Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Jean Bretagnolle

p-variation de fonctions aléatoires. 2ième partie : processus à accroissements indépendants

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 6 (1972), p. 64-71
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__64_0>

Université de Strasbourg 1970/71

Séminaire de Probabilité

p-VARIATION DE FONCTIONS ALÉATOIRES

$2^{\text{ième}}$ partie: Processus à accroissements indépendants

par Jean Bretagnolle

I. Justification de la $1^{\text{ère}}$ partie : P.W. MILLAR, dans [1] a étudié la p-variation des processus à accroissements indépendants et stationnaires (désormais P.A.I.) et a posé la conjecture démontrée dans le Théorème III; dans cet article, il a démontré un résultat partiel rendant la conjecture tout à fait raisonnable; pour résoudre la problème pour les P.A.I., il suffit de montrer le théorème II pour des v.a. indépendantes et équidistribuées: c'est ce que j'avais fait tout d'abord, et voilà pourquoi dans la partie 1 on passe de A à D^u, pour rendre les a_i assez proches de v.a. indépendantes équidistribuées minorées.

II. Extensions du Théorème I : Soient (X_i) des variables aléatoires indépendantes, centrées pour $p > 1$; on définit comme dans I la fonction aléatoire S par $S(n) = \sum_{i \leqq n} X_i$; alors:

Théorème II : Si $p \in)0,2($, il existe une constante C_p, ne dépendant que de p, telle que :

$$\sum_{a<i\leqq b} E\{|X_i|^p\} \leqq E\{ W^p(S)_a^b \} \leqq C_p \cdot \sum_{a<i\leqq b} E\{|X_i|^p\} .$$

démonstration: le cas $0<p\leqq 1$ est trivial, ainsi que l'inégalité de

gauche; désormais, on suppose $1<p<2$ et les X_i centrées.

<u>Lemme 1</u>: On peut supposer les X_i symétriques.

<u>démonstration</u>: Soit $M(\omega)$ une fonction aléatoire, et $M'(\omega')$ indépendante de la première et de même loi, $[a,b]$ un intervalle de N, et $P(\omega) = \{ t_i(\omega) \}$ la partition de $[a,b]$ qui réalise $W^p(M)_a^b(\omega)$:

$$W^p(M)_a^b = \sum_{t_i(\omega)\varepsilon P(\omega)} | M_{t_i(\omega)}^{t_{i+1}(\omega)}(\omega)|^p \text{ ; comme } M = M-M' + M',$$

$$W^p(M)_a^b \lesssim \sum_{t_i\ \varepsilon\ P} |(M-M')_{t_i}^{t_{i+1}}|^p + \sum_{t_i\ \varepsilon\ P} |M'^{t_{i+1}}_{t_i}|^p$$

$$\leqq W^p(M-M')_a^b + \sum_{t_i\varepsilon P(\omega)} |M'^{t_{i+1}(\omega)}_{t_i(\omega)}(\omega')|^p .$$

Il suffit alors de démontrer le

<u>Lemme2</u>: si les X_i sont centrées, $E\{|\Sigma_a^b X_i|^p\} \lesssim \Sigma_a^b E\{|X_i|^p\}$.

En effet, si le Théorème a été démontré dans le cas symétrique, prenant $M = S$, $M-M'$ est somme de variables symétriques $X-X'$ et alors $E\{W^p(M-M')_a^b\} \lesssim \Sigma_a^b E\{|X_i-X_i'|^p\} \lesssim \Sigma_a^b E\{|X_i|^p\}$ puisque X_i et X_i' sont de même loi.

Par ailleurs, $E_\omega E_{\omega'}\{ \sum_{t_i\varepsilon P(\omega)} |M'^{t_{i+1}}_{t_i}|^p\} = E_\omega\{ \Sigma E_{\omega'}\{|\Sigma_{t_i(\omega)}^{t_{i+1}(\omega)} X_i'(\omega')|^p\}$

$\lesssim E_\omega\{ \Sigma\ \Sigma_{t_i(\omega)}^{t_{i+1}(\omega)} E\{|X_i'|^p\} \}$ (d'après l'indépendance de ω et ω' et le lemme 2) $= E_\omega\{\Sigma_a^b E\{|X_i'|^p\}\}$ (il s'agit d'une partition de $[a,b]$) $= \Sigma_a^b E\{|X_i|^p\}$ (les X_i ont même loi que les X_i') . En combinant ces inégalités, on obtient $E\{W^p(M)_a^b\} \lesssim \Sigma_a^b E\{|X_i|^p\}$.

<u>démonstration du lemme 2</u>: Il sort de l'inégalité de Marcinkiewicz - Zygmund qui assure en particulier que si les X_i sont centrées et indépendantes, $E\{|\Sigma X_i|^p\} \lesssim E\{| \Sigma X_i^2 |^{p/2}\}$. Mais $|\Sigma X_i^2|^{p/2} \leqq \Sigma |X_i|^p$.

<u>démonstration du T II</u> dans le cas symétrique: On interprète alors X_i comme $A_i(\omega')\varepsilon_i(\omega)$, les deux arguments ω et ω' étant indépendants, ($A_i = |X_i|$) les A_i étant 2 à 2 indépendantes, ainsi que les ε_i, qui sont des Rademachers. On écrit le T I conditionnellement en ω', puis on intègre les inégalités •

***

<u>Théorème III</u> : on suppose $1< p < 2$

III a : Soit X_t un P.A.I. centré, sans partie brownienne, de mesure de Lévy L(dx) de support contenu dans $[-1,+1]$; il existe alors deux constantes D_p,D'_p ne dépendant que de p telles que :

$$D_p\int |x|^p L(dx) \leqq E\{W^p(X)_0^1\} \leqq D'_p \int |x|^p L(dx) \quad .$$

III b : Soit X_t un P.A.I. de mesure de Lévy L(dx); La C.N.S. pour que sa p-variation sur $[0,1]$ soit finie p.s. est qu'il n' ait pas de partie brownienne et que l'intégrale $\int_{|x|\leqq 1} |x|^p L(dx)$ soit finie; sinon, la p-variation est p.s. infinie •

<u>démonstration</u> : ne démontrons que III a pour l'instant; pour une fonction cadlag (continue à droite et pourvue de limites à gauche) la p-variation est aussi bien le sup que le sup sur les sommes finies que le sup sur les sommes dyadiques: on peut discrétiser et pour pouvoir conclure avec le T II, il suffit de montrer le:

<u>lemme 3</u>: Quand t tend vers 0, $t^{-1}E\{|X_t|^p\} \approx \int |x|^p L(dx)$ sous III a.

Or, si X et X' sont indépendantes, de même distribution, centrées, on a $E\{|X-X'|^p\} \approx E\{|X|^p\}$ (on en a la moitié du lemme 2, l'autre provient de l'inégalité de Jensen: $|X'|^p = |E_X\{X'-X\}|^p \leq E_X|X'-X|^p$)

Pour démontrer le lemme 3, on se ramène donc au cas symétrique .

Or si X est une v.a. symétrique de fonction caractéristique $\varphi_X(u)$, $\|X\|_p^p \approx \int (1-\varphi_X(u))u^{-p-1}du$, pour $0<p<2$; il faut donc montrer que $\int\{1-\exp[\int(1-\cos ux)L(dx)]\}t^{-1}u^{-p-1}du \approx \int |x|^p L(dx)$: une des inégalités est évidente, l'autre vient, quand t tend vers 0, par convergence dominée .

III. Le cas du Mouvement brownien : Redémontrons le

Théorème IV (Paul Lévy) : La 2-variation du Mouvement Brownien B_t sur $[0,1]$ est p.s. infinie .

Lemme 4 :Soit f une fonction cadlag, définie sur $[0,1]$ et g continue de R^+ dans R^+. Soit $E_M=\{t\,|\,0\leq t<1;$il existe t', $t<t'<1$ avec $\frac{f(t')-f(t)}{g(t'-t)}>M\}$

Si $|E_M| = 1$($|\ |$ est la mesure de Lebesgue), alors à tout ε on peut associer une famille finie $\{0<t_1<t_2<\ldots<t_{2n-1}<t_{2n}<1\}$ avec

$$\sum_{0\leq k<n}(t_{2k}-t_{2k-1})>1-\varepsilon \text{ et } \frac{f(t_{2k})-f(t_{2k-1})}{g(t_{2k}-t_{2k-1})}>M \quad \text{pour tout } k \quad .$$

dém: un t' tel que l'inégalité ait lieu sera dit associé à t; M étant fixé, soit E_a défini par $\{\,|$en supplément, il existe un t' associé avec $t'-t>a\}$.Alors E_M est la réunion des E_a pour a petit, tout est mesurable, donc je peux trouver a tel que $|E_a|>1-\frac{1}{2}\varepsilon$; soit alors $\hat{t}_1=\inf\{t\,|\,t\in E_a\}$, $t_1\in E_a$ avec $t_1-\hat{t}_1<2^{-2}$, t_2 un t' a-associé à t_1 et, en général: $\hat{t}_{2k+1}=\inf\{t\,|\,t>t_{2k};t\in E_a\}$, $t_{2k+1}\in E_a$ avec $t_{2k+1}-\hat{t}_{2k+1}<$

$\varepsilon 2^{-2k-2}$, t_{2k+2} a-associé à t_{2k+1}; comme $t_{2k}-t_{2k-1} > a$, on atteint 1 en un nombre fini de fois; la deuxième inégalité est vérifiée par construction, et $\varepsilon/2 \geqq |E_a^c| \geqq \Sigma\, t_{2k+1}-t_{2k}$, $\varepsilon/2 \geqq \Sigma\, t_{2k+1}-t_{2k+1}$ ....

Proposition Soit X_t un P.A.I., h une fonction paire,convexe, positive, de fonction inverse g; on suppose que $\limsup_{t\to 0} X_t/g(t)$ ou que $\limsup_{t\to 0} |X_t|/g(t) = +\infty$ p.s. ; la h-variation de X_t est alors infinie sur $[0,1]$, p.s.

démonstration:(la h-variation se définit en remplacant $x \to |x|^p$ par $x \to h(x)$) Soit $\Omega_M = \{\omega, t \,|\, t\varepsilon E_M(\omega)\}$, $E_M(\omega)$ étant l'ensemble du lemme 4 correspondant à $f(.) = X_{\cdot}(\omega)$; $X_t(\omega)$ étant ~~mesurable~~ c.a.d.l.c.g et mesurable du couple(t,ω), Ω_M est mesurable; les accroissements étant indépendants et stationnaires, la section de Ω_M par $t=t_o$ a une probabilité 1 pour tout t_o, sous l'hypothèse faite; donc (Fubini) $P \otimes \|\{\Omega_M\} = 1$, donc les sections $E_M(\omega)$ ont presque toutes une mesure de Lebesgue 1, les hypothèses du lemme 4 sont remplies . Alors $W^h(X)_0^1 \geqq \sum_k h_o X_{t_{2k-1}}^{t_{2k}} \geqq$ $\sum_k h(Mg(t_{2k}-t_{2k-1})) \geqq \sum_k Mh_o g(t_{2k}-t_{2k-1}) \geqq M(1-\varepsilon)$, avec probabilité 1, ceci pour tout M, tout ε .

On a en particulier démontré le Théorème IV, puisque d'après la loi du Logarithme itéré, $\limsup_{t\to 0} B_t/t^{\frac{1}{2}} = +\infty$

Remarques:-$\limsup_{t\to 0}|X_t|/g(t) = \infty$ avec une P >0 entraîne que X_t ou $-X_t$ avec P=1 est tel que $\limsup_{t\to 0} X_t/g(t) = +\infty$(Loi 0-1)

-le T IV est à rapprocher du résultat suivant lequel si on se donne une suite emboitée de partitions (certaines) P_n de $[0,1]$ la suite $V_n = \sum_{t_{i,n}} |B_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}}|^2$ tend p.s. vers 1 .

<u>Corollaire</u> :Le théorème I est faux pour p=2, et $\lim_{p\to 2} \uparrow M_p = +\infty$.

<u>démonstration</u> : Remarquons tout d'abord que la fonction aléatoire S étant fixée, $[W^p(S)_a^b]^{1/p}$ est décroissante de p: pour toute partition P, $[\sum_{i<k(P)} |S_{t_i}^{t_{i+1}}|^p]^{1/p}$ est décroissante de p ; si $\{M_p|p<2\}$ était borné, on pourrait passer à la limite dans le T I, puisqu'on a à y évaluer un sup sur un nombre fini de sommes, et M_2 serait finie. Si M_2 est finie, le T II est valable avec X_i gaussiennes et p=2, on discrétise le Brownien comme dans T III, et on obtient une contra - diction avec T IV.

***

<u>IV Démonstration de III b et divers</u>

Un P.A.I X_t de mesure de Lévy L(dx) peut toujours se décomposer en somme de 4 P.A.I. <u>indépendants</u> $\sigma B_t + Y_t + P_t + at$, où:

-σB_t est la partie brownienne.

-Y_t , de mesure de Lévy $1_{\{|x|\leq 1\}} . L(dx)$ est centré.

-P_t , de mesure de Lévy $1_{\{|x|>1\}} . L(dx)$ est un processus de Poisson généralisé, c'est-à-dire qu'il est constant par paliers, n'a qu'un nombre p.s. fini de discontinuités dans tout intervalle de temps,et peut s'écrire $P_t = \sum_{s\leq t} (P_s - P_{s-})$.

- at est une translation certaine,regroupant tout ce qui reste .

La translation a une p-variation finie ($p\geq 1$) ainsi, p.s., que P_t.

Si donc $\sigma = 0$ et si $\int_{|x|\leqq 1} |x|^p L(dx) < +\infty$, d'après III a et (W), la p-variation de X est p.s finie sur $[0,,1]$.

Toujours d'après (W), si la p-variation de X_t n'est pas finie avec probabilité positive, il en est de même pour $\sigma B_t + Y_t$; si $\sigma > 0$, en écrivant $\sigma B_t(\omega) + Y_t(\omega')$, les deux arguments ω ω' indépendants, soit $P_n(\omega)$ des partitions qui réalisent à la limite la 2-variation de σB_t, indépendantes de $Y(\omega')$; comme $(a+b)^2 \geqq \frac{1}{2}a^2 - b^2$, on a $2W^2(\sigma B+Y)_0^1 \geqq \sigma^2 . \sum_{t_i \varepsilon P(\omega)} |B_{t_i}^{t_{i+1}}|^2 - 2 \sum_{t_i \varepsilon P(\omega)} |Y_{t_i}^{t_{i+1}}|^2$. Mais le P.A.I. Y est centré, et donc $E\{Y_t^2\} = yt$ pour un $y \varepsilon R$, et comme $P(\omega)$ est indépendante de Y, l'espérance du 3° terme est $2y$; le second tend p.s. vers $+\infty$ (T IV); la 2-variation de la somme est infinie, donc à fortiori la p-variation d'après la remarque , corollaire p.6.

Si $\sigma = 0$, $W^p(Y)_0^1 \geqq \sum_{s \leqq 1} |Y_s - Y_{s-}|^p$, or $Z_t = \sum_{s \leqq t} |Y_s - Y_{s-}|^p$ est un processus croissant, à accroissements indépendants et stationnaires, et sa mesure de Lévy $M(dx)$ = évidemment $1_{\{|x|\leqq 1\}} . |x|^p . L(dx)$: si l'intégrale diverge, $Z_1 = +\infty$ p.s., et la démonstration est terminée .

Remarque: on aurait pu utiliser le résultat connu suivant lequel, si $\sigma > 0$ ou si l'intégrale diverge, $\limsup_{t \to 0} |X_t|/t^{1/p} = +\infty$ p.s.; par ailleurs, a contrario, toujours d'après la proposition p.5, si $\sigma = 0$ et convergence de l'intégrale, $\lim_{t \to 0} X_t/t^{1/p} = 0$ p.s. (il est cependant plus simple d'utiliser le critère de Khintchine !)

-Pour une h convexe, $h(x)/x^2$ décroissante, j'ai le T I asymptotique sur les sommes de v.a . indépendantes équidistribuées, mais pas sur les P.A.I.

-Additif aux exposés sur la p-variation

Contrairement à la dernière ligne de l'exposé, je sais étendre les résultats à la classe de fonctions (C) ainsi définie:

h ε (C) si h est paire, continue, nulle en 0, convexe et de plus g définie sur R^+ par $g(x) = h(x^{\frac{1}{2}})$ est concave. On pose $\mathcal{L}(x) = h(x)/x^2$.

(remarque: pour la h-variation , le problème ne se pose vraiment que pour une h sur-additive sur R^+, soit $h(x)/x$ croissante; si $h(x) = \sigma(x^2)$, le problème disparait; la condition $\mathcal{L}(x)$ décroissante est donc naturelle)

De même, le processus à accroissements indépendants et stationnaires X_t sera de type (C) si: pas de partie brownienne, pas de sauts d'amplitude supérieure à 1, centré; on note $\bar{h}$ le nombre $\int h(x)L(dx)$.

(remarque: pour l'étude locale, les restrictions faites sur X sont raisonnables; la partie brownienne l'emporte trop largement en 0, et au contraire les grands sauts n'interviennent qu'après un temps >0 p.s.; enfin $h(x)=\sigma(x)$, on peut toujours centrer le processus)

<u>Théorème</u>:(i) ou bien h est telle que $\limsup_{x\to 0^+} \frac{\mathcal{L}(2x)}{\mathcal{L}(x)} < 1$, et alors pour tout processus de type (C) tel que $\bar{h}$ soit fini, $\lim_{t\to 0} h(X_t)/t = 0$ p.s. et $E\{W^h(X)_0^t\} = o(t.\bar{h})$

(ii) ou bien $\limsup_{x\to 0^+} = 1$, et il existe alors un processus de type (C), avec $\bar{h}$ fini et $\limsup_{t\to 0} h(X_t)/t$ infinie p.s., $W^h(X)_0^t$ infini p.s. pour tout t>0.

Reference

[1] - P.W. Millar "Path behavior of processes with stationary independent increments", Z. W-theorie u. verw. Gebiete 17 (1971), p.53-73.

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

RUE RENÉ DESCARTES

67 - STRASBOURG