PAUL-ANDRÉ MEYER

Sur les désintégrations régulières de L. Schwartz

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 217-222
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__217_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1971-72

SUR LES DESINTEGRATIONS REGULIERES DE L.SCHWARTZ

P.A. Meyer

Je me propose de présenter ici l'un des résultats importants du mémoire de L.SCHWARTZ <u>Surmartingales régulières à valeurs mesures et désintégrations régulières d'une mesure</u>. Il me semble que ce théorème est beaucoup plus facile à comprendre si l'on fait appel à la notion de projection bien-mesurable d'un processus mesurable.

NOTATIONS

G est un espace polonais, et Ω est l'ensemble de toutes les applications ω de $\mathbb{R}_+$ dans G, qui sont continues à droite et pourvues de limites à gauche (càdlàg). Nous posons $\xi_t(\omega)=\omega(t)$, et nous munissons Ω des tribus

$$\underline{\underline{F}}^\circ = \underline{\underline{T}}(\xi_s\ ,\ s\in\mathbb{R}_+)$$

$$\underline{\underline{F}}^\circ_t = \underline{\underline{T}}(\xi_s\ ,\ s\leq t\ )$$

Nous désignons par P une loi de probabilité sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ)$, par $\underline{\underline{F}}$ la tribu complétée de $\underline{\underline{F}}^\circ$ pour P, par $\underline{\underline{F}}_t$ la tribu obtenue en adjoignant à $\underline{\underline{F}}^\circ_{t+}$ tous les ensembles de mesure nulle de $\underline{\underline{F}}$.

Nous ne faisons aucune différence entre un processus (i.e. une famille $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de v.a. sur Ω) et la fonction $(t,\omega)\longmapsto X_t(\omega)$ qui lui correspond sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$: nous passerons d'un point de vue à l'autre sans même le dire. Rappelons qu'une partie de $\mathbb{R}_+\times\Omega$ est dite <u>évanescente</u> si sa projection sur Ω est P-négligeable, et que deux processus qui ne diffèrent que sur un ensemble évanescent sont dits <u>indistinguables</u>.

Nous notons $\underline{\underline{M}}$ la tribu produit $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}^\circ$ sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$, et $\underline{\underline{b}}$ la tribu <u>bien-mesurable</u> sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$: elle est engendrée (sans aucune complétion) par les processus (X_t), adaptés à la famille $(\underline{\underline{F}}^\circ_{t+})$ et à trajectoires càdlàg. Les processus bien-mesurables (resp. mesurables) au sens usuel sont les processus indistinguables de processus $\underline{\underline{b}}$-mesurables (resp. $\underline{\underline{M}}$-mesurables).

Rappelons l'un des théorèmes importants de la théorie générale des processus : le <u>théorème de projection bien-mesurable</u> :

THEOREME 1. <u>Etant donné un processus</u> $\underline{\underline{M}}$-<u>mesurable réel borné</u> X, <u>il existe un processus</u> $\underline{\underline{b}}$-<u>mesurable borné</u> Y <u>tel que l'on ait</u>

(1) $\qquad Y_T = E[X_T | \underline{\underline{F}}^o_{T+}]$ <u>p.s. pour tout temps d'arrêt borné</u> T <u>de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$

Y <u>est défini à un processus évanescent près</u> . <u>On l'appelle la projection bien-mesurable de</u> X.

Nous noterons $\overline{X}$ la classe de processus indistinguables, $\underline{\underline{b}}$-mesurables, possédant la propriété (1). Nous nous proposons, d'après SCHWARTZ, de construire un bon noyau markovien N tel que $NX \in \overline{X}$ pour tout processus mesurable borné X .

CONSTRUCTION DU NOYAU DE PROJECTION

L'ensemble Ω se plonge de manière évidente dans l'ensemble produit G^Q , qui peut être muni d'une topologie d'espace polonais. Il n'est pas difficile (cf. [1], p.100) de voir que Ω est borélien dans G^Q , et que $\underline{\underline{F}}^o$ est alors sa tribu borélienne. Ainsi, l'espace mesurable $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$ est celui d'un espace lusinien métrisable.

Une conséquence qui nous servira dans la suite : il existe un noyau markovien h de $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o_+)$ dans $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$, tel que l'on ait pour toute v.a. X sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$, positive ou bornée

(2) $\qquad \int h(.,d\omega')X(\omega') = E[X|\underline{\underline{F}}^o_+]$ p.s.

C'est un résultat classique : nous allons en fait en reprendre la démonstration pour établir l'existence du noyau de projection. Puis nous améliorerons ce noyau .

PROPOSITION 1. <u>Il existe un noyau markovien</u> N <u>de</u> $(\mathbb{R}_+\times\Omega,\underline{\underline{b}})$ <u>dans</u> $(\mathbb{R}_+\times\Omega,\underline{\underline{M}})$ <u>tel que l'on ait</u> $NX \in \overline{X}$ <u>pour tout processus mesurable réel borné</u> X .

DEMONSTRATION. Nous pouvons identifier $(\mathbb{R}_+\times\Omega,\underline{\underline{M}})$ à un sous-ensemble borélien d'un espace compact métrisable E, muni de sa tribu borélienne. Choisissons un sous-ensemble dénombrable dense D dans $\underline{\underline{C}}(E)$, qui soit un espace vectoriel sur Q, contienne la fonction 1, et soit $\wedge$-stable. Pour toute fonction $f \in D$, choisissons arbitrairement un processus $\underline{\underline{b}}$-mesurable Y(f), appartenant à la classe $\overline{f_{|\mathbb{R}_+\times\Omega}}$ de la restriction de f à

$\mathbb{R}_+\times\Omega$. Soit U l'ensemble des points (t,ω) où

$Y(1)=1$

$Y(af+bg)=aY(f)+bY(g)$ (a,b rationnels, $f,g \in D$)

$Y(f) \geq 0$ pour toute $f\in D$ positive

Comme D est dénombrable, U est $\underline{\underline{b}}$-mesurable et U^c est évanescent. L'application $f \mapsto Y(f)|_U$ se prolonge de D à $\underline{\underline{C}}(E)$ par continuité, et de $\underline{\underline{C}}(E)$ aux fonctions boréliennes bornées en un noyau markovien N^1 de U dans E, que nous prolongerons par 0 hors de U. Un argument de classe monotone montre alors que

Si f est borélienne bornée sur E, la fonction $N^1 f$ est une projection $\underline{\underline{b}}$-mesurable du processus $f|_{\mathbb{R}_+\times\Omega}$.

Appliquons cela à la fonction borélienne f, indicatrice de $(\mathbb{R}_+\times\Omega)^c$ dans E , il vient que le processus $N^1 f$ est évanescent. Soit V l'ensemble $\{(t,\omega) : N^1((t,\omega),f)=0\}$. Si nous remplaçons N^1 par 0 hors de V, nous obtenons un noyau N^2 dont toutes les mesures sont portées par $\mathbb{R}_+\times\Omega$. Nous pouvons donc oublier E, et considérer N^2 comme un noyau de $(\mathbb{R}_+\times\Omega,\underline{\underline{b}})$ dans $(\mathbb{R}_+\times\Omega,\underline{\underline{M}})$. N^2 satisfait à toutes les propriétés exigées, sauf celle d'être markovien.

Nous le rendons markovien de la manière suivante : si X est un processus mesurable et borné, nous posons

$$\int N(t,\omega\ ,\ dt',d\omega')X_{t'}(\omega') = \int N^2(t,\omega\ ,dt',d\omega')X_{t'}(\omega')$$

si $\omega\in U\cap V$, et sinon

$$\int N(t,\omega\ ,\ dt',d\omega')X_{t'}(\omega') = \int h(\omega,d\omega')X_t(\omega')$$

où h est l'opérateur d'espérance conditionnelle par rapport à $\underline{\underline{F}}^o_{t+}$ choisi plus haut. On a bien alors $N1=1$.

LEMME. <u>Soit une fonction bornée</u> $X((t,\omega),(t',\omega'))$, <u>mesurable sur l'espace</u> $((\mathbb{R}_+\times\Omega)\times(\mathbb{R}_+\times\Omega),\underline{\underline{b}}\times\underline{\underline{M}})$. <u>Alors la fonction</u>

$$(t,\omega) \longmapsto \int N(t,\omega\ ,\ dt',d\omega')X(t,\omega\ ,t',\omega')$$

<u>est</u> $\underline{\underline{b}}$<u>-mesurable</u> , <u>et c'est une projection bien-mesurable du processus</u> $(t,\omega)\mapsto X(t,\omega,t,\omega)$.

DEMONSTRATION. On se ramène, par un argument de classes monotones, au cas d'une fonction X de la forme $b(t,\omega)c(t',\omega')$, où b est $\underline{\underline{b}}$-mesurable, c $\underline{\underline{M}}$-mesurable. Le lemme est alors évident.

Nous donnons maintenant des applications de ce lemme.

1) Prenons pour X la fonction

$$X(t,\omega,t',\omega') = I_{\{t\neq t'\}}$$

Le processus $X(t,\omega,t,\omega)$ est nul, et il vient que l'ensemble U^c des (t,ω) tels que $N((t,\omega),dt',d\omega')$ ne soit pas portée par $\{t\}\times\Omega$ est $\underline{\underline{b}}$-mesurable, et évanescent.

Nous modifierons N comme nous l'avons fait plus haut (et sans changer de notation) : nous conservons la mesure $N(t,\omega\ ;\ .\ )$ si $(t,\omega)\in U$, et sur U^c nous posons

$$N(t,\omega\ ;\ X\ ) = \int h(\omega,d\omega')X_t(\omega')$$

Dans ces conditions, la propriété est satisfaite identiquement, et nous pouvons écrire

$$\int N(t,\omega,dt',d\omega')X_{t'}(\omega') = \int N_t(\omega,d\omega')X_t(\omega')$$

où N_t est un noyau de $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o_{t+})$ dans $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$.

2) Fixons un s rationnel, et prenons

$$X(t,\omega,t',\omega') = \begin{cases} 1 & \text{si } s<t\ ,\ \xi_s(\omega')\neq\xi_s(\omega) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le processus $X(t,\omega,t,\omega)$ est nul. Comme l'ensemble des rationnels est dénombrable, et les trajectoires sont continues à droite, il vient que

sauf pour des (t,ω) qui forment un ensemble $\underline{\underline{b}}$-mesurable évanescent, on peut affirmer que la mesure $N_t(\omega,.)$ est portée par l'ensemble des ω' tels que $\xi_s(\omega')=\xi_s(\omega)$ pour tout $s<t$.

3) Prenons enfin $X(t,\omega,t',\omega')= I_{\{\xi_t(\omega)\neq\xi_t(\omega')\}}$: nous voyons que la propriété précédente vaut encore avec l'inégalité large $s\leq t$.

En définitive, nous avons démontré le théorème suivant, dû à SCHWARTZ

THEOREME 2. <u>Il existe une famille</u> $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ <u>de noyaux markoviens</u> N_t <u>de</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o_{t+})$ <u>dans</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$, <u>et un ensemble P-négligeable</u> U^c , <u>possédant les propriétés suivantes</u>.

1) <u>Pour tout processus mesurable borné</u> X, <u>le processus</u>

$$Y_t(\omega) = \int N_t(\omega,d\omega')X_t(\omega')$$

<u>est</u> $\underline{\underline{b}}$<u>-mesurable, et l'on a pour tout temps d'arrêt</u> T <u>fini de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$

$$Y_T = E[X_T | \underline{\underline{F}}^o_{T+}] \text{ p.s.}$$

(autrement dit, Y est projection bien-mesurable de X).

2) Pour tout $\omega \in U$, on peut affirmer que

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la mesure $N_t(\omega, d\omega')$ est portée par l'ensemble des ω' tels que $\xi_.(\omega) = \xi_.(\omega')$ sur $[0,t]$.

Cette dernière propriété est vraiment remarquable ! Rappelons, pour être complet, que si X est un processus mesurable continu à droite (resp. càdlàg), sa projection bien-mesurable est indistinguable d'un processus continu à droite (resp, càdlàg) : cela s'applique en particulier à la version de la projection bien-mesurable construite dans l'énoncé.

VARIANTES, EXTENSIONS

1) A côté de la notion de projection bien-mesurable, nous avons la notion de projection prévisible du processus mesurable X . La tribu prévisible $\underline{\underline{p}}$ étant engendrée par les processus adaptés à la famille $(\underline{\underline{F}}^o_t)$ et continus à gauche, la projection prévisible de X est le processus prévisible Y (défini à un processus évanescent près) tel que $Y_T = E[X_T | \underline{\underline{F}}_{T-}]$ p.s. pour tout temps d'arrêt prévisible fini de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$. Dans ces conditions, toute la théorie précédente s'étend en remplaçant "bien-mesurable" par "prévisible", à l'exception de l'application 3) du lemme : $N_t(\omega, d\omega')$ est portée par l'ensemble des ω' qui coincident avec ω sur $[0,t[$, non $[0,t]$.

2) Si l'on revient à la projection bien-mesurable, mais que l'on remplace dans la définition de Ω les applications càdlàg par les applications continues à droite de $\mathbb{R}_+$ dans G, on rencontre une difficulté : Ω n'est plus borélien dans G^Q , mais seulement complémentaire d'analytique. De même $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ n'est plus qu'un complémentaire d'analytique dans un espace métrique compact E : pour tout cela, voir [2] , p.235 . Construisons comme nous l'avons fait plus haut un noyau N^1 de $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \underline{\underline{b}})$ dans E, tel que pour toute fonction borélienne bornée f sur E, $N^1 f$ soit projection bien-mesurable du processus $f|_{\mathbb{R}_+ \times \Omega}$. Si f est alors universellement mesurable bornée sur E, le processus $N^1 f$ est

bien défini, on a pour tout temps d'arrêt fini T, en notant X le processus $f|_{\mathbb{R}_+\times\Omega}$

$$N^1(T(\omega),\omega\ ;f) = E[X_T|\underline{\underline{F}}_T] \text{ p.s.}$$

mais on ignore en général si $N^1 f$ est bien-mesurable, de sorte qu'on ne peut le considérer comme "projection bien-mesurable" de X .

Prenons cependant pour f l'indicatrice de l'ensemble $(\mathbb{R}_+\times\Omega)^c$. Cet ensemble étant analytique, il n'est pas difficile de voir que l'ensemble $\{(t,\omega) : N^1(t,\omega\ ;f)>0\}$ est $\underline{\underline{b}}$-analytique. Le fait qu'il n'y passe aucun graphe de temps d'arrêt , d'après la formule précédente, entraîne alors qu'il est évanescent. On l'**enferme alors** (théorème de capacitabilité) dans un ensemble $\underline{\underline{b}}$-mesurable V^c, également évanescent, et on poursuit le raisonnement comme dans la démonstration du théorème 1, dont l'énoncé reste vrai sans modification.

3) Il en est de même si Ω est l'espace des trajectoires càdlàg à valeurs, non pas dans un espace polonais G, mais dans un espace lusinien métrisable, i.e. un sous-ensemble borélien d'un espace métrique compact H : J.TAYLOR en effet **nous a** fait remarquer que Ω est alors un complémentaire d'analytique dans le compact H^Q , et $\mathbb{R}_+\times\Omega$ est , comme ci-dessus, un complémentaire d'analytique dans un espace métrique compact E.

BIBLIOGRAPHIE

L'article de L.SCHWARTZ paraît dans le Journal d'Analyse Mathématique, Jérusalem . En attendant, il existe sous forme polycopiée (Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique).

Les autres références sont

[1]. C.DELLACHERIE. Ensembles aléatoires I. Sém. Prob. Strasb. III, 1969, Lecture Notes in M. vol.88.

[2]. P.A.MEYER. Le retournement du temps d'après CHUNG et WALSH. Sem. Prob. Strasbourg. V, 1971, Lecture Notes in M. vol. 191.