

<u>est le processus croissant</u> $\hat{N}_t=\varphi(t\wedge S)$.

(Noter que ces deux processus peuvent charger $+\infty$).

1 c.à.d. l'unique processus croissant prévisible $\hat{N}_t$ tel que $N_t-\hat{N}_t$ soit une martingale.

Tout d'abord, le processus croissant $\varphi(t)$ est prévisible, puisqu'il ne dépend pas de ω , donc $(\hat{N}_t)$ est aussi prévisible par arrêt. Ensuite, nous avons $\hat{N}_\infty = \varphi(S)$

$$E[\hat{N}_\infty] = \int_{]0,c]} -\varphi(u)dF(u)$$

Nous distinguons deux cas : si $F(c-)>0$, nous savons que φ est finie sur $]0,c]$ et nous avons

$$\int_{]0,c]} -\varphi(u)dF(u) = F(0)\underbrace{\varphi(0)}_{=0}-\underbrace{F(c)}_{=0}\varphi(c) + \int_{]0,c]} F(u-)d\varphi(u)$$

Mais par définition $F(u-)d\varphi(u) = -dF(u)$, et en fin de compte l'intégrale est égale à 1. Si $F(c-)=0$, on remplace l'intégrale par $\int_{]0,c[}$, et on fait le même raisonnement sur $]0,t[$, $t<c$. On obtient le même résultat en utilisant le fait que $\varphi(t)F(t) \to 0$ lorsque $t\uparrow c$, vu au début.

Le processus croissant $(\hat{N}_t)$ est donc intégrable. On calcule alors par un raisonnement tout analogue $E[\hat{N}_\infty|\underline{\underline{F}}^o_t]-\hat{N}_t$, et l'on trouve que cela vaut $X_t=I_{\{t<S\}}$; c'est aussi le potentiel engendré par (N_t), et le lemme est établi.

DEFINITION. <u>La martingale</u> $q_t=N_t-\hat{N}_t$ <u>est appelée</u> martingale fondamentale.

Il est facile d'expliciter (q_t) :

(11) $\quad q_t(\omega) = -\varphi(t)$ si $t<S(\omega)$, $q_t(\omega) = -\varphi(S(\omega))+1$ si $t\geqq S(\omega)$

C'est en fait la martingale M^H_t ou $\overline{M}^H_t$ relative à la fonction $H(t)= 1-\varphi(t)$, qui satisfait à (2) et (4).

Voici le principal résultat de cette première partie . Il faut noter que les intégrales stochastiques intervenant dans cette représentation sont des intégrales de Stieltjes ordinaires de processus prévisibles <u>non localement bornés</u>, et n'entrent donc pas dans la théorie générale des intégrales stochastiques. Ce qui est là dessous, c'est que dans la théorie générale les " variations totales " sont " localement L^1 " et on ne peut donc intégrer que des êtres " localement L^∞ ", tandis qu'ici la " variation totale" est " localement bornée" et on peut intégrer des êtres " localement L^1 " - mais il s'agit là, bien sûr , de considérations heuristiques.

PROPOSITION 2 . <u>Soit</u> (M_t) <u>une martingale locale telle que</u> $M_0=0$. <u>Il existe un processus prévisible</u> (h_t) <u>tel que l'on ait pour tout t fini</u>

(12) $\quad \int_0^t |h_s||dq_s| < \infty$ <u>p.s.</u> , $M_t = \int_0^t h_s dq_s$ <u>p.s.</u> .

DEMONSTRATION. Le processus h_t que nous utiliserons sera en fait un processus <u>déterministe</u>, dépendant de t seulement et non de ω . Nous traiterons en détail l'un des trois cas, et brièvement les autres.

<u>Cas i)</u> : $c=+\infty$. Nous choisissons H telle que $M_t=\overline{M}_t^H$ et posons sur $]0,\infty[$

(13) $$h(t) = H(t)- \frac{1}{F(t)}\int_{]0,t]} H(u)dF(u).$$

Noter que (M_t) détermine H dF-p.p. sur $]0,\infty[$, puisque $M_S=H\circ S$; donc la fonction h est aussi déterminée dF-p.p.

Calculons d'abord $\overline{M}_t^H$ sur l'intervalle $[0,S(\omega)[$: nous pouvons écrire $\overline{M}_t^H = A_tB_t$, où $A_t=1/F(t)$, $B_t=\int_{]0,t]} H(u)dF(u)$. Appliquons la formule $d(A_tB_t) = B_tdA_t + A_{t-}dB_t$, il vient

$$d\overline{M}_t^H(\omega)= \frac{-dF(t)}{F(t)F(t-)}\int_{]0,t]} H(u)dF(u) + \frac{H(t)}{F(t-)} dF(t)$$

$$= -\left(-\int_{]0,t]} H(u)dF(u) + H(t) \right) d\varphi(t)$$

$$= -h(t)d\varphi(t) \quad = h(t)dq_t(\omega) \quad .$$

La fonction $F(t-)$ est bornée inférieurement sur tout intervalle compact, $|H|$ est localement intégrable pour la mesure $-dF$, il n'y a aucune difficulté à vérifier que $\int_0^t|h(u)|d\varphi(u) < \infty$ pour tout t fini. Cela s'écrit $\int_{]0,t\wedge S[}|h(s)||dq_s| < \infty$. A l'instant S, supposé fini, h est finie, et q présente un saut fini ; on a donc la même propriété sur l'intervalle $]0,t\wedge S]$. Mais dq est nulle sur $]S,\infty[$, et on a donc $\int_{]0,t]}|h_s||dq_s| < \infty$ pour tout t fini.

Nous avons vérifié que $M_t(\omega)=\overline{M}_t^H(\omega)= \int_{]0,t]}h_sdq_s(\omega)$ pour $t<S(\omega)$.

Les deux membres étant constants sur $]S(\omega),\infty[$, il nous suffit de vérifier qu'ils présentent le même saut à l'instant S. Posons $S(\omega)=t$ et calculons :

<u>Saut du premier membre</u>

$$H(t) - \overline{M}_{t-}^H(\omega) = H(t) - \frac{1}{F(t-)}\int_{]0,t[} H(u)dF(u)$$

$$= H(t)+ \frac{H(t)(F(t)-F(t-))}{F(t-)} - \frac{1}{F(t-)}\int_{]0,t]}H(u)dF(u)$$

$$= \frac{F(t)}{F(t-)}\left(H(t) - \frac{1}{F(t)}\int_{]0,t]}H(u)dF(u)\right)$$

<u>Saut du second membre</u> : il vaut $h(t)(q(t)-q(t-))$, soit

$$h(t)(1-\varphi(t)+\varphi(t-)) = \left(H(t)-\frac{1}{F(t)}\int_{]0,t]}H(u)dF(u)\right)\left(1+ \frac{F(t)-F(t-)}{F(t-)} \right)$$

et il y a bien égalité.

<u>Cas ii)</u> : $c<\infty$, $F(c-)=0$. Tous les calculs que nous avons faits sur $]0,S(\omega)]$ restent vrais du fait que $S(\omega)<c$. On a donc $\int_{]0,t\wedge S]} |h_s||dq_s| < \infty$, et on peut à nouveau remplacer $]0,t\wedge S]$ par $]0,t]$. De même, on a $M_t=\int_{]0,t]} h_s dq_s$ pour $t\leq S$, donc pour tout t puisque les deux membres sont des processus arrêtés à S. Il n'y a donc rien de nouveau.

<u>Cas iii)</u> : $c<\infty$, $F(c-)>0$. Comme $F(c-)>0$, la fonction $F(t-)$ est bornée inférieurement sur $[0,c]$, et H est intégrable par rapport à la mesure $-dF$. On peut alors vérifier directement que $\int_{]0,c]} |h(u)|d\varphi(u) < \infty$, et ainsi on a même $\int_{]0,\infty[} |h_s||dq_s| = \int_{]0,c]} |h_s||dq_s| < \infty$. Quant à l'égalité $M_t=\int_{]0,t]} h_s dq_s$, elle se vérifie sur $]0,S[$ comme plus haut, l'égalité des sauts se vérifie à l'instant S sur $\{S<c\}$ comme plus haut, et sur $\{S=c\}$ les deux membres ont un saut nul (prop.1). L'égalité sur $]0,S]$ s'étend à $]0,\infty[$ puisque les deux membres sont arrêtés à S.

GENERALISATIONS . 1) Sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, donnons nous une tribu $\underline{\underline{F}}_0^o$ et une variable aléatoire $S>0$, et désignons par $\underline{\underline{F}}_t^o$ la tribu engendrée par $\underline{\underline{F}}_0^o$ et les ensembles $S^{-1}(B)$, où B est borélien dans $[0,t]$. On a alors des résultats tout à fait analogues aux précédents : on introduit la fonction de répartition conditionnelle

$$F(.,t) = P\{S>t|\underline{\underline{F}}_0\}$$

la " martingale fondamentale"

$$q_t = I_{\{t\geq S\}}+\int_{]0,S\wedge t]} \frac{dF(.,s)}{F(.,s-)}$$

et toutes les martingales locales de cette famille sont des intégrales stochastiques par rapport à la martingale fondamentale. Les démonstrations sont les mêmes que ci-dessus, mais en conditionnant partout par $\underline{\underline{F}}_0$.

2) Sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ donnons nous une famille croissante $(\underline{\underline{F}}_t)$ de tribus, et deux temps d'arrêt U,V tels que $V\geq U$, et $V>U$ sur $\{U<\infty\}$. Introduisons la famille de tribus $\underline{\underline{G}}_t=\underline{\underline{F}}_{U+t}$, la v.a. $S=V-U$ qui est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{G}}_t)$ - avec la convention $\infty-\infty=\infty$ ici - et supposons que pour tout t $\underline{\underline{G}}_{t\wedge S}$ soit engendrée par $G_0=\underline{\underline{F}}_U$, et par les ensembles $\{S\in B\}$, où B est borélien dans $[0,t]$. La quantité à introduire ici est

$$F(.,t) = P\{S>t|\underline{\underline{F}}_U\}$$

Recherchons la compensatrice prévisible $\hat{N}_t$ du processus croissant $N_t=I_{\{t\geq V\}}$. Les ensembles prévisibles $]0,U]$ et $]V,\infty[$ étant dN-négligeables sont aussi $d\hat{N}$-négligeables, donc $\hat{N}_U=0$, et $\hat{N}_V=\hat{N}_\infty$. Il nous suffit donc de savoir calculer $\hat{N}_{(U+t)\wedge V}$ pour tout t, et cela se ramène à un calcul sur la famille $(\underline{\underline{G}}_{t\wedge S})$, qui est du type considéré en 1). On en déduit que si l'on pose

$$\varphi(.,t) = -\int_{]0,t]} \frac{dF'(.,s)}{F'(.,s-)}$$

on a $\hat{N}_t = 0$ si $t \leq U$, $\varphi(.,t-U(.))$ si $U<t\leq V$, et ensuite $\varphi(.,V(.)-U(.))$ pour $t \geq V$. Toutes les martingales locales de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, nulles sur $]0,U]$ et arrêtées à V, sont des intégrales stochastiques par rapport à la martingale fondamentale $(N_t-\hat{N}_t)$. Les démonstrations se ramènent très facilement à celles de 1).

2. LE CAS DES PROCESSUS PONCTUELS

Nous considérons maintenant un espace $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, et un processus ponctuel (N_t), c'est à dire un processus à valeurs dans $\mathbb{N}$, tel que $N_0=0$, dont les trajectoires sont croissantes et continues à droite, à sauts tous égaux à +1 . Nous désignerons par $(\underline{\underline{F}}^{\circ}_t)$ la famille de tribus naturelle du processus (N_t) : il est facile de vérifier qu'elle est continue à droite . Nous notons $T_1,T_2,\ldots$ les sauts successifs du processus (N_t), et nous posons

$$S_1=T_1 \ , \ S_n=T_n-T_{n-1} \text{ si } T_n<\infty \ , \ S_n=+\infty \text{ si } T_n=+\infty$$

La loi du processus est entièrement déterminée par les fonctions de répartition conditionnelles

(13) $\quad F_1(t)= P\{S_1>t\}$, $F_n(s_1,\ldots,s_{n-1};\, t) = P\{S_n>t\,|\,S_1=s_1,\ldots S_{n-1}=s_{n-1}\}$

ici, $s_1,\ldots,s_{n-1}$ sont des éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$, et nous décidons que si l'un d'entre eux vaut $+\infty$, la loi dF_n correspondante est concentrée en $+\infty$.

Nous introduisons d'autre part les fonctions croissantes et continues à droite

(14) $$\varphi_n(s_1,\ldots,s_{n-1} \ ; \ t) = \int_{]0,t]} \frac{-dF_n(s_1,\ldots,s_{n-1}\,;t\,)}{F_n(s_1,\ldots,s_{n-1};t-)}$$

et aussi

(15) $$\hat{N}_t = \varphi_1(S_1) + \varphi_2(S_1;S_2)+\ldots+\varphi_{n-1}(S_1\ldots,S_{n-2};S_{n-1}) + \varphi_n(S_1,\ldots,S_{n-1},t-T_n) \quad \text{sur } \{T_n\leq t<T_{n+1}\}$$

PROPOSITION 3. <u>Le processus</u> $(N_t-\hat{N}_t)=(q_t)$ <u>est une martingale locale</u>.

On l'appelle la martingale (locale) fondamentale.

PROPOSITION 4. <u>Pour toute martingale locale</u> (M_t) <u>de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$, <u>nulle en</u> 0, <u>il existe un processus prévisible</u> (h_t) <u>tel que l'on ait</u>

$\int_{]0,t]}|h_s||dq_s|<\infty$ <u>p.s. pour tout</u> t <u>fini</u> , $M_t=\int_{]0,t]} h_s dq_s$

DEMONSTRATION. Par arrêt à l'instant T_n, on se ramène au cas où le processus ponctuel a au plus n sauts. Le processus (N_t) est alors la somme des processus croissants $I_{\{t \geqq T_k\}}$, $k=1,\dots,n$, dont la compensatrice prévisible a été calculée plus haut, d'où le calcul de la martingale locale (ici martingale) fondamentale. Toute martingale locale se décompose en une somme finie de martingales, nulles sur $]0,T_{k-1}]$, arrêtées à T_k, et l'on a pour chacune d'elles une représentation comme intégrale stochastique d'après la généralisation 2).

APPENDICE : NOTE SUR LES PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS

Considérons un processus $(X_t)_{t \geqq 0}$, à accroissements indépendants et stationnaires, à trajectoires continues à droite, tel que $X_0=0$. Soit $(\underline{\underline{F}}_t)$ sa famille de tribus naturelle, rendue continue à droite et complétée. Nous allons montrer que si (X_t) n'est pas un mouvement brownien ou un processus de Poisson, alors il n'existe pas dans la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ de "martingale fondamentale" (q_t) telle que toute martingale de carré intégrable soit une intégrale stochastique de (q_t).

En effet, la mesure de Lévy du processus n'est pas réduite à une masse ponctuelle. Il existe donc deux intervalles compacts I_1 , I_2 disjoints, chargés tous deux par la mesure de Lévy. Donc il existe dans la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ deux martingales de carré intégrable et d'espérance nulle, les sommes compensées des sauts de (X_t) dont l'amplitude appartient à I_1 et I_2 , sans discontinuités communes. Nous les noterons (Y_t) et (Z_t) . Nous allons supposer que ce sont toutes deux des intégrales stochastiques par rapport à (q_t), et obtenir une contradiction.

L'une au moins des deux martingales (Y_t) et (Z_t) est purement discontinue . Supposons que ce soit le cas pour (Y_t), et notons A l'ensemble des t tels que $Y_t \neq Y_{t-}$. La formule $\Delta Y_s = y_s \Delta q_s$ montre que (q_t) saute sur A . La formule $\Delta Z_s = z_s \Delta q_s$ montre que $(z_t)=0$ sur A, et comme (Y_t) est purement discontinue, $E[\int_{\mathbb{R}} |z_s| d[Y,Y]_s] = 0$. Prenant une projection prévisible, il vient $E[\int |z_s| d\langle Y,Y\rangle_s]=0$. Mais $d\langle Y,Y\rangle_s = c.ds$, et $d\langle Z,Z\rangle_s = c'.ds$, donc cela entraîne $E[\int |z_s| d\langle Z,Z\rangle_s]=0$. Comme $d\langle Z,q\rangle_s$ est absolument continue par rapport à $d\langle Z,Z\rangle_s$, on a $E[\int z_s d\langle Z,q\rangle_s] = 0$. Or cela vaut $E[\int z_s^2 d\langle q,q\rangle_s]= E[\int d\langle Z,Z\rangle_s]$. Donc Z est nulle, ce qui est absurde.

BIBLIOGRAPHIE

[1]. M.H.A. DAVIS. Detection theory of Poisson processes. Preprint, preliminary version. Imperial College, London, 1973.

[2]. C.DELLACHERIE. Un exemple de la théorie générale des processus. Séminaire de Probabilités IV, Lecture Notes vol.124, 1970, p.60.

Sur les questions traitées dans le petit appendice, il faut rappeler l'existence d'un intéressant article (ancien) d'ITO : <u>the spectral type of a process with independent increments</u> , dont la référence me manque.

Enfin, une partie des résultats présentés ici ont quelque relation avec la théorie des processus ponctuels sous la forme de

[3]. F. PAPANGELOU. Integrability of expected increments of point processes and a related random change of scale. Tr. Amer. M. Soc. 165, 1972, p. 483-506.