

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

NORIIHIKO KAZAMAKI

Une note sur les martingales faibles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 118-121

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__118_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE NOTE SUR LES MARTINGALES FAIBLES

N. Kazamaki

Soit $(\Omega, \underline{F}, P)$ un espace de probabilité complet et $(\underline{F}_t)_{t \in R_+}$ une famille croissante, continue à droite de sous-tribus de \underline{F} telle que \underline{F}_0 contienne tous les ensembles négligeables de \underline{F} .

DEFINITION.- Un processus $M = (M_t, \underline{F}_t)$ à valeurs réelles et à trajectoires continues à droite est une martingale faible (resp. faiblement de carré intégrable) s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt (T_n) et une suite de martingale uniformément intégrable (resp. de carré intégrable) $(M_t^{T_n})$ telles que

$$(a) \quad \lim T_n = +\infty \quad \text{p.s.}$$

$$(b) \quad \text{pour chaque } n, \text{ on a } M_t = M_t^{T_n} \text{ sur l'ensemble } \{t < T_n\}.$$

Il existe une martingale faible, continue et bornée, qui n'est pas une martingale. [(2)]

Nous allons montrer ici qu'une martingale faible n'est pas nécessairement une martingale faiblement de carré intégrable.

Soient $\Omega = R_+$, \underline{F}° la tribu borélienne de R_+ , S l'application identité de Ω dans R_+ et \underline{F}_t° la tribu engendrée par $S \wedge t$. On prend pour probabilité P sur Ω la loi exponentielle: $P(S > t) = e^{-t}$ pour tout $t \geq 0$. On considère la tribu \underline{F} engendrée par \underline{F}° et les ensembles P -négligeables de et pour chaque t la tribu \underline{F}_t engendrée par \underline{F}_t° et les ensembles P -négligeables de Ω .

Nous utiliserons essentiellement le lemme suivant :

LEMME (Dellacherie (1)). - Une variable aléatoire T est un temps d'arrêt de la famille (\mathbb{F}_t) si et seulement si elle vérifie la condition suivante : il existe $s \in \bar{R}_+$ tel que

- (i) $T \geq S$ p.s si $S \leq s$
- (ii) $T = s$ p.s si $S > s$.

THEOREME .- Une martingale faible est une martingale .

DEMONSTRATION.- Soit $M = (M_t, \mathbb{F}_t)$ une martingale faible . Pour simplifier, nous supposons que chaque temps d'arrêt T_n est borné ; on a alors d'après le lemme

$$R_+ \ni s_n \uparrow +\infty, \quad T_n = \begin{cases} \geq S & \text{p.s si } S \leq s_n \\ s_n & \text{p.s si } S > s_n \end{cases} .$$

Comme $M^n = (M_t^n, \mathbb{F}_t^n)$ est une martingale , on a pour chaque n :

$$(s \leq t), \quad M_s^n = E(M_t^n | \mathbb{F}_s^n) = M_t^n I_{\{S \leq s\}} + E(M_t^n | \mathbb{F}_s^n) I_{\{S > s\}}$$

et par conséquent $M_t^n = M_s^n$ si $S \leq s$. On a alors :

$$(1) \quad M_t^n = M_{t \wedge S}^n \quad \text{p.s} \quad (\forall n, \forall t) .$$

D'autre part , M_t^n (resp. M_t) est constante C_t^n (resp. C_t) réelle sur $\{S > t\}$; car elle est \mathbb{F}_t -mesurable ; on peut écrire

$$M_t = M_S I_{\{S \leq t\}} + C_t I_{\{S > t\}}$$

et aussi $M_t^n = M_S^n I_{\{S \leq t\}} + C_t^n I_{\{S > t\}}$. Evidemment M_S et M_S^n sont \mathbb{F}_S -mesurable . Pour tout $t < s_n$ on a $\{s_n < S\} \subset \{t < S\}$ et $T_n = s_n$ sur $\{s_n < S\}$.

Comme $M_t = M_t^n$ sur $\{s_n < S\}$, il est évident que pour chaque $t < s_n$ on a

$$M_t^n = M_S^n I_{\{S \leq t\}} + C_t I_{\{S > t\}},$$

et par conséquent :

$$\int_{s, \infty} M_t^n dP = \int_{s, \infty} M_S^n dP = C_s e^{-s} \quad (s \leq t < s_n)$$

On en déduit :

$$(2) \quad \int_{s, t} M_S^n dP = C_s e^{-s} - C_t e^{-t} \quad (s \leq t < s_n)$$

Il en résulte que pour chaque k on a :

$$\int_{s, t} M_{S^n}^n I_{[0, s_n]} dP = \int_{s, t} M_S^{n+k} I_{[0, s_n]} dP \quad \text{pour tout } (s, t) \text{ telle que } s \leq t$$

Autrement dit, on a : $M_{S^n}^n I_{[0, s_n]} = M_S^{n+k} I_{[0, s_n]}$ p.s : cela entraîne que si $t < s_n$

$$(3) \quad M_{S^n}^n I_{\{S \leq t\}} = M_S^{n+k} I_{\{S \leq t\}}.$$

On a alors :

$$(4) \quad M_t = M_t^n \quad \text{pour tout } t < s_n, \text{ et } \lim s_n = +\infty$$

Par conséquent, M est une martingale.

Egalement on peut vérifier qu'une martingale faiblement de carré intégrable est une martingale de carré intégrable.

Il est maintenant évident qu'une martingale faible n'est pas nécessairement une martingale faiblement de carré intégrable.

D'après (2) et (4), on peut vérifier facilement le résultat suivant.

COROLLAIRE .- Si pour chaque t l'application: $\omega \longrightarrow M_t(\omega)$ est continue à gauche , on a alors:

$$(5) \quad M_S(\omega) = - \lim_{h \downarrow 0} \frac{C_\omega - C_{\omega-h}}{h} e^h \quad (\omega > 0) .$$

REMARQUE .- Une semi - martingale n'est pas nécessairement une martingale faible .

BIBLIOGRAPHIE

- (1) C.DELLACHERIE : Un exemple de la théorie générale des processus . Séminaire de Probabilités IV , Université de Strasbourg . Lecture Notes in Mathematics vol.124 , Springer , Heidelberg 1970
- (2) N.KAZAMAKI : Changes of time , Stochastic integrals and weak martingales .
(à paraître dans le Zeitschrift für W-théorie) .