

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

GABRIEL MOKOBODZKI

Pseudo-quotient de deux mesures, application à la dualité

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 318-321

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__318_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PSEUDO-QUOTIENT DE DEUX MESURES
APPLICATION A LA DUALITE

G. MOKOBODZKI

Ce texte est la fin de l'exposé de l'an dernier, portant le même titre, p. 173-176 du volume VI, qui n'avait pas été insérée dans le volume VI par suite d'une erreur.

RESULTATS COMPLEMENTAIRES

Si $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+(\partial X)$, on désignera par $D(\frac{\nu}{\mu})$ une fonction numérique quelconque telle que $\varphi \leq D(\frac{\nu}{\mu}) \leq \psi$ où φ et ψ sont définies comme précédemment.

En particulier $D(\frac{\nu}{\mu})$ est $(\mu+\nu)$ -mesurable.

PRINCIPE DE DOMINATION.

Si $D(\frac{\nu}{\mu}) \leq 1$ ν -presque partout, alors $\nu \prec \mu$.

Démonstration : On a $\{\varphi \leq 1\} = \bigcap_{\lambda > 1} F_\lambda$ et $\nu^{\lambda} = \nu \prec \lambda \mu$ pour tout $\lambda > 1$.

COROLLAIRE.- Si $\nu, \nu' \in \mathcal{M}^+(\partial X)$ et $\nu, \nu' \prec k \mu$, $k > 0$, alors $D(\frac{\nu}{\mu}) \leq D(\frac{\nu'}{\mu})$

ν -presque partout entraîne que $\nu \prec \nu'$.

POTENTIELS ET MESURES REGULIERES.

On dit que $u \in \mathcal{S}$ est régulier si pour toute famille filtrante croissante $(u_\alpha) \subset \mathcal{S}$, telle que $u = \sup u_\alpha$, alors $\inf R(u - u_\alpha) = 0$ (sauf sur un ensemble polaire).

THEOREME.- Pour que $u \in \mathcal{S}$ soit régulier, il faut et il suffit que $u = \sum_n u_n$ où
 $u_n \in \mathcal{S} \cap C^+(X)$.

Il existe alors un noyau U subordonné à $\mathcal{S}$ et un seul tel que $U1 = u$
 $(U = \sum U_n \text{ où } U_n \text{ est associé à } u_n)$.

THEOREME.- Pour $v, \mu \in \mathcal{M}^+(\partial X)$, il existe une mesure et une seule $\sigma \in \mathcal{M}^+(\partial X)$
telle que $\langle \sigma, Vf \rangle = \sup \{ \langle v - \mu, p \rangle, p \in \mathcal{S}, p \leq Vf \}$ pour toute $f \in C^+(X)$.

On peut alors poser $\sigma = R(v - \mu) = \inf \{ \theta \in \mathcal{M}^+(\partial X) ; \theta \preceq v - \mu \}$, enveloppe inférieure pour l'ordre du balayage défini par $\mathcal{S}$.

THEOREME.- Le couple $(\mathcal{M}^+(\partial X), \preceq)$ est un cône de potentiels, c'est-à-dire que si
si $\mu, v \in \mathcal{M}^+(\partial X)$, on a $R(v - \mu) \in \mathcal{M}^+(\partial X)$ et $R(v - \mu) \leq v$.

DEFINITION.- On dit que $v \in \mathcal{M}^+(\partial X)$ est régulière si pour toute famille
 $(v_\alpha) \subset \mathcal{M}^+(\partial X)$, filtrante croissante pour l'ordre $\preceq$ et telle que $v = \sup_{\preceq} v_\alpha$,
on a $\inf_{\preceq} R(v - v_\alpha) = 0$.

PROPOSITION.- Pour que $\mu \in \mathcal{M}^+(\partial X)$ soit régulière, il faut et il suffit que μ
ne charge pas les ensembles semi-polaires de ∂X .

DEFINITION.- On dit que v est dominée par θ ($v \in d(\theta)$) si pour toute famille
filtrante décroissante (v_α) pour l'ordre $\leq$, telle que $v_\alpha \leq v$ et $\inf v_\alpha = 0$,
alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe α tel que $v_\alpha \preceq \epsilon \theta$.

LEMME.- Pour toute mesure régulière v , il existe une mesure régulière θ , de
la forme $\theta = \sum v_n$, $v_n \leq v$ telle que $v \in d(\theta)$, $v_n \in d(v)$ et $\int v dv_n < +\infty$
 $\forall v \in \mathcal{S}$.

Propriétés des mesures régulières.

1) L'ensemble des mesures régulières est un sous-cône convexe héréditaire de $\mathcal{M}^+(\partial X)$ que l'on notera $\mathcal{S}_r^*$.

2) Soit $\mu \in \mathcal{M}^+(\partial X)$ telle que $(u \in \mathcal{S} \text{ et } \int u d\mu = 0) \Rightarrow (u = 0)$ alors
 pour toute $v \in \mathcal{S}_r^*$ telle que $\int v dv < +\infty$ $\forall v \in \mathcal{S}$, il existe $k > 0$ tel que
 $v \preceq k\mu$.

3) Il existe une suite (μ_n) de mesures régulières, stable par ad-

dition, de base V , telle que a) la famille μ_n est filtrante croissante pour l'ordre $\prec$ et pour toute mesure régulière ν on a $\nu = \sup_{\prec} \{\mu_n; \mu_n \prec \nu\}$

b) pour toute μ_n , il existe μ_m telle que $\mu_n \in d(\mu_m)$

c) $\int \nu d\mu_n < +\infty \quad \forall \nu \in \mathcal{S}.$

Désignons par $\mathcal{S}_0^* = \{\nu \in \mathcal{S}_r^*; \text{il existe } \mu_n, \nu \prec \mu_n\}.$

THEOREME.- Pour toute forme linéaire T sur $(\mathcal{S}_0^* - \mathcal{S}_0^*)$ croissante pour l'ordre $\prec$ il existe une fonction excessive et une seule $u \in \mathcal{S}$, telle que
 $\langle T, \nu \rangle = \int u d\nu \quad \forall \nu \in \mathcal{S}_0^*.$

De ce théorème, il résulte que $\mathcal{S}$ est faiblement complet métrisable pour la topologie $\sigma(\mathcal{S}, \mathcal{S}_0^*)$ et qu'on peut appliquer le théorème de représentation intégrale de Choquet.

PROPOSITION.- Soit $\mu_0 \in \mathcal{M}^+(\partial X)$ telle que V soit de base μ_0 . Il existe alors un ensemble borélien $A \subset \partial X$ tel que $\int_A$ soit μ_0 -polaire (donc polaire) et telle que pour toute $\nu \in \mathcal{S}_0^*$, $D(\frac{\nu}{\mu_0})$ soit finement continue en tout point de A , donc bien définie en tout point de A .

On suppose A fixé ainsi que μ_0 et que μ_0 est de base V .

COROLLAIRE.- Pour toute $\nu \in \mathcal{S}_0^*$, l'application $f \mapsto 1_A \cdot D(\frac{f \cdot \nu}{\mu_0})$ est un noyau compact de base ν transformant fonction boréliennes bornées en fonctions boréliennes bornées et satisfaisant au principe complet du maximum.

(Rappelons que toute $\nu \in \mathcal{S}_r^*$ s'écrit $\nu = \sum_n \nu_n$, $\nu_n \in \mathcal{S}_0^*$).

COROLLAIRE.- Il existe $\mu_1 \leq \mu_0$, μ_0 de base μ_1 telle que le noyau

$T : f \mapsto 1_A \cdot D(\frac{f \cdot \mu_1}{\mu_0})$ soit compact, satisfasse au principe complet du maximum.

On peut donc définir un cône de fonctions T -excessives Γ et définir une frontière $\partial^* X$, associée à T et portant le noyau T , par la relation

$$(y \in \partial^* X) \Leftrightarrow (\forall u, v \in \Gamma \quad \inf u, v(y) = [\inf(u, v)](y))$$

PROPOSITION 1.- 1) L'ensemble $\partial^* X$ est borélien et porte toute mesure régulière. (On a pris $\partial^* X \subset \partial X$).

2) Pour tout $y \in \partial^* X$, il existe une fonction excessive extrémale et une seule $G_y \in \mathcal{S}$ telle que, pour toute $f \in B^+$

$$Tf(y) = \int G_y(x) f(x) d\mu_1(x).$$

Si l'on pose $G(x, y) = G_y(x)$ pour $y \in \partial^* X$, $x \in X$, alors l'application G est mesurable sur $\partial^* X \times X$.

3) Pour que $u \in \mathcal{S}$ soit régulier, il faut et il suffit qu'il existe une mesure régulière ν sur ∂X , telle que $u(x) = G_\nu(x) = \int G(x, y) d\nu(y)$.