Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Ching Sung Chou

Les inégalités des surmartingales d'après A.M. Garsia

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 206-212

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__206_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1972/73

LES INEGALITES DES SURMARTINGALES D'APRES A.M. GARSIA

par CHOU Ching-Sung

Dans cet exposé, principalement, on va donner une inégalité de Garsia qui englobe plusieurs inégalités dans les surmartingales, qu'on peut trouver dans le livre de P.A. MEYER, "Martingales and Stochastic Integrals I", comme l'inégalité $E(A_\infty^p) \le c\,p\,E(A_\infty^{p-1})$, l'inégalité de B-D-G, et les autres.

Tout d'abord. nous donnerons quelques notations.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ un espace probabilisé complet, $\{\mathcal{F}_n\}$ une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F} = \bigvee_n \mathcal{F}_n$, et $\{X_n\}_{n\ge 0}$ un potentiel. Par la décomposition de Doob, on a

$$X_n = E(A_\infty|\mathcal{F}_n) - A_n \ , \quad M_n = E(A_\infty \mathcal{F}_n)$$

où $A_n = \sum_{i=1}^n (X_{i-1} - E(X_i|\mathcal{F}_{i-1}))$ et $A_0 = 0$.

Soit φ une fonction croissante de R_+ dans R_+, posons

$$\Phi(u) = \int_0^u \varphi(s)\,ds \qquad (*)$$

alors $\Phi(u)$ est une fonction convexe croissante de R_+ dans R_+ telle que $\Phi(0) = 0$.

THEOREME (Garsia). - <u>Supposons que le potentiel $\{X_n\}$ soit majoré par une martingale $\{Y_n = E(Y|\mathcal{F}_n)\}$, où Y est une variable aléatoire réelle positive. Alors</u>

$$E(\Phi(A_\infty)) \le E(\varphi(A_\infty)Y) \ .$$

La démonstration de ce théorème sera faite après le théorème 2, tout de suite nous allons voir quelques applications de ce théorème.

THEOREME 1. - Soit un potentiel $\{X_n\}$ dominé par une constante c, alors, pour tout $p \geq 1$, on a

$$E(A_\infty^p) \leq c\,p\,E(A_\infty^{p-1}) \quad ,$$

et

$$E(e^{A_\infty}) \leq \frac{1}{1-c} \qquad \text{pour } c<1 \; .$$

Démonstration. - Posons $\varphi(s) = s^{p-1}$ $(p \geq 1)$ dans $(*)$, donc $\Phi(s) = \frac{s^p}{p}$, et puisque le potentiel $\{X_n\}$ est dominé par une constante c, nous pouvons prendre $Y = c$ dans le théorème de Garcia, alors, on a

$$\frac{1}{p} E(A_\infty^p) \leq c \; E(A_\infty^{p-1})$$

donc

$$E(A_\infty^p) \leq p\,c\,E(A_\infty^{p-1}) \; .$$

Si nous posons $\varphi(s) = e^s$, alors $\Phi(s) = e^s - 1$, et

$$E(e^{A_\infty} - 1) \leq c \; E(e^{A_\infty})$$

donc

$$E(e^{A_\infty}) \leq \frac{1}{1-c} \qquad \text{pour } c<1 \; .$$

THEOREME 2. - Soient un potentiel $\{X_n\}$ engendré par le processus croissant prévisible $\{A_n\}$, et $\{B_n\}$ un autre processus croissant (non nécessairement adapté) tel que

$$X_n = E(B_\infty - B_n | \mathcal{F}_n)$$

où $B_\infty \in L^1$. Alors, on a

$$\int_{\{A_\infty > \lambda\}} (A_\infty - \lambda)\, dp \leq \int_{\{A_\infty > \lambda\}} X^*\, dp \quad , \quad X^* = \sup_n X_n \quad ,$$

et

$$\int_{\{A_\infty > \lambda\}} (A_\infty - \lambda)\, dp \le \int_{\{A_\infty > \lambda\}} B_\infty\, dp \quad .$$

Démonstration. - Si nous posons

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1 & s \ge \lambda \\ 0 & s < \lambda \end{cases} ,$$

et $Y = X^*$ ou B_∞ , d'après le théorème de Garsia, on déduit immédiatement les résultats.

Maintenant on va démontrer le théorème de Garsia.

Démonstration. - Comme

$$\begin{aligned}
\Phi(A_\infty) = \int_0^{A_\infty} \varphi(s)ds &\le \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)(A_i - A_{i-1}) \\
&= \varphi(A_1)A_1 + (\varphi(A_1) + [\varphi(A_2) - \varphi(A_1)])\ (A_2 - A_1) + \\
&\quad (\varphi(A_1) + [\varphi(A_2) - \varphi(A_1)] + [\varphi(A_3) - \varphi(A_2)])\ (A_3 - A_2) + \dots \\
&= \varphi(A_1)\ (A_1 + A_2 - A_1 + A_3 - A_2 + \dots) \\
&\quad + [\varphi(A_2) - \varphi(A_1)]\ (A_2 - A_1 + A_3 - A_2 + \dots) \\
&\quad + [\varphi(A_3) - \varphi(A_2)]\ (A_3 - A_2 + A_4 - A_3 + \dots) \\
&= \varphi(A_1)A_\infty + [\varphi(A_2) - \varphi(A_1)]\ (A_\infty - A_1) + [\varphi(A_3) - \varphi(A_2)] \\
&\quad (A_\infty - A_2) + \dots
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
E(\Phi(A_\infty)) &\le E(E(\varphi(A_1)(A_\infty - A_0)|\mathcal{F}_0)) + E(E(\varphi(A_2) - \varphi(A_1))(A_\infty - A_1)|\mathcal{F}_1)) \\
&\quad + E(E((\varphi(A_3) - \varphi(A_2))(A_\infty - A_2)|\mathcal{F}_2)) + \dots \\
&= E(\varphi(A_1)\ E(A_\infty - A_0|\mathcal{F}_0)) + E((\varphi(A_2) - \varphi(A_1))\ E(A_\infty - A_1|\mathcal{F}_1)) \\
&\quad + E((\varphi(A_3) - \varphi(A_2))\ E(A_\infty - A_2|\mathcal{F}_2)) + \dots \\
&= E(\varphi(A_1)X_0 + (\varphi(A_2) - \varphi(A_1))X_1 + (\varphi(A_3) - \varphi(A_2))X_2 + \dots) \\
&\le E(\varphi(A_1)Y_0 + (\varphi(A_2) - \varphi(A_1))Y_1 + (\varphi(A_3) - \varphi(A_2))Y_2 + \dots) \\
&\le E([\varphi(A_1) + \varphi(A_2) - \varphi(A_1) + \varphi(A_3) - \varphi(A_2) + \dots]Y) \\
&= E(\varphi(A_\infty)Y) .
\end{aligned}$$

Signaler que le résultat reste vrai pour une surmartingale positive qui n'est pas un potentiel, en remplaçant A_∞ par $\lim_n A_n + X_\infty$.

Avant de donner la démonstration du théorème de Burkholder - Davis-Gundy, on va étudier d'abord quelques inégalités dont on aura besoin.

Reprenons la fonction $\Phi(u) = \int_0^u \varphi(s)\,ds$ et supposons, pour simplifier, φ continue et strictement croissante. On peut associer à Φ une fonction Ψ , qui est également convexe croissante, la conjuguée de Φ au sens de Young, définie par

$$\Psi(v) = \int_0^v \psi(t)\,dt$$

où φ et ψ sont inverses l'une de l'autre. Alors, on a les inégalités suivantes :

1) $uv \leq \Phi(u) + \Psi(v)$ (l'inégalité de Young)

2) $\Phi(\frac{u}{\lambda}) \leq \frac{1}{\lambda}\,\Phi(u)$ $\quad \forall\, \lambda \geq 1$.

Si la fonction Φ vérifie la condition de la croissance modérée, i.e.

$$\Phi(2u) \leq c\,\Phi(u) \quad ,$$

posons

$$p = \sup_{u>0} \frac{u\,\varphi(u)}{\Phi(u)} \quad ,$$

on a

3) $1 < p \leq c-1 < \infty$,

et

4) $\Phi(\rho u) \leq \rho^p\,\Phi(u)$ $\quad \forall\, \rho > 1$

5) $\Psi(v) \leq (p-1)\,\Phi(\psi(v))$.

<u>Démonstration</u>.

1) C'est bien connu.

2) $\Phi(\frac{1}{\lambda}u + (1-\frac{1}{\lambda})v) \leq \frac{1}{\lambda}\,\Phi(u) + (1-\frac{1}{\lambda})\,\Phi(v)$,

posons $v = 0$, $\Phi(v) = \Phi(0) = 0$, alors

$$\Phi(\frac{1}{\lambda} u) \le \frac{1}{\lambda} \Phi(u) .$$

3) $\varphi(u) \le \frac{1}{u} \int_u^{2u} \varphi(s)\, ds$

$u\varphi(u) \le \Phi(2u) - \Phi(u) \le c\,\Phi(u) - \Phi(u) = (c-1)\,\Phi(u)$

$$\frac{u\varphi(u)}{\Phi(u)} \le c-1 \quad ,$$

donc

$$p = \sup_{u>0} \frac{u\varphi(u)}{\Phi(u)} \le c-1 < \infty \quad .$$

On sait que

$$u\varphi(u) = \Phi(u) + \Psi(\varphi(u))$$

alors

$$p \ge \frac{u\varphi(u)}{\Phi(u)} = \frac{\Phi(u) + \Psi(\varphi(u))}{\Phi(u)} > 1 \quad .$$

4) Puisque

$$p = \sup_u \frac{u\varphi(u)}{\Phi(u)} \quad , \quad \frac{u\varphi(u)}{\Phi(u)} < p$$

$$\int_u^{\rho u} \frac{d\,\Phi(s)}{\Phi(s)} = \int_u^{\rho u} \frac{\varphi(s)}{\Phi(s)}\, ds < p \int_u^{\rho u} \frac{ds}{s}$$

$$\log \frac{\Phi(\rho u)}{\Phi(u)} < p \log \frac{\rho u}{u} = p \log \rho = \log \rho^p$$

$$\frac{\Phi(\rho u)}{\Phi(u)} < \rho^p$$

donc

$$\Phi(\rho u) \le \rho^p\, \Phi(u) .$$

5) Comme $\int_0^v [\psi(t)\, dt + t\, d\psi(t)] = v\,\psi(v)$,

on a

$$\Psi(v) + \Phi(\psi,v)) = v\,\psi(v)$$

$$\Psi(v) = v\,\psi(v) - \Phi(\psi(v)) \qquad \Delta$$

et puisque

$$\frac{u\varphi(u)}{\Phi(u)} \leq p$$

posons

$$u = \psi(v) \ ,$$

on a

$$\frac{\psi(v)\,\varphi(\psi(v))}{\Phi(\psi(v))} \leq p$$

i.e.

$$\frac{v\psi(v)}{\Phi(\psi(v))} \leq p$$

ou

$$v\psi(v) \leq p\,\Phi(\psi(v)) \ .$$

D'après Δ , on a

$$\dot{\Psi}(v) \leq p\,\Phi(\psi(v)) - \Phi(\psi(v)) = (p-1)\,\Phi(\psi(v)) \ .$$

On est prêt à démontrer le théorème de Burkholder - Davis - Gundy.

THEOREME 3. - <u>Soient</u> $\{B_n\}$ <u>un processus croissant (non nécessairement adapté) avec</u> $B_\infty \in L^1$, <u>et</u> $\{A_n\}$ <u>un processus croissant prévisible associé à</u> $\{B_n\}$:

$$A_o = 0 = B_o \ , \ A_{n+1} - A_n = E(B_{n+1} - B_n | \mathcal{F}_n) \ ,$$

alors

$$E(\Phi(A_\infty)) \leq p^{p+1}\, E(\Phi(B_\infty))$$

où Φ est une fonction convexe croissante sur R_+ qui satisfait à la condition de "croissance modérée" .

<u>Démonstration</u>. - Si nous prenons $Y = B_\infty$ dans le théorème de Garsia, on a

$$E(\Phi(A_\infty)) \leq E(B_\infty\, \varphi(A_\infty)) \ ,$$

et d'après l'inégalité de Young,

$$B_\infty\, \varphi(A_\infty) \leq \Phi(p B_\infty) + \Psi\left(\frac{\varphi(A_\infty)}{p}\right)$$

où $\Phi(p B_\infty) \leq p^p\, \Phi(B_\infty)$, et

$$\Psi\left(\frac{\varphi(A_\infty)}{p}\right) \leq \frac{1}{p}\, \Psi(\varphi(A_\infty)) = \frac{p-1}{p}\, \Phi(A_\infty) \quad ,$$

donc

$$E(B_\infty \varphi(A_\infty)) \leq p^p\, E(\Phi(B_\infty)) + \frac{p-1}{p}\, E(\Phi(A_\infty))$$

par suite

$$\left(1 - \frac{p-1}{p}\right) E(\Phi(A_\infty)) \leq p^p\, E(\Phi(B_\infty))$$

i.e.

$$E(\Phi(A_\infty)) \leq p^{p+1}\, E(\Phi(B_\infty)) \quad .$$

En signalant que le théorème ci-dessous peut être démontré de la même façon que le théorème précédent.

THEOREME 4. - Si $\{X_n\}$ est un potentiel, Φ vérifie les mêmes hypothèses que celles dans le théorème 3, alors

$$E(\Phi(A_\infty)) \leq p^{p+1}\, E(\Phi(X^*)) \quad , \qquad X^* = \sup_n X_n \quad .$$