SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Le dual de H^1 est BMO (cas continu)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 136-145
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__136_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1971/72

LE DUAL DE "H^1" EST "BMO" (CAS CONTINU)

P.A. Meyer

L'un des plus intéressants développements de la théorie des martingales ces dernières années concerne les relations avec la théorie des espaces H^p réels. Celle ci, due pour l'essentiel à FEFFERMANN et STEIN (mais motivée en partie par des résultats probabilistes de BURKHOLDER, GUNDY...) établit en particulier que le dual de l'espace H^1 est un espace de fonctions, dites " of bounded mean oscillation" (BMO). Ce résultat a réagi sur la théorie des martingales : le dual de l'espace H^1 des martingales discrètes a été déterminé, par des méthodes différentes, par STEIN, C.HERZ, A.GARSIA . Les travaux de ces auteurs ne sont pas encore publiés, et je ne les connais que par l'intermédiaire d'un article de GETOOR et SHARPE, que j'ai trouvé prodigieusement intéressant, et qui concerne surtout l'aspect <u>complexe</u> de la théorie des martingales <u>à trajectoires continues</u>. Je vais suivre ici de très près[1] les premiers paragraphes de cet article, en étendant pas à pas les résultats aux martingales continues à droite. La complexification sera laissée pour un exposé ultérieur, concernant les martingales à trajectoires continues.

Nous appelons martingales <u>presque bornées</u> , et nous notons P^{∞} , les martingales "BMO" et l'espace "BMO".

Les notations sont celles des exposés sur les intégrales stochastiques dans le volume I du Séminaire de Strasbourg, auxquels renvoient les références IS dans le texte. L'espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ est muni d'une famille $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ satisfaisant aux conditions habituelles. Toutes les martingales (locales) sont supposées continues à droite. La notation $\underline{\underline{M}}_2$ désigne ici l'espace des martingales bornées dans L^2 et <u>nulles pour</u> t=0.

1. Si on se réfère à l'introduction de l'article de GETOOR-SHARPE, on voit que cela revient sans doute, pour ces questions, à suivre de près le travail inédit de GARSIA.

L'ESPACE H^1 - PROPRIETES ELEMENTAIRES

DEFINITION. On désigne par H^1 l'ensemble des martingales locales M (ou plutôt des classes de martingales locales indistinguables) telles que $M_0=0$ et que $[M,M]_\infty^{1/2} \in L^1$, et on pose $\|M\|_{(1)} = E[[M,M]_\infty^{1/2}]$.

Il est évident que $\|M\|_{(1)}=0$ entraîne M=0 (à un ensemble évanescent près...). D'autre part, $\|M\|_{(1)}$ est une semi-norme : la vérification de ce fait se ramène à celle de l'inégalité

$$|[M,N]| \leqq [M,M]^{1/2}[N,N]^{1/2}$$

qui elle même résulte de l'inégalité de Schwarz, et de l'approximation discrète de [M,M] (cf. C.DOLEANS [1], et IS p.92).

Ainsi H^1 est un espace normé. Nous n'allons pas démontrer que H^1 est un espace de Banach, car nous n'aurons pas besoin de ce résultat dans la suite. C'est une conséquence facile du théorème suivant :

THEOREME 1 (DAVIS). <u>Si</u> M <u>est une martingale locale nulle en</u> 0, <u>et</u> M^* <u>désigne</u> $\sup_t |M_t|$, <u>on a</u>

$$cE[M^*] \leqq E[[M,M]_\infty^{1/2}] \leqq cE[M^*]$$

où, ici comme dans toute la suite , c désigne une constante qu'il est inutile de spécifier, et qui change de place en place.

Ce théorème n'a en fait été démontré par DAVIS que dans le cas discret, et sa démonstration n'est pas facile . Le passage du discret au continu n'est aisé que pour l'une des deux inégalités (celle de droite). D'autre part, pour les martingales à trajectoires continues, GETOOR et SHARPE donnent du théorème de DAVIS une démonstration extrêmement simple et élégante au moyen du calcul sur les intégrales stochastiques . Nous l'étendrons en appendice aux martingales continues à droite.

Nous nous proposons de déterminer le dual de l'espace normé H^1. Nous préparons le travail au moyen du lemme suivant

LEMME 1 . <u>On a</u> $\underline{\underline{M}}_2 \subset H^1$ <u>avec</u> $\|\cdot\|_{(1)} \leqq \|\cdot\|_2$, <u>et l'espace</u> $\underline{\underline{M}}_2$ <u>est dense dans</u> H^1 .

DEMONSTRATION. Une martingale locale M appartient à $\underline{\underline{M}}_2$ si et seulement si $[M,M]_\infty^{1/2}$ appartient à L^2. La première phrase exprime donc simplement que $\|\cdot\|_1 \leqq \|\cdot\|_2$. Pour montrer que $\underline{\underline{M}}_2$ est dense dans H^1 , nous aurons besoin des deux remarques suivantes :

a) Si $M\in H^1$, et si des temps d'arrêt T_n croissent vers $+\infty$, les martingales locales M^{T_n} obtenues par arrêt à T_n convergent vers M dans H^1 (évident par convergence dominée).

b) Soit T un temps d'arrêt, et soit S une v.a. $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable, positive et intégrable. Soit M la martingale compensée du processus $SI_{\{t\geqq T\}}$. Comme M est une somme compensée de sauts, on a $[M,M]_\infty = \sum_t \Delta M_t^2 \leqq (\sum_t |\Delta M_t|)^2$, donc $\|M\|_{(1)} \leqq 2\|S\|_1$. On étend aussitôt cette inégalité au cas où $S\in L^1$ sans être positive. D'autre part, si $S\in L^2(\underline{\underline{F}}_T)$, le processus croissant $A_t = SI_{\{t\geqq T\}}$ est borné dans L^2, il en est donc de même du processus croissant prévisible B qui engendre le même potentiel, et de M=A-B. Ainsi $S\in L^2 \Rightarrow M\in\underline{\underline{M}}_2$.

Ces points étant établis, soit M une martingale locale appartenant à H^1 . Choisissons (IS2, p.99) des temps d'arrêt $T_n\uparrow\infty$ tels que le saut $S_n = \Delta M_{T_n}$ soit intégrable, et que M^{T_n} s'écrive U+V, U étant une martingale bornée dans tout L^p, et V étant la compensée de $S_n I_{\{t\geqq T_n\}}$. Nous avons vu que V appartient à l'adhérence de $\underline{\underline{M}}_2$; il en est de même de M d'après la remarque a).

Considérons maintenant une forme linéaire continue φ sur H^1 : nous noterons $\|\varphi\|$ sa norme en tant que forme linéaire. La restriction de φ à $\underline{\underline{M}}_2$ est alors une forme linéaire continue sur $\underline{\underline{M}}_2$, avec $\|\varphi\|_2 \leqq \|\varphi\|$, et φ s'écrit donc de manière unique sur $\underline{\underline{M}}_2$ comme

(1) $$M \longmapsto E[M_\infty Z_\infty] \qquad \|Z_\infty\|_2 \leqq \|\varphi\|$$

où la martingale $Z=E[Z_\infty|\underline{\underline{F}}_.]$ appartient à $\underline{\underline{M}}_2$. Notre problème se trouve ainsi décomposé en deux

<u>Problème 1</u> : A quelle condition doit satisfaire Z pour que la forme (1) soit continue sur $\underline{\underline{M}}_2$ pour la norme H^1 ?

<u>Problème 2</u> : Cette condition étant supposée satisfaite, comment s'effectue le prolongement de (1) de $\underline{\underline{M}}_2$ à H^1 ?

L'ESPACE P^{∞}

DEFINITION. L'espace P^{∞} des martingales presque bornées est formé des martingales $M \in \underline{\underline{M}}_2$ telles qu'il existe une constante positive C^2 majorant le processus

(2) $\quad Q_t = \Delta M_t^2 + E[M_{\infty}^2 | \underline{\underline{F}}_t] - M_t^2$ (version continue à droite de l'espérance conditionnelle)

à un ensemble évanescent près. La plus petite constante positive C telle que C^2 possède cette propriété est notée $\|M\|_{(\infty)}$.

Cette définition un peu bizarre est justifiée par la remarque que le processus (2) s'écrit $E[[M,M]_{\infty} | \underline{\underline{F}}_t] - [M,M]_{t-}$: c'est donc le potentiel (non continu à droite) engendré par le processus croissant prévisible (non continu à droite) $[M,M]_{t-}$.

Le fait que $\| \ \|_{(\infty)}$ soit une semi-norme se ramène aussitôt à la propriété suivante : si (M,N) désigne le processus $\Delta M_t \Delta N_t + E[(M_{\infty} - M_t)(N_{\infty} - N_t) | \underline{\underline{F}}_t]$, on a $(M,N)^2 \leqq (M,M)(N,N)$, ce qui est facile. Il est alors évident que P^{∞} est normé. Si $\|M\|_{\infty} = C$, en faisant t=0 dans (2) on trouve que $E[M_{\infty}^2] \leqq C^2$, donc $P^{\infty} \subset \underline{\underline{M}}_2$ avec une norme plus grande. Il est très facile d'en déduire que P^{∞} est un espace de Banach.

Noter aussi que si M est bornée, on a $M \in P^{\infty}$, avec $\|M\|_{(\infty)} \leqq \theta \|M\|_{\infty}$ ($\theta = \sqrt{5}$ par exemple).

REMARQUES SUR P^{∞}. Ces remarques justifient la terminologie " martingales presque bornées". Nous n'aurons pas à nous en servir dans la suite, et il serait fatigant de les énoncer sous forme de théorème.

a) Appliquons à $[M,M]_t$ la formule de récurrence, valable pour tout processus croissant A

$$A_{\infty}^p = p\int_0^{\infty} (A_{\infty} - A_{t-}) dA_t^{p-1} \qquad (\text{ p entier })$$

Prenons des espérances, et appliquons le th. VII.T15 de [2] : nous pouvons remplacer $[M,M]_{\infty} - [M,M]_{t-}$ par Q_t , et il vient que si $\|M\|_{\infty} = C$

(3) $\quad E[[M,M]_{\infty}^p] \leqq pC^2 E[[M,M]_{\infty}^{p-1}]$, donc $E[[M,M]_{\infty}^p] \leqq p! C^{2p}$.

et par conséquent

(4) $\qquad \exp(\lambda [M,M]_{\infty}) \in L^1$ si $\lambda < 1/C^2$

La même méthode donnerait les mêmes inégalités pour $\langle M,M \rangle$ au lieu de $[M,M]$.

b) Supposons $C \leqq 1$. La martingale M est alors à sauts $\leqq 1$, et un résultat plus ou moins classique de théorie des martingales (cf. par exemple dans le Sém. de Strasbourg IV, p.168) affirme que le processus

$$\exp(\lambda M_t - \varepsilon(\lambda)\langle M,M\rangle_t) \quad , \text{ où } \varepsilon(\lambda)=e^{\lambda}-1-\lambda$$

est une surmartingale pour $\lambda>0$. Mais d'après Schwarz

$$E[\ \exp(\tfrac{\lambda}{2}M_\infty)] \leqq E^{1/2}[\exp(\lambda M_\infty - \varepsilon(\lambda)\langle M,M\rangle_\infty)].$$
$$E^{1/2}[\exp(\varepsilon(\lambda)\langle M,M\rangle_t)]$$

la première espérance étant au plus 1, le premier membre est fini pour $\lambda<A$ assez petit, et la sousmartingale $e^{\lambda|M_t|}$ est bornée dans L^1 pour $\lambda<A$ (appliquer le résultat précédent à $-M$). Appliquant cela à λ' tel que $\lambda<\lambda'<A$, on voit même d'après l'inégalité de DOOB que $\exp(\lambda M^*)\in L^1$, ce qui justifie bien le terme " presque borné".

ACCOUPLEMENT ENTRE H^1 ET P^∞

Notre première étape dans la détermination du dual de H^1 va consister à exhiber une classe de formes linéaires continues sur H^1, qui s'avérera ensuite être tout le dual.

LEMME 2. <u>Soit</u> $M\in H^1$, <u>et soit</u> $N\in P^\infty$ <u>avec</u> $\|N\|_{(\infty)}=C$. <u>Alors on a</u>

(5) $$E[\int_0^\infty |d[M,N]|_s\ ] \leqq \theta C\|M\|_{(1)} \qquad (\theta=\sqrt{2}\ )$$

DEMONSTRATION. Nous écrivons la formule (IS2, p.85), où les processus H,K sont supposés bien-mesurables

$$E^2[\int_0^\infty |H_s||K_s||d[M,N]_s|] \leqq E[\int_0^\infty H_s^2 d[M,M]_s]E[\int_0^\infty K_s^2 d[M,M]_s]$$

et nous prenons $H_s=[M,M]_s^{-1/4}$, $K_s=[M,M]_s^{1/4}$. Le premier membre est aussi celui de (5), $d[M,N]$ étant absolument continue p.r. à $d[M,M]$. Nous évaluons séparément les deux termes au second membre.

<u>Premier terme</u> : la formule $dA_s^2=(A_s+A_{s-})dA_s$, vraie pour tout processus croissant A, nous donne $dA_s^2/A_s \leqq 2dA_s$. Prenant $A_s=[M,M]_s^{1/2}$ nous voyons que le premier terme est majoré par $2E[[M,M]_\infty^{1/2}]=2\|M\|_{(1)}$.

Second terme : intégrant par parties, nous l'écrivons

$$E[[M,M]_\infty^{1/2}\,[N,N]_\infty - \int_0^\infty [N,N]_{s-}d[M,M]_s^{1/2}\,]$$
$$= E[\int_0^\infty ([N,N]_\infty - [N,N]_{s-})d[M,M]_s^{1/2}]$$

Raisonnant comme dans la remarque a) sur P^∞ , nous remplaçons $[N,N]_\infty - [N,N]_{s-}$ par $Q_s \leq C^2$, et le terme est majoré par $C^2\|M\|_{(1)}$
Le lemme est établi. Il nous donne aussitôt le théorème :

THEOREME 2. Si $N\epsilon P^\infty$, et $M\epsilon H^1$, la limite $[M,N]_\infty$ existe et est intégrable, la forme linéaire $M \mapsto E[[M,N]_\infty\,]$ est continue sur H^1 , de norme au plus $\Theta\|N\|_{(\infty)}$, et c'est l'unique prolongement continu à H^1 de la forme $M \mapsto E[M_\infty N_\infty\,]$ sur $\underline{\underline{M}}_2$.

DEMONSTRATION. Evidente. [NB. Nous allons voir dans un instant que M_∞ existe, mais le produit $M_\infty N_\infty$ n'est pas nécessairement intégrable].

REMARQUE. Soit $M\epsilon\underline{\underline{M}}_2$, et soit Z une martingale bornée telle que $Z_0=0$. Nous avons $E[M_\infty Z_\infty\,] \leqq \Theta\|M\|_{(1)}\,\|Z\|_{(\infty)} \leqq \Theta'\|M\|_{(1)}\|Z\|_\infty$ d'où en passant au sup sur Z , $\|M_\infty\|_1 \leqq \Theta'\|M\|_{H^1}$. Par complétion, nous voyons que H^1 est contenu dans l'espace des martingales M uniformément intégrables, muni de la norme $\|M_\infty\|_1$, avec une norme plus forte. Bien entendu, cela résulte du théorème de DAVIS, mais nous en avons ici une démonstration élémentaire.

DETERMINATION DU DUAL DE H^1

Nous considérons maintenant une forme linéaire continue φ sur H^1 : nous savons qu'elle s'écrit sur $\underline{\underline{M}}_2$ $M \mapsto E[M_\infty N_\infty\,]$ pour une martingale unique $N\epsilon\underline{\underline{M}}_2$. Nous allons montrer que $Z\epsilon P^\infty$, avec $\|N\|_{(\infty)} \leq \|\varphi\|$. Compte tenu du théorème 2, nous aurons à la fois déterminé le dual de H^1, et l'expression de φ sur H^1 tout entier.

L'inégalité $\|N\|_{(\infty)} \leqq \|\varphi\|$ - équivalente au th.3 ci-dessous- est due à GETOOR, qui a mis sous une forme plus simple et plus élégante la démonstration initiale de cet exposé.

THEOREME. Soit $N\epsilon\underline{\underline{M}}_2$. On a alors

(6) $$\|N\|_{(\infty)} \leqq \sup_M E[M_\infty N_\infty\,] \text{ pour } M\epsilon\underline{\underline{M}}_2\,,\ \|M\|_{(1)} \leqq 1\ .$$

DEMONSTRATION. Désignons par c ce sup. Nous voulons montrer que l'on a p.s.

$$\Delta N_t^2 + E[N_t^2|\underline{\underline{F}}_t] - N_t^2 \leqq c^2 \text{ identiquement en } t$$

Il nous suffit évidemment que cette inégalité ait lieu p.s. à chaque temps d'arrêt T (le théorème de section n'est pas nécessaire ici !). Or nous avons

$$\Delta N_T^2 + E[N_T^2|\underline{\underline{F}}_T] - N_T^2 = E[Z|\underline{\underline{F}}_T] \text{ , où } Z=[N,N]_\infty - [N,N]_{T-} \text{ .}$$

Soit $A \in \underline{\underline{F}}_T$, avec $P(A) \neq 0$. Soit D le processus prévisible $D_t = I_A I_{\{t>T\}}$. Soit Y la martingale $D \cdot N$ (intégrale stochastique). Nous avons

$$[Y,N]_t = \int_0^t D_s d[N,N]_s = \int_0^t D_s^2 d[N,N]_s = [Y,Y]_t$$

et en particulier

$$[Y,N]_\infty = [Y,Y]_\infty = I_A Z$$

Une première conséquence est l'inégalité $\|Y\|_{(1)} = E[I_A\sqrt{Z}] = E[\sqrt{Z}|A]P(A)$. La définition de c comme sup nous donne alors

$$E[I_A Z] = E[[Y,N]_\infty] \leqq c\|Y\|_{(1)} = cE[\sqrt{Z}|A]P(A)$$

Le premier membre vaut $E[I_A Z] = E[Z|A]P(A)$. Chassant P(A) et appliquant l'inégalité de Schwarz, nous obtenons

$$E[Z|A] \leqq cE[\sqrt{Z}|A] \leqq c(E[Z|A])^{1/2}$$

d'où l'on tire l'inégalité $E[Z|A] \leqq c^2$ p.s., qui est précisément ce que l'on cherche. Le théorème est établi.

(Dans la rédaction précédente, on arrivait à remplir cette page).

BIBLIOGRAPHIE

Les trois articles suivants ont été rajoutés après la rédaction de cet exposé - j'ignore dans quelles revues ils paraîtront. Ils apportent des contributions importantes aux sujets traités ici.

BURKHOLDER (D.L.). Distribution function inequalities for martingales.

GARSIA (A.). The Burgess Davis inequalities via Fefferman's inequality.

HERZ (C.). Bounded mean oscillation and regulated martingales.

L'article de GETOOR et SHARPE est intitulé Conformal martingales, et devrait paraître aux Invent. Math.

Les références IS renvoient aux articles sur les intégrales stochastiques, dans le Séminaire de Strasbourg I (Lecture Notes in M. 39, 1967). On pourra consulter aussi

C.DOLEANS-DADE et P.A.MEYER. Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales . Séminaire de Strasbourg IV, Lect. Notes in M., 124, 1970.

La démonstration du théorème de DAVIS dans le cas discret (reprise et généralisée dans les travaux de BURKHOLDER, DAVIS et GUNDY) est

B.DAVIS. On the integrability of the martingale square function. Israel J. of M. 8, 1970, p. 187-190.

Enfin, les références numérotées :

[1]. C.DOLEANS-DADE. Variation quadratique des martingales continues à droite. Ann. M. Stat. 40, 1969, p.284-289.

[2]. P.A.MEYER. Probabilités et potentiels. Hermann, Paris ; Blaisdell, Boston. 1966.

APPENDICE : LE THEOREME DE DAVIS

Comme nous l'avons expliqué plus haut, GETOOR et SHARPE donnent dans leur article une très belle démonstration des inégalités de BURKHOLDER et du théorème de DAVIS dans le cas des martingales continues. En combinant leur technique avec la décomposition de DAVIS, nous allons l'étendre aux martingales continues à droite. Nous nous bornerons au théorème de DAVIS proprement dit. L'idée de DAVIS consiste à se ramener au cas d'une martingale dont les sauts sont " prévisiblement bornés" , et nous étudions d'abord ce cas.

LEMME. *Soit* M *une martingale telle que* $M_0=0$. *On pose* $A_t=[M,M]_t$, $M^*_t=\sup_{s\leqq t}|M_s|$, *et on suppose que* $|\Delta M_t|\leqq D_{t-}$, *où* D *est un processus croissant. On a alors*

$$E[\,A_\infty^{1/2}] \leqq \Theta E[\,M^*_\infty + D_\infty\,]$$

$$E[M^*] \leqq \Theta E[\,A_\infty^{1/2} + D_\infty\,]$$

(on a des résultats analogues avec $\langle M,M\rangle$ au lieu de [M,M]).

DEMONSTRATION. Nous poserons $M^* = M^*_\infty$ pour abréger. Nous noterons D_- , M^*_- les processus $(D_{t-}),(M^*_{t-})$. Enfin, nous supposerons dans toute la démonstration que M et D sont des processus bornés : on se ramène à ce cas par arrêt.

<u>Première inégalité</u>. On prend une constante $\varepsilon>0$, on écrit

$$A_\infty^{1/2} = A_\infty^{1/2}(\varepsilon+D_\infty+M^*)^{-1/2} \;.\; (\varepsilon+D_\infty+M^*)^{1/2}$$

On applique l'inégalité de Schwarz . Le terme après le point donne $E^{1/2}[\varepsilon+M^*+D_\infty]$. Le terme avant le point peut s'écrire

$$E^{1/2}[A_\infty(\varepsilon+D_\infty+M^*)^{-1}] \leqq E^{1/2}[\int_0^\infty(\varepsilon+D_{s-}+M^*_{s-})dA_s]$$

$$= E^{1/2}[[Y,Y]_\infty] = E^{1/2}[Y^2_\infty]$$

où Y est l'intégrale stochastique $(\varepsilon+D_-+M^*_-)^{-1/2}.M$. Calculons Y_∞ en intégrant par parties, nous obtenons

$$(\varepsilon+D_\infty+M^*)^{-1/2}M_\infty - \int M_s\, d(\varepsilon+D_s+M^*_s)^{-1/2}$$

Dans le premier terme, nous majorons $|M_\infty|$ par $\varepsilon+D_\infty+M^*$, et il nous reste seulement $(\varepsilon+D_\infty+M^*)^{1/2}$. Dans le second, nous majorons $|M_s|$ par $|M_{s-}|+|\Delta M_s| \leqq (\varepsilon+)|M^*_{s-}|+D_{s-}$. Posant $U=(\varepsilon+D_s+M^*_s)^{1/2}$ l'intégrale s'écrit alors $-\int U_-^2 d(\frac{1}{U}) = \int U_-^2 \frac{dU}{UU_-} \leqq \int dU$, et il nous reste encore $(\varepsilon+D_\infty+M^*)^{1/2}$. Ainsi

$$|Y_\infty| \leqq 2(\varepsilon+D_\infty+M^*)^{1/2}$$

nous élevons au carré, nous groupons, et il vient lorsque $\varepsilon\to 0$

$$E[A_\infty^{1/2}] \leqq 2E[D_\infty+M^*]$$

L'inégalité relative à $\langle M,M\rangle$ se démontre de manière identique.

<u>Seconde inégalité</u>. Posons $B_s=A_s+D_s^2$ (si le lecteur le désire, il peut encore ajouter un ε, qu'il fera tendre vers 0 ensuite). Soit Y la martingale locale $B_-^{-1/4}.M$. On a $[Y,Y]_\infty=\int B_{s-}^{-1/2}dA_s$, mais $B_{s-}=A_{s-}+D_s^2 \geqq A_{s-}+\Delta M_s^2 = A_s$, ainsi

$$[Y,Y]_\infty \leqq \int_0^\infty A_s^{-1/2}dA_s \leqq \int_0^\infty \frac{2dA_s}{A_s^{1/2}+A_{s-}^{1/2}} = 2A_\infty^{1/2}$$

donc Y est de carré intégrable, et d'après DOOB $E[Y^{*2}] \leqq 4E[Y^2_\infty] \leqq 8E[A_\infty^{1/2}]$. Mais nous avons aussi $M=B_-^{1/4}.Y$. Intégrons par parties :

$$|M_t| = |B_t^{1/4}Y_t - \int_0^t Y_s dB_s^{1/4}| \leqq 2Y^*B_\infty^{1/4}$$

D'après Schwarz nous avons alors

$$E[M^*] \leqq 2E^{1/2}[Y^{*2}]E^{1/2}[B_\infty^{1/2}] \leqq 4\sqrt{2}E[A_\infty^{1/2}+D_\infty]$$

Ce sont exactement les majorations de GETOOR-SHARPE lorsque D=0.

LA DECOMPOSITION DE DAVIS

Voici comment on la construit. On introduit le processus croissant $S_t = \sup_{s\leqq t} |\Delta M_s|$. Si t est tel que $|\Delta M_t| \geqq 2S_{t-}$, on a

$$|\Delta M_t| + 2S_{t-} \leqq 2|\Delta M_t| = 2S_t$$

donc $|\Delta M_t| \leqq 2(S_t - S_{t-})$, et le processus

$$K_t^1 = \sum_{s\leqq t,\ |\Delta M_s| \geqq 2S_{t-}} \Delta M_s$$

a une variation totale bornée par $2S_\infty$. Soit K^2 son compensateur (K^2 est prévisible, $K=K^1-K^2$ est une martingale) : la variation totale de K^2 a une espérance au plus égale à $2E[S_\infty]$, et celle de K est au plus égale à $4E[S_\infty]$.

Posons de même $L^1=M-K^1$, privé de tous les sauts ΔM_t qui majorent $2S_{t-}$ en module, $L^2=-K^2$, et $L=L^1-L^2$ qui est une martingale (=M-K). Comme K^2 est prévisible, L et L^1 ont le même saut en T totalement inaccessible, et donc $|\Delta L_T| \leqq 2S_{T-}$. Si T est prévisible, le saut de L^2 en T est l'opposé de $E[\Delta L^1 | \underline{\underline{F}}_{T-}]$, puisque L^2 est prévisible et L est une martingale. Donc $|\Delta L_T^2| \leqq 2.E[S_{T-} | \underline{\underline{F}}_{T-}] = 2S_{T-}$, et $|\Delta L_T| \leqq 4S_{T-}$. D'après le théorème de section, on a identiquement $|\Delta L_t| \leqq 4S_{t-}$.

<u>Ainsi</u> : M=K+L, deux martingales ; les sauts de L sont bornés par $4S_-$; l'espérance de var.totale K est au plus $4E[S_\infty]$.

<u>Première inégalité</u>. On écrit $E[[M,M]_\infty^{1/2}] \leqq E[[L,L]_\infty^{1/2}] + E[[K,K]_\infty^{1/2}] \leqq 2E[4S_\infty + L^*] + 4E[S_\infty]$. On majore L^* par M^*+K^* , K^* à nouveau par la variation totale, soit en tout $2E[M^*+8S_\infty]$, enfin S_∞ , le sup des sauts, par $2M^*$. Enfin

$$E[[M,M]_\infty^{1/2}] \leqq 42E[M^*]$$

<u>Seconde inégalité</u> . Raisonnement analogue.