Séminaire de probabilités (Strasbourg)

PHILIPPE ARTZNER

Échantillons et couples indépendants de points aléatoires portés par une surface convexe

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 6 (1972), p. 1-34
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__1_0>

ECHANTILLONS ET COUPLES INDÉPENDANTS DE POINTS ALÉATOIRES PORTÉS PAR UNE SURFACE CONVEXE

Philippe ARTZNER (*)

Résumé. - L'étude des χ^2 généralisés conduit à chercher des ensembles S dans R^p tels que si le milieu de deux points aléatoires, indépendants, également distribués, portés par S , a même loi que le milieu de deux points aléatoires indépendants portés aussi par S , ces derniers soient eux aussi également distribués. Les surfaces convexes ont cette propriété.

L'étude des formes quadratiques positives aléatoires et la notion de variable aléatoire du χ^2 généralisé, conduit naturellement au problème suivant :

Soit (Y, Z) un couple indépendant de vecteurs aléatoires dans l'espace R^k, $k>1$; si la forme quadratique aléatoire de matrice Y^tY+Z^tZ admet pour loi celle d'un χ^2 généralisé à deux degrés de liberté, c'est-à-dire celle d'une matrice $X_1{}^tX_1 + X_2{}^tX_2$, où (X_1, X_2) est un couple indépendant de vecteurs aléatoires équidistribués dans R^k , est-il vrai que les vecteurs Y et Z , ou au moins les matrices Y^tY et Z^tZ , ont même distribution ?

En termes de lois de probabilité la question est de savoir si, pour trois lois μ, μ', μ'' portées par l'ensemble des matrices x^tx où x est un vecteur de R^k, l'égalité de convolution $\mu * \mu = \mu' * \mu''$ entraîne l'égalité de μ, μ' et μ'' .

Nous sommes conduits à chercher des "ensembles d'unicité" dans R^p , c'est-à-dire des parties boréliennes S de R^p telles que si μ, μ', μ'' sont

(*) Ce travail a été en partie exposé aux Journées Probabilistes de Strasbourg, 1971, et contient les démonstrations des résultats annoncés dans une Note aux Comptes-Rendus ([1]) .

des lois de probabilité sur S, l'égalité $\mu * \mu = \mu' * \mu''$ entraîne l'égalité de μ, μ' et μ''. Nous ne résolvons pas ici le problème initial mais montrons que les surfaces convexes (cf. [2]), sous des conditions très générales, sont des ensembles d'unicité.

<u>Le plan de ce travail est le suivant</u>

Première Partie : CONVOLUTION DE MESURES PORTEES PAR LE GRAPHE D'UNE FONCTION STRICTEMENT CONVEXE

1. INTRODUCTION

Dans R^{p-1} il est facile de trouver trois mesures de probabilité μ , μ' , μ'' , deux à deux distinctes, telles que $\mu * \mu = \mu' * \mu''$. Mais supposons maintenant que μ , μ' , μ'' soient des mesures de probabilité portées par le graphe d'une fonction non affine dans R^{p-1} ; on peut dire que l'égalité $\mu * \mu = \mu' * \mu''$ est une égalité entre mesures "à p dimensions", alors que, prises individuellement, les mesures μ , μ' , μ'' , portées par un graphe, ne "dépendent" que de $(p-1)$ dimensions. On peut alors penser que pour une fonction f bien choisie l'égalité de convolution est assez contraignante pour imposer l'égalité $\mu = \mu' = \mu''$.

<u>Remarque</u>. - Pour $p = 2$ et $f(x) = \cos x$, par exemple, on ne peut espérer atteindre le résultat : soient ε' et ε'' les masses unités placées aux points $(2\pi , 0)$ et $(-2\pi , 0)$ respectivement ; pour toute mesure positive bornée μ portée par le graphe de f on trouve que

$$\mu * \mu = \mu' * \mu'' \quad \text{avec} \quad \mu' = \varepsilon' * \mu \quad , \quad \mu'' = \varepsilon'' * \mu \quad ,$$

les mesures μ , μ' , μ'' étant nécessairement distinctes deux à deux.

Puisque l'opération de convolution de mesures dans R^p fait intervenir avec deux points x , y de R^p , leur somme $x + y$ ou, ce qui revient au même, leur milieu $\frac{1}{2}(x + y)$, nous somme fondés à nous intéresser aux graphes de fonctions convexes, la convexité d'une fonction f s'exprimant précisément en termes de milieux de cordes joignant des points du graphe f .

En rappelant que pour $S \subset R^p$, $2 \cdot S$ désigne l'ensemble des éléments $2 \cdot x$ où x décrit S , nous pouvons énoncer le résultat que nous avons obtenu, au paragraphe suivant.

2. ENONCE DU RESULTAT ET SCHEMA DE LA DEMONSTRATION

PROPOSITION 1. - Soient S le graphe d'une fonction strictement convexe f définie sur un ouvert convexe Ω de R^{p-1} , et μ , μ' , μ'' trois mesures sur S , positives et bornées. Supposons vérifiée l'une des conditions suivantes (où ν , ν' , ν'' désignent les mesures sur Ω , dont les images par l'application $\bar{f} : x \to (x , f(x))$ sont respectivement μ , μ' , μ'') :

i) les mesures μ , μ' , μ'' sont portées respectivement par trois ouverts U , U' , U'' de S , les mesures ν , ν' , ν'' admettant sur les images réciproques par $\bar{f}$ de ces ouverts, des densités continues par rapport à la mesure de Lebesgue, et U étant contenu dans $U' \cap U''$;

ii) les mesures ν , ν' , ν'' sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue et la fonction f admet une forme hessienne non dégénérée, en presque tout point d'un ouvert Ω_o de Ω , tel que $U = \bar{f}(\Omega_o)$ porte la mesure μ .

On peut alors affirmer que si les produits de convolution $\mu * \mu$ et $\mu' * \mu''$ sont égaux au voisinage du graphe $2 \cdot S$ (ou même simplement au voisinage de $2 \cdot U$), alors pour tout borélien B de S on a l'inégalité :

$$(\mu(B))^2 \leq \mu'(B) \cdot \mu''(B) \quad ,$$

et que si, de plus, les masses totales de μ , μ' , μ'' sont égales, ces mesures sont égales.

Remarques. - 1) Si les masses totales $|\mu|$, $|\mu'|$, $|\mu''|$ des trois mesures, vérifient a priori la relation

$$|\mu|^2 = |\mu'| \cdot |\mu''|$$

les mesures normalisées déduites de μ , μ' , μ'' sont égales d'après la fin de la proposition. Il serait intéressant d'obtenir ce résultat sans supposer à priori la relation précédente satisfaite.

2) La proposition précédente établit par exemple que si (X_1 , X_2) est un couple de variables aléatoires réelles indépendantes également distribuées, et (Y , Z) un couple de variables aléatoires réelles indépendantes, toutes les lois étant à densité continue, alors si les <u>deux</u> égalités suivantes sont vraies, en loi :

$$X_1 + X_2 = Y + Z \qquad\qquad X_1^2 + X_2^2 = Y^2 + Z^2$$

on peut affirmer que X_1 , X_2 , Y , Z sont également distribuées.

3) La seconde partie de la condition ii) n'est pas automatiquement vérifiée. On peut en effet trouver sur $I =]0 , 1[$ une fonction strictement convexe g ayant une dérivée seconde presque partout nulle. Prenant alors $\Omega = I^{p-1}$ et $f(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}) = g(x_1) + g(x_2) + \dots + g(x_{p-1})$ on trouve même pour f une forme hessienne presque partout nulle.

Pour construire g il suffit de trouver une loi de probabilité π sur $[0 , 1]$ qui soit

i) non discrète

ii) singulière par rapport à la mesure de Lebesgue

iii) de support fermé $[0 , 1]$.

On prend alors par définition :

$$g(x) = \int_0^x \pi([0 , t])dt \qquad ;$$

la fonction g admet presque partout pour dérivée la fonction continue

$$F(x) = \pi([0 , 1]) \qquad ,$$

et puisque π est singulière la fonction F admet presque partout une dérivée nulle.

Pour construire π on va considérer sur $\Omega = \{0\ ,\ 1\}^{\mathbb{N}}$, la famille des lois de probabilité P_p , $0 < p < 1$, définies ainsi :

P_p est le produit de la loi de Bernouilli : $\overset{(p)}{\underset{0}{+}}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{(1-p)}{\underset{1}{+}}$ placée sur chacune des copies de $\{0\ ,\ 1\}$. Puisque Ω est un produit de compacts l'existence de P_p ne pose pas de problèmes.

Pour chaque p , posons

$$\Omega_p = \{x \in \Omega \ ;\ \lim_n \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = p\} \quad .$$

La loi forte des grands nombres assure que pour le borélien Ω_p on a

$$P_p(\Omega_p) = 1 \quad , \quad \text{alors que} \quad \Omega_p \cap \Omega_{p'} = \emptyset \quad \text{si} \quad p \neq p' \quad .$$

Nous avons ainsi sur Ω une feuille de lois de probabilité deux à deux étrangères, ayant cependant toutes même support fermé, à savoir Ω , produit des supports de chaque loi de Bernouilli.

On sait que par l'application continue de Ω dans $[0\ ,\ 1]$:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \to \sum_{n\geq 1} x_n \cdot 2^{-n} \quad ,$$

la mesure $P_{1/2}$ a pour image la mesure de Lebesgue sur $[0\ ,\ 1]$; les images des P_p , $p \neq \frac{1}{2}$, sont donc des mesures sur $[0\ ,\ 1]$ singulières par rapport à la mesure de Lebesgue, de support fermé $[0\ ,\ 1]$ puisque l'image d'une mesure par une application continue a pour support fermé l'adhérence de l'image du support fermé de la mesure initiale.

On peut aussi établir que les mesures P_p dépendent continument de p : pour toute fonction continue sur Ω , $\int_\Omega f(u)\, dP_p(u)$ est une fonction continue de p .

La démonstration de la proposition se fera selon le schéma suivant :

- l'hypothèse signifie que par l'application φ de $\Omega \times \Omega$ dans $\Omega \times R$, définie comme suit :

$$(x, y) \to \frac{1}{2}(x + y, f(x) + f(y)) \quad ,$$

les mesures $\nu \otimes \nu$ et $\nu' \otimes \nu''$ ont des images égales au voisinage de S (image de la diagonale du produit $\Omega \times \Omega$), ou de U. Puisque f est strictement convexe l'application φ est injective sur la diagonale de $\Omega \times \Omega$ et nous montrerons que tout point (a, a) de $\Omega \times \Omega$ possède un système fondamental de voisinages ouverts W_n qui sont des images réciproques par φ d'un système fondamental de voisinages ouverts de $\varphi(a, a) = (a, f(a))$ dans R^p. On saura donc que $\nu \otimes \nu(W_n) = \nu' \otimes \nu''(W_n)$ pour n grand. Lorsque la condition ii) sera vérifiée on saura que les W_n convergent "régulièrement" vers (a, a)

- pour les densités m, m', m'' de ν, ν', ν'' on déduira de ce qui précède, que, presque partout dans Ω :

$$(m(x))^2 = m'(x)\ m''(x)$$

en utilisant, dans le cas ii), la théorie de la dérivation des fonctions d'ensemble

- l'inégalité de Cauchy-Schwarz suffira alors pour conclure.

Remarque. - La première étape de la démonstration conduit à se demander si deux mesures de Radon μ et μ' sur un espace localement compact X telles que tout point de X possède un système fondamental $(V_i(x))_{i\in I}$, de voisinages ouverts vérifiant

$$\mu(V_i(x)) = \mu'(V_i(x)) \qquad \text{(pour tout } x \text{, tout } i\text{)} ,$$

ne sont pas égales. Il n'en est rien comme nous le montrerons à la fin de ce travail (cf. Annexe).

3. ETUDE DES MILIEUX DES CORDES JOIGNANT DES POINTS DU GRAPHE D'UNE FONCTION STRICTEMENT CONVEXE

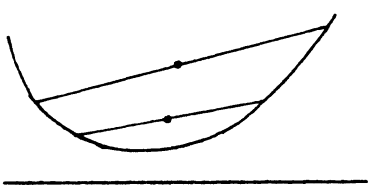
Fixons d'abord quelques notations : si f est une fonction définie sur une partie Ω de R^{p-1}, $\bar{f}$ sera l'application de Ω dans $\Omega \times R$ définie par $\bar{f}(x) = (x , f(x))$, et φ l'application de $\Omega \times \Omega$ dans $\Omega \times R$ définie par

$$(x , y) \to \frac{1}{2}(x + y , f(x) + f(y)) .$$

Pour $x , y \in \Omega$, le segment d'extrémités $\bar{f}(x)$ et $\bar{f}(y)$ sera appelé la corde $(\bar{f}(x) , \bar{f}(y))$, ou encore la corde déterminée par x et y ; la flèche de cette corde sera le nombre

$$\frac{1}{2}(f(x) + f(y)) - f(\frac{x + y}{2}) .$$

Si Ω est une partie convexe de R^{p-1}, et f une fonction strictement convexe dans Ω, toutes les cordes obtenues ont des flèches strictement positives, sauf les cordes réduites à un point ; pour $p = 2$ il est facile de vérifier que deux cordes distinctes ont toujours des milieux distincts, autrement dit que l'application φ est injective modulo l'identification de (x , y) avec (y , x).



Ω

Pour une fonction strictement convexe de plusieurs variables réelles le résultat est plus nuancé :

PROPOSITION 2. - *Soit f une fonction strictement convexe définie sur un ouvert Ω de R^{p-1}. L'application φ de $\Omega \times \Omega$ dans R^p définie par :*

$$\varphi(x , y) = \frac{1}{2}(x + y , f(x) + f(y))$$

a la propriété suivante :

pour tout a de Ω il existe un système fondamental dénombrable (V_n) de voisinages ouverts du point $\varphi(a\ ,\ a) = (a\ ,\ f(a))$ dans R^p , dont les images réciproques par φ forment un système fondamental de voisinages ouverts de $(a\ ,\ a)$ dans $\Omega \times \Omega$.

Si de plus la fonction f possède au point a une forme hersienne non dégénérée, on peut trouver une suite (V_n) et un nombre $\alpha > 0$ tels que, pour tout n assez grand on ait :

$$B(a\ ,\ \frac{\alpha}{n}) \times B(a\ ,\ \frac{\alpha}{n}) \subset \varphi^{-1}(V_n) \subset B(a\ ,\ \frac{3}{n}) \times B(a\ ,\ \frac{3}{n})\quad ,$$

en désignant par $B(a\ ,\ r)$ la boule euclidienne fermée de centre a et de rayon r dans R^{p-1} .

Remarque. - Cette proposition signifie donc que le milieu de la corde joignant deux points $\bar{b}$ et $\bar{c}$ du graphe de f , est voisin d'un point $\bar{a}$ de ce graphe, si et seulement si $\bar{b}$ et $\bar{c}$ sont eux-mêmes voisins de $\bar{a}$; une démonstration intuitive de ce fait s'obtient en plaçant une aiguille dans un bol (vide).

DEMONSTRATION. - a) Etude des flèches des cordes voisines de $(a\ ,\ f(a))$.
Soit $a \in \Omega$ et $r > 0$ assez petit ; définissons l'ensemble $C(r)$ par :

$$C(r) = \{(x\ ,\ y) \in \Omega \times \Omega\ ;\ \|x - a\| = 3r\ \ ,\ \|y - a\| = r\ ,\ [x\ ,\ y] \cap \overset{\circ}{B}(a\ ,\ r) \neq \emptyset\}\ ,$$

en désignant par $\|\ \ \|$ la norme euclidienne dans R^{p-1} .

Nous repérons la variation des flèches au voisinage de a par la fonction g définie ainsi :

$$g(r) = \inf_{(x,y)\in C(r)} \left(\frac{1}{2}(f(x) + f(y)) - f(\frac{x + y}{2})\right)\ .$$

Puisque l'inf est minoré par l'inf calculé sans la condition d'intersection non vide, et que f , convexe dans l'ouvert convexe Ω , y est continue on trouve que g est strictement positive, de limite nulle à l'origine.

Il résulte de ce qui précède que les ensembles

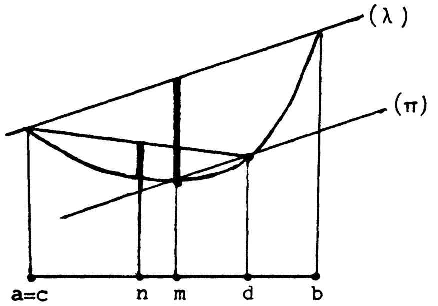
$$V_n = \{\xi \in R^{p-1}, u \in R \ ; \ \|\xi - a\| < \frac{1}{n}, f(\xi) - g(\frac{1}{n}) < u < f(\xi) + g(\frac{1}{n})\}$$

forment une base, dénombrable, de voisinages ouverts de $(a , f(a))$ dans R^p. Leurs images réciproques par φ sont des ensembles de couples de points de Ω déterminant des cordes de flèches petites et de milieux se projetant près de a sur Ω.

b) Passage du local au global : pour montrer que les ouverts $\varphi^{-1}(V_n)$ sont assez petits nous remarquons que si $(x , y) \in \varphi^{-1}(V_n)$, tout segment $[x',y']$ contenant $[x,y]$ a ses extrémités déterminant une corde de flèche plus grande que celle de la corde définie par x et y. De façon précise on établit le

LEMME 1. - *Soit f une fonction réelle convexe sur un intervalle $[a , b]$ qui ne soit pas la restriction à cet intervalle d'une fonction affine. Quels que soient $a \leq c \leq d \leq b$, la flèche de la corde joignant $(a , f(a))$ et $(b , f(b))$ est strictement plus grande que celle de la corde joignant $(c , f(c))$ et $(d , f(d))$, sauf si $a = c$ et $d = b$.*

Il suffit d'établir le lemme dans le cas où $a = c < d < b$.



Posons $2m = a + b$, $2n = a + d$; nous allons montrer que si

$2\alpha = f(a) + f(b) - 2f(m)$

$2\beta = f(a) + f(d) - 2f(n)$, on a $\alpha > \beta$.

Pour cela on note $y = \lambda(x)$, $y = \pi(x)$, les équations des droites passant par $(a , f(a))$ et $(b , f(b))$ d'une part, $(m , f(m))$ et $(d , f(d))$ d'autre part (ceci suppose que $m \neq d$, mais le résultat dans le cas $m = d$ pourra par exemple se déduire du résultat pour $m \neq d$, par continuité).

Nous avons alors

$$\alpha = \lambda(m) - \pi(m) \quad \text{et} \quad \beta \leq \frac{1}{2}(f(a) + f(d)) - \pi(n)$$

puisque la fonction f est convexe et que n est extérieur au segment $[m , d]$. Nous savons donc que $2\beta \leq \lambda(a) - \pi(a)$, n étant le milieu de $[a , d]$, et il nous suffit d'établir que

$$\lambda(a) - \pi(a) < 2(\lambda(m) - \pi(m))$$

c'est-à-dire, puisque

$$2(\lambda(m) - \pi(m)) = \lambda(a) + \lambda(b) - \pi(a) - \pi(b)$$

que l'on a $\lambda(b) - \pi(b) > 0$. Par convexité de f on sait que $\lambda(b) \geq \pi(b)$; si on avait $\lambda(b) = \pi(b)$, la fonction f serait affine sur $[m , b]$ et l'on aurait donc nécessairement les relations suivantes :

i) $\lambda(a) > \pi(a)$

ii) $\beta < \frac{1}{2}(\lambda(a) + \pi(d)) - \pi(n)$ si $d > m$

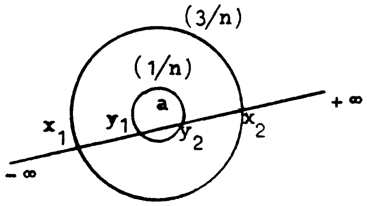
iii) si $d < m$, il n'est pas exclu que f soit affine sur le segment $[a , d]$ et alors $\beta = 0 < \alpha$.

A l'aide de ii) on trouve que $\beta < \alpha$ si $d > m$, et le lemme est ainsi démontré.

c) <u>Etude des ouverts</u> $\varphi^{-1}(V_n)$ <u>dans le cas général</u>.

Nous allons montrer que pour n assez grand, $\varphi^{-1}(V_n)$ est contenu dans le produit $B(a , \frac{3}{n}) \times B(a , \frac{3}{n})$.

Soit $(x , y) \in \varphi^{-1}(V_n)$; nous savons que le milieu du segment $[x , y]$ appartient à $\overset{\circ}{B}(a , \frac{1}{n})$ et que la flèche de la corde joignant les points $\bar{x} = (x , f(x))$ et $\bar{y} = (y , f(y))$ du graphe de f , est strictement inférieure à $g(\frac{1}{n})$. Dans le seul cas intéressant où $x \neq y$, nous notons les intersections de la droite passant par x et y avec les sphères de centre a et de rayons $\frac{1}{n}$ et $\frac{3}{n}$, selon la figure :



dans l'ordre, figurent $-\infty$, x_1 , y_1 y_2 , x_2 , $+\infty$ avec les relations

$\|x_1 - a\| = \|x_2 - a\| = \frac{3}{n}$

$\|y_1 - a\| = \|y_2 - a\| = \frac{1}{n}$, $y_1 \neq y_2$.

La distance de y_1 à y_2 est majorée par le diamètre $\frac{2}{n}$ de $B(a , \frac{1}{n})$, alors que $\|x_1 - y_1\|$ et $\|x_2 - y_2\|$ sont minorées par $\frac{2}{n}$; si donc le point x était extérieur à $B(a , \frac{3}{n})$, par exemple situé sur $]-\infty , x_1]$, le point y serait obligatoirement sur la demi-droite $]y_2 , +\infty[$, puisque le milieu de $[x , y]$ appartient à $]y_1 , y_2[$.

Dans cette hypothèse on trouverait donc que la flèche de la corde $[\bar{x} , \bar{y}]$ serait strictement plus grande que celle de la corde $[\bar{f}(x_1) , \bar{f}(y_2)]$, c'est-à-dire strictement plus grande que $g(\frac{1}{n})$, par définition de la fonction g . Cette contradiction établit le résultat énoncé au début de cet alinéa c).

d) <u>Etude des ouverts $\varphi^{-1}(V_n)$ dans le cas où f admet en a une forme hessienne non dégénérée</u>.

Nous supposons que pour $h \in R^{p-1}$, assez petit, on puisse écrire :

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + Q(h) + \varepsilon(h) \, . \|h\|^2$$

où L est une forme linéaire, Q une forme quadratique, positive puisque f est convexe, non dégénérée, et où $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Nous noterons respectivement m et M le minimum et le maximum de Q sur la sphère unité de R^{p-1} ; on a $0 < m \leq M < +\infty$.

Nous allons d'abord montrer qu'il existe $\gamma > 0$ tel que pour $r > 0$ assez petit on ait $g(r) > \gamma r^2$.

Dans le calcul de $g(r)$ interviennent des points x et y dont la distance est toujours supérieure à $2r$; pour de tels points, on trouve, puisque

$$\frac{1}{2}(f(x)+f(y)) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) = Q\left(\frac{x-y}{2}\right) + \frac{1}{2}(\varepsilon(x-a)\|x-a\|^2 + \varepsilon(y-a)\|y-a\|^2)$$
$$- \varepsilon\left(\frac{x+y}{2}-a\right)\left\|\frac{x+y}{2}-a\right\|^2 ,$$

une mineration du premier membre de l'égalité. Plus précisément, pour tout r tel que $\sup_{\|h\|<3r}\|\varepsilon(h)\| < \frac{m}{4}$, on obtient l'inégalité $g(r) \geq \frac{1}{2} mr^2$.

Montrons ensuite, inversement, qu'il existe $\beta > 0$ tel que, pour r assez petit, les flèches des cordes $[\bar{f}(x) , \bar{f}(y)]$, avec x et y dans $B(a , r)$, soient inférieures à βr^2 . Puisque l'on a :

$$\frac{1}{2}(f(x) + f(y)) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq Q\left(\frac{x-y}{2}\right) + \sup_{\|h\|\leq r}\|\varepsilon(h)\| \cdot 2r^2 ,$$

on trouve pour tout r tel que $\sup_{\|h\|<r}\|\varepsilon(h)\| \leq M$, que

$$\frac{1}{2}(f(x)+f(y)) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 2M r^2 .$$

On peut alors conclure : soit $\alpha = \sqrt{\frac{m}{4M}}$; pour n assez grand on trouve que

$$B\left(a , \frac{\alpha}{n}\right) \times B\left(a , \frac{\alpha}{n}\right) \subset \varphi^{-1}(V_n) .$$

Remarque. - On a utilisé sur ε la seule propriété suivante : pour r assez petit, $\sup_{\|h\|<r}\|\varepsilon(h)\| < \frac{m}{4}$.

La proposition 2 est alors complètement démontrée. Si nous reprenons le paragraphe " schéma de la démonstration (de la proposition 1)" , nous voyons que nous avons un problème du type suivant : deux mesures π et π' sur un espace X ont même image par une certaine application φ de X dans un espace Y ; circonstances particulières : X est un espace produit, π et π' sont des mesures produits, φ est injective sur une partie Δ de X, remarquable puisque c'est la diagonale de X, et de plus φ est "presque injective" au voisinage de Δ, la proposition 2 servant à préciser cette expression. L'hypothèse d'existence de densités va nous permettre d'établir que π et π' sont égales. Nous laisserons au lecteur le soin d'établir un énoncé résumant la démonstration du paragraphe suivant.

4. RELATION ENTRE LES DENSITES DE ν , ν' , ν''

Dans l'hypothèse i) la proposition 1, les densités m , m' et m'' de ν , ν' , ν'' sont continues sur les ouverts $W = \bar{f}^{-1}(U)$, $W' = \bar{f}'^{-1}(U')$, $W'' = \bar{f}''^{-1}(U'')$ respectivement.

Pour pouvoir raisonner de façon générale nous conviendrons, dans l'hypothèse ii) de désigner aussi par W l'ouvert Ω_o .

Soit a un point quelconque de W , et soit (V_n) une suite de voisinages ouverts de $(a , f(a))$ comme dans la proposition 2. Pour n assez grand , $2.V_n$ est contenu dans le voisinage ouvert de $2.U$ sur lequel $\mu * \mu$ et $\mu' * \mu''$ sont des mesures égales ; posons $W_n = \varphi^{-1}(V_n)$: pour n assez grand nous trouvons que $\nu \otimes \nu(W_n) = \nu' \otimes \nu''(W_n)$; de ces relations nous allons déduire que pour presque tout a de W on a l'égalité

$$(m(a))^2 = m'(a) \, . \, m''(a) \quad .$$

Nous notons pour cela que $(x , y) \to m(x) \, . \, m(y)$ et $(x , y) \to m'(x) \, . \, m''(y)$ sont des densités de $\nu \otimes \nu$ et $\nu' \otimes \nu''$ par rapport à la mesure de Lebesgue produit sur $\Omega \times \Omega$. Si m , m' , m'' sont continues dans W , l'égalité ci-dessus est évidente pour tout point a de W .

Dans l'hypothèse ii) nous aurons recours aux résultats de la théorie des dérivées de mesures, tels qu'on peut les trouver dans l'ouvrage [3], aux pages duquel nous renverrons.

D'après la fin de la proposition 2, nous savons que pour presque tout a de W (égal à Ω_o ici), les ouverts $W_n = \varphi^{-1}(V_n)$ convergent régulièrement vers (a , a) ([3] p. 221, définition 2), puisque le rapport des volumes euclidiens de $B(a , \frac{3}{n}) \times B(a , \frac{3}{n})$ et de $B(a , \frac{\alpha}{n}) \times B(a , \frac{\alpha}{n})$ est indépendant de n .

Nous allons établir que pour presque tout a de W , le point (a , a) est un point de Lebesgue pour les fonctions $m \otimes m : (x , y) \to m(x) . m(y)$, et $m' \otimes m'' : (x , y) \to m'(x) . m''(y)$ ([3] p. 220, définition 1).

Il en résultera, d'après le théorème 6 de [3] p. 222, et l'égalité $\nu \otimes \nu(W_n) = \nu' \otimes \nu''(W_n)$ valable pour n grand, que l'égalité $(m(a))^2 = m'(a) . m''(a)$ sera valable pour presque tout a de W .

Puisque nous savons ([3] p. 220, théorème 5), que presque tout point de W est point de Lebesgue de m , m' et m'' il nous suffit d'établir le lemme suivant, dans l'énoncé duquel nous utiliserons des notations analogues à celle de [3] .

LEMME 2. - Si x_o est un point de Lebesgue pour la fonction μ-sommable φ et y_o un point de Lebesgue pour la fonction ν-sommable ψ , alors si les nombres $\varphi(x_o)$ et $\psi(y_o)$ sont finis, (x_o , y_o) est presque sûrement un point de Lebesgue pour la fonction $\mu \otimes \nu$-sommable $\varphi \otimes \psi : (x , y) \to \varphi(x) . \psi(y)$.

Nous n'établirons le lemme que dans le cas (suffisant ici) où μ et ν sont les mesures de Lebesgue d'espaces euclidiens R^p et R^q .

Soit $C_{\varepsilon_n}(x_o , y_o)$ un ensemble de Vitali contenant (x_o , y_o) , de volume inférieur à ε_n ; il est le produit de cubes $A_\varepsilon(x_o)$ et $B_{\varepsilon'}(y_o)$ de volumes inférieurs à $\varepsilon_n^{\frac{p}{p+q}}$ et $\varepsilon_n^{\frac{q}{p+q}}$ respectivement.

Quand ε_n tend vers zéro, la suite des $A_\varepsilon(x_o)$ converge régulièrement vers x_o et celle des $B_\varepsilon(y_o)$ vers y_o. Ces points étant des points de Lebesgue on trouve que

$$\varphi(x_o) = \lim \frac{1}{\mu(A_\varepsilon(x_o))} \int_{A_\varepsilon(x_o)} \varphi(x)\ \mu(dx) \quad ,$$

$$0 = \lim \frac{1}{\mu(A_\varepsilon(x_o))} \int_{A_\varepsilon(x_o)} |\varphi(x) - \varphi(x_o)|\ \mu(dx)$$

$$0 = \lim \frac{1}{\nu(B_\varepsilon(y_o))} \int_{B_\varepsilon(y_o)} |\psi(y) - \psi(y_o)|\ \nu(dy) \quad .$$

Ecrivant l'égalité

$$\varphi(x)\ \psi(y) - \varphi(x_o)\ \psi(y_o) = \varphi(x)(\psi(y) - \psi(y_o)) + \psi(y_o)(\varphi(x) - \varphi(x_o))$$

on déduit le lemme du théorème de Lebesgue-Fubini.

Nous avons ainsi établi, avec les notations de la proposition 1, que pour presque tout point a de l'ouvert W de Ω, tel que $\bar{f}(W) = U$ porte la mesure μ, les densités m, m', m'' de ν, ν', ν'' vérifient l'égalité

$$(m(a))^2 = m'(a) . m''(a) .$$

5. DEMONSTRATION DU RESULTAT

Nous sommes en mesure d'établir la proposition 1. Soit Σ la partie borélienne de $W(= \bar{f}^{-1}(U))$, sur laquelle m ne s'annule pas. Pour tout borélien C de Ω, ne rencontrant pas Σ, on a évidemment

$$(\nu(C))^2 \leq \nu'(C) . \nu''(C) .$$

Pour établir cette inégalité pour tout borélien de Ω, il suffit donc de l'établir lorsque C est contenu dans Σ.

On peut trouver une partie mesurable Σ_o de Σ et une fonction mesurable strictement positive α sur Σ_o , de telle façon que l'ensemble $\Sigma - \Sigma_o$ soit de mesure nulle et que sur Σ_o on ait

$$m' = \alpha \cdot m \qquad m'' = \frac{1}{\alpha} \cdot m \quad .$$

Pour établir l'inégalité nous pouvons supposer que C est contenu dans Σ_o ; d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous obtenons

$$\left(\int_C \sqrt{\alpha m} \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cdot m}\right)^2 \leq \nu'(C) \cdot \nu''(C) \quad ,$$

c'est-à-dire $(\nu(C))^2 \leq \nu'(C) \cdot \nu''(C)$.

Supposons maintenant les masses totales de ν , ν' , ν'' égales, et prenons $C = \Sigma_o$: nous avons le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; il en résulte qu'il existe une constante c avec presque partout dans Σ_o

$$\frac{1}{\alpha} \cdot m = c\alpha \cdot m$$

et donc que m , m' , m'' sont presque partout égales dans Σ_o ; puisque cet ensemble porte la mesure ν , nous en déduisons que ν , ν' , ν'' sont égales dans Ω_o ; la transcription en termes de μ , μ' , μ'' est immédiate et la proposition 1 est ainsi établie.

Remarque. - Dans ce dernier cas, l'égalité de convolution s'étend à tout l'espace R^p naturellement. Peut-être peut-on résoudre le problème posé dans la première remarque suivant l'énoncé de la proposition 1 en cherchant à établir directement que si une égalité $\mu * \mu = \mu' * \mu''$ (μ , μ' , μ'' portées par S) a lieu au voisinage de $2 \cdot S$, elle s'étend automatiquement à R^p tout entier.

Seconde Partie : CONVOLUTION DE MESURES PORTEES PAR UNE SURFACE CONVEXE

1. INTRODUCTION

Nous allons étendre le résultat de la première partie à des sous-ensembles de R^p localement "représentables" comme des graphes de fonctions strictement convexes. Pour cela nous aurons à composer les opérations de restriction et de convolution de mesures, pas toujours dans le même ordre et donc à comparer les résultats. Nous devrons aussi définir des ensembles et des mesures suffisamment réguliers.

2. PREMIERES PROPRIETES DES SURFACES CONVEXES

A la différence de la note [1] nous n'utiliserons que les surfaces convexes complètes, selon BUSEMANN ([2]) .

DEFINITION 1. - On appelle surface convexe dans R^p , $p > 1$, la frontière supposée non vide et connexe, d'un ensemble convexe d'intérieur non vide.

On démontre dans [2] qu'une surface convexe de R^p est homéomorphe soit à la sphère unité S^{p-1} de R^p , soit à R^{p-1} , soit à un produit $R^r \times S^{p-1-r}$ avec $1 \leq r \leq p-2$.

Dans [1] on s'intéresse aux parties ouvertes des surfaces convexes ; les graphes de fonctions convexes entrent dans ce cadre, comme nous le montrera le lemme 4 .

Soit K un ensemble convexe ; on appelle cône asymptote de K en l'un de ses points a , la réunion des demi-droites fermées d'extrémité a , contenues dans K . Les cônes asymptotes en deux points différents de K se déduisent l'un de l'autre par translation, si K est fermé, comme le montre le

LEMME 3. - <u>Soient</u> K <u>un ensemble convexe et fermé,</u> D_a <u>et</u> D_b <u>deux demi-droites parallèles et de même sens, issues de deux points</u> a <u>et</u> b <u>de</u> K ; <u>si</u> D_a <u>est contenue dans</u> K <u>il en est de même de</u> D_b .

En effet pour tout $b' \in D_b$, et tout voisinage V de b' il existe un point a' de D_b tel que le segment $[a' , b]$ rencontre V ; puisque K est supposé convexe et fermé le lemme est établi.

LEMME 4. - <u>Soient</u> S <u>une surface convexe de</u> R^p <u>et</u> G <u>le graphe d'une fonction continue</u> f <u>définie sur un ouvert convexe</u> Ω <u>de</u> R^{p-1} . <u>On peut affirmer que</u> f <u>ou</u> $-f$ <u>est une fonction convexe et que</u> G <u>est une partie ouverte de</u> S .

DEMONSTRATION. - Pour tout x de $\Omega \in R^{p-1}$, la droite $\{x\} \times R$ rencontre l'ouvert convexe C dont S est la frontière, selon un intervalle dont $(x , f(x))$ est un point frontière. D'après le lemme précédent deux cas seulement sont possibles :

- tous ces intervalles sont de la forme $](x , f(x)) , + \infty [$
- tous ces intervalles sont de la forme $](x , g(x)) , (x , h(x))[$.

Dans le premier cas la convexité de $C \cup S$ prouve immédiatement la convexité de f .

Dans le second cas nous notons, toujours d'après la convexité de $C \cup S$, que g est une fonction convexe sur Ω , donc continue, et h une fonction concave sur Ω , donc continue elle aussi. Puisque pour tout x de Ω on a simultanément

$$g(x) < h(x) \qquad , \qquad f(x) = g(x) \text{ ou } f(x) = h(x) \quad ,$$

on conclut que, dans Ω , $f = g$ ou $f = h$.

La fin du lemme peut d'établir par des considérations géométriques de même type, mais c'est une conséquence directe du théorème de l'invariance du domaine de BROUWER. Montrons le dans cas où S est homéomorphe à R^{p-1} ; il suffit d'établir que dans un homéomorphisme transformant S en R^{p-1} , G est transformé en un ouvert de R^{p-1} et donc cette image de G est homéomorphe à un ouvert de R^{p-1} ; or, f étant continue, G est homéomorphe à l'ouvert Ω .

Nous appellerons surface strictement convexe une surface convexe dont trois points distincts quelconques ne sont jamais alignés.

Nous pourrons exprimer qu'une surface convexe est localement analogue à un graphe de fonction convexe à l'aide de la

DEFINITION 2. - On appelle carte convexe (resp. strictement convexe) dans R^p , la donnée (u , Ω , f) d'une transformation linéaire isométrique u de R^p dans lui-même, d'un ouvert convexe non vide Ω de R^{p-1} , et d'une fonction convexe (resp. strictement convexe) f définie dans Ω . L'ensemble $u^{-1}(\bar{f}(\Omega))$ est appelé le support de la carte (u , Ω , f).

L'étude locale d'une surface convexe se fonde alors sur le résultat (1.12) de [2] , qui est le

LEMME 5. - Soit S une surface convexe de R^p . Pour tout point a de S et tout voisinage ouvert U de a dans R^p , convexe, assez petit, il existe une carte convexe dont le support égale $U \cap S$.

Le lemme 4 assure inversement que si le support d'une carte convexe est contenu dans une surface convexe, c'est un ouvert de celle-ci.

Du lemme 5 nous déduisons que si G est une partie ouverte d'une surface convexe S , telle que trois points de G ne soient jamais alignés, alors tout point a de G est extrêmal dans l'enveloppe convexe fermée $\bar{C}$ de S : il suffit de trouver une carte strictement convexe dont le support V contienne a , et soit de la forme $U \cap S$, U voisinage de a dans R^p : on ne peut pas avoir $a = \alpha a' + \beta a''$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, $a' \in U \cap \bar{C}$ et $a'' \in U \cap \bar{C}$, et cette égalité est donc impossible avec $a' \in \bar{C}$, $a'' \in \bar{C}$.

3. CONVOLUTION ET RESTRICTION DE MESURES PORTEES PAR UNE SURFACE CONVEXE

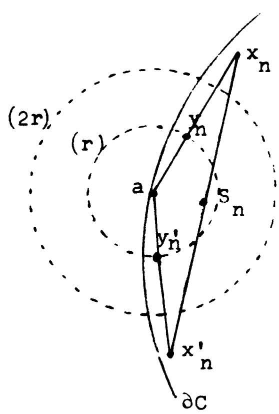
Pour pouvoir utiliser le résultat de la première partie il convient de montrer que si μ et ν sont deux mesures portées par une surface convexe S, les restrictions de μ et ν à un voisinage d'un point a de S, déterminent le produit de convolution $\mu * \nu$ au voisinage du point $2 \cdot a$.

La clef de la démonstration est la propriété géométrique suivante :

LEMME 6. - _Soit_ a _un point de la frontière d'un ensemble convexe_ C _de_ R^p, _d'intérieur non vide. Si_ a _est un point extrêmal de l'adhérence_ $\bar{C}$ _de_ C, _on peut affirmer que pour tout voisinage_ U _de_ a _dans_ R^p, _il existe un voisinage_ V _de_ a _dans_ R^p _ayant la propriété suivante :_

pour tout s _dans_ V, _l'intersection de_ $\bar{C}$ _et de son symétrique par rapport à_ s, _est contenue dans_ U.

DEMONSTRATION. - En raisonnant par l'absurde on trouverait un point a de la frontière ∂C de C, un nombre $r > 0$, une suite s_n de points de la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(a, r)$, de limite a, et deux suites (x_n) et (x'_n) de points de $\bar{C}$, symétriques deux à deux par rapport à s_n, n variant, et n'appartenant ni les uns ni les autres à $B(a, 2r)$:



$$2s_n = x_n + x'_n$$

$$x_n - a = \lambda_n(y_n - a), \quad \lambda_n \geq 2, \quad \|y_n - a\| = r$$

$$x'_n - a = \lambda'_n(y'_n - a), \quad \lambda'_n \geq 2, \quad \|y'_n - a\| = r.$$

Quitte à extraire par deux fois une sous-suite, on peut supposer, la boule $B(a, r)$ étant compacte, que les suites y_n et y'_n définies par les égalités ci-dessus, ont des limites y et y' ; nous obtiendrons alors une contradiction en montrant que $2a = y + y'$: le point a ne sera pas extrêmal dans $\bar{C}$.

Il nous faut montrer que les deux circonstances suivantes sont exclues

∘ les vecteurs $y - a$ et $y' - a$ sont linéairement indépendants : pour $n \to \infty$ les coordonnées de $s_n - a$ par rapport à la base $(y_n - a , y'_n - a)$ tendant vers les coordonnées $(0 , 0)$ de $\lim_n s_n$ par rapport à $y - a$ et $y' - a$: c'est impossible puisque $\lambda_n \geq 2$, $\lambda'_n \geq 2$;

∘ les vecteurs y et y' sont confondus : puisque

$$\|s_n - a\|^2 = \left(\frac{\lambda_n}{2}\right)^2 \|y_n - a\|^2 + \left(\frac{\lambda'_n}{2}\right)^2 \|y'_n - a\|^2 + \frac{1}{2} \lambda_n \lambda'_n \langle y_n - a , y'_n - a\rangle$$

on trouve encore une contradiction, le produit scalaire du second membre ayant pour limite r^2 , et le second membre une limite inférieure au moins égale à $3r^2$.

Nous avons ainsi établi que y et y' sont symétriques par rapport à a .

Du lemme précédent, nous déduisons, en notant $\mu|_Y$ la restriction d'une mesure μ définie sur un espace X à un sous-espace Y de X , le

COROLLAIRE 1. - <u>Soient</u> C <u>un ouvert convexe de</u> R^p <u>et</u> a <u>un point frontière de</u> C , <u>extrêmal dans</u> $\overline{C}$. <u>Pour tout voisinage</u> U <u>de</u> a <u>dans</u> R^p <u>il existe un voisinage ouvert</u> V <u>de</u> a <u>dans</u> R^p , <u>tel que pour tout couple</u> (μ_1 , μ_2) <u>de mesures positives et bornées sur</u> $\overline{C}$, <u>on ait l'égalité</u> :

$$\mu_1 * \mu_2|_{2.V} = (\mu_1|_U * \mu_2|_U)|_{2.V} .$$

Notons en effet σ l'application $(x , y) \to x + y$ de $\overline{C} \times \overline{C}$ dans $\overline{C} + \overline{C}$. Le lemme permet, U étant donné, de trouver un voisinage ouvert V de a dans R^p , tel que $\sigma^{-1}(2.V)$ soit contenu dans $U \times U$: si $x \in \overline{C}$, $y \in \overline{C}$, $x + y \in 2 . V$, alors $x \in U$ et $y \in U$.

On trouve par conséquent pour tout borélien B contenu dans $2.V$, les relations :

$$\mu_1 * \mu_2(B) = \mu_1 \otimes \mu_2(\sigma^{-1}(B)) = (\mu_1 \otimes \mu_2)_{|U \times U}(\sigma^{-1}(B))$$

$$\mu_1 * \mu_2(B) = \mu_{1|U} \otimes \mu_{2|U}(\sigma^{-1}(B)) = \mu_{1|U} * \mu_{2|U}(B) \quad .$$

COROLLAIRE 2. - <u>Soient</u> μ , μ' , μ'' <u>trois mesures positives bornées sur une surface convexe</u> S , <u>telles que les produits de convolution</u> $\mu * \mu$ <u>et</u> $\mu' * \mu''$ <u>soient égaux au voisinage d'un ensemble</u> $2.T$, <u>où</u> T <u>est une partie ouverte de</u> S , <u>portant la mesure</u> μ <u>et dont trois points distincts ne soient jamais alignés</u>. <u>Pour tout ouvert</u> G <u>de</u> S <u>on peut affirmer que si</u> π , π' , π'' <u>désignent les restrictions de</u> μ , μ' , μ'' <u>à</u> $T \cap G$, <u>les produits de convolution</u> $\pi * \pi$ <u>et</u> $\pi' * \pi''$ <u>sont égaux au voisinage de</u> $2.(T \cap G)$.

On peut en effet écrire $T \cap G = S \cap U$ où U est un ouvert de R^p , tel que $\mu * \mu$ et $\mu' * \mu''$ aient même restriction à l'ouvert $2.U$. Le corollaire précédent montre que pour tout a de $G \cap T$ il existe un voisinage ouvert $V(a)$ de a dans R^p , tel que

i) $V(a) \subset U$.

ii) $\mu * \mu_{|2.V(a)} = (\mu_{|T\cap G} * \mu_{|T\cap G})_{|2.V(a)}$

iii) $\mu' * \mu''_{|2.V(a)} = (\mu'_{|T\cap G} * \mu''_{|T\cap G})_{|2.V(a)}$

L'ouvert $V = \bigcup_{a \in T \cap G} V(a)$ est un voisinage de $T \cap G$, contenu dans U et, puisque $\mu * \mu$ et $\mu' * \mu''$ sont égales sur $2.U$, on a :

$$\pi * \pi_{|2.V} = \mu * \mu_{|2.V} = \mu' * \mu''_{|2.V} = \pi' * \pi''_{|2.V} \quad ,$$

ce qui établit le corollaire.

<u>Remarque</u>. - Le cas où $T = G$ est plus particulièrement intéressant.

4. DIFFERENTIABILITE DES SURFACES CONVEXES

Nous allons dans ce paragraphe justifier une définition de mesures à densités continues sur une surface convexe, généralisant la condition i) de la proposition 1 de la première partie. L'hypothèse de convexité intervient de façon si remarquable que nous referons dans notre cadre, une théorie qui est en fait celle des mesures lebesguiennes.

Par une étude géométrique sont établies dans [2] les propriétés suivantes pour une fonction convexe f définie sur un ouvert convexe Ω de R^{p-1} :

a) f est différentiable en $a \in \Omega$, si le graphe de f admet en $(a, f(a))$ un seul hyperplan d'appui et seulement si l'ensemble des points situés au-dessus du graphe de f, admet au point $(a, f(a))$ un seul hyperplan d'appui.

b) si f est différentiable dans Ω, elle y est continûment différentiable.

Remarque. - A propos d'hyperplans d'appui nous signalerons le facile

LEMME 7. - *Soient C un ensemble convexe, V un ensemble ouvert et a un point de $C \cap V$; si un hyperplan H passant par a est un hyperplan d'appui de $C \cap V$, c'est aussi un hyperplan d'appui de C.*

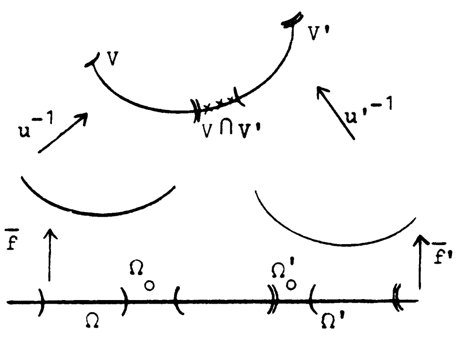
Pour comparer la "différentiabilité" de diverses cartes convexes nous établissons le

LEMME 8. - *Soient (u, Ω, f) et (u', Ω', f') deux cartes convexes de supports V et V' tels que $V \cap V'$ soit une partie ouverte de $V \cap V'$, et μ une mesure positive et bornée sur $V \cap V'$. On a les résultats :*

i) si f est différentiable au point a de $\Omega_o = \overline{f}^{-1} \circ u(V \cap V')$ alors f' est différentiable au point a' de $\Omega'_o = \overline{f}'^{-1} \circ u'(V \cap V')$ défini par l'égalité $u^{-1}(\overline{f}(a)) = u'^{-1}(\overline{f}'(a'))$.

ii) si f est différentiable dans Ω_o elle l'est continûment et il en est de même de f' dans Ω'_o .

iii) dans l'hypothèse de ii) on peut affirmer que si l'image de μ par $\bar{f}^{-1} \circ u$ admet dans Ω_o une densité continue, il en est de même de l'image de μ par $\bar{f}'^{-1} \circ u'$ dans Ω'_o .



DEMONSTRATION. - i) Soit H' un hyperplan d'appui du graphe de f' , passant par le point $\bar{f}'(a')$; son image par $u \circ u'^{-1}$ est un hyperplan d'appui H du graphe de f restreinte à Ω_o , passant par $\bar{f}(a)$, donc aussi du graphe de la restriction g de f à un voisinage ouvert convexe de a dans Ω_o ; puisque g , comme f , est différentiable en a , cet hyperplan H est bien déterminé et H' est bien déterminé lui aussi : f' est différentiable en a' .

ii) le résultat b) cité plus haut montre que sous l'hypothèse de ii) la fonction f est de classe C^1 dans Ω_o et donc que $V \cap V'$ est une sous-variété de classe C^1 de R^p , de codimension 1 ; il en est de même du graphe de la restriction de f' à Ω'_o , et, d'après le théorème des fonctions implicites, la fonction f' est alors de classe C^1 dans Ω'_o puisque la restriction à $\bar{f}'(\Omega'_o)$ de la projection p de R^p sur $R^{p-1} \times \{0\}$ y est de rang maximum, la fonction f étant convexe l'ouvert Ω'_o . Il est plus rapide en fait d'appliquer à nouveau les résultats de a) et b), dans cet ordre, à f' .

iii) l'application $h = p \circ u' \circ u^{-1} \circ \bar{f}$ est, sur Ω_o, de classe C^1, ainsi que son inverse, définie sur Ω'_o. Si la mesure $\bar{f}^{-1} \circ u(\mu)$ admet une densité continue m dans Ω_o, son image par h admet la densité continue $(m \circ h^{-1}) \cdot |\mathrm{Jac}\ h^{-1}|$.

PROPOSITION 3. - Soient S une surface convexe de R^p, U un ouvert de S, μ une mesure positive et bornée sur S, (V_i) un recouvrement (ouvert nécessairement) de U par des supports de cartes convexes (u_i, Ω_i, f_i). Supposons que :

i) pour chaque i, f_i soit différentiable dans Ω_i.

ii) pour chaque i, l'image de la restriction μ_i de μ à V_i, par l'application $\bar{f}_i^{-1} \circ u$, soit à densité continue dans Ω_i.

On peut alors affirmer que U est une sous-variété de classe C^1 de R^p, et que pour toute carte convexe (u, Ω, f) de support V contenu dans U on a les propriétés :

i) f est continûment différentiable dans Ω.

ii) l'image par $\bar{f}^{-1} \circ u$ de la restriction π de μ à V est à densité continue dans Ω.

DEFINITION 3. - On dira qu'une mesure μ positive et bornée sur une surface convexe S est à densité continue dans un ouvert U de S, s'il existe une famille de cartes convexes (u_i, Ω_i, f_i) dont les supports recouvrent U, et qui vérifient avec μ les conditions i) et ii) de la proposition précédente.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION. - Puisque, pour tout i, $V_i \cap V$ est ouvert dans V_i et dans V, il suffit d'établir que si $V_i \cap V \neq \emptyset$, f est différentiable dans l'ouvert $\Omega_o = \bar{f}^{-1} \circ u(V \cap V_i)$ et que l'image par $\bar{f}^{-1} \circ u$ de la restriction de π à $V \cap V_i$ est à densité continue dans Ω_o, ce qui résulte du lemme précédent.

En vue de les distinguer de celles étudiées au paragraphe suivant nous appellerons surface convexe de type 1 les surfaces convexes qui sont des sous-variétés de classe C^1 de R^p. Le lemme 4 et la proposition 3 permettent de les caractériser en termes de cartes convexes différentiables.

5. ENSEMBLES DE MESURE NULLE SUR UNE SURFACE CONVEXE

Puisqu'il existe des surfaces convexes qui ne sont pas des sous-variétés de classe C^1 on ne peut pas y définir les ensembles "de mesure nulle" à l'aide d'une mesure lebesguienne : par ailleurs utiliser la mesure donnée par la courbure de Gauss (cf. [2] p. 25-26) amènerait à se poser la question : le support de la partie singulière de cette mesure est-il "de mesure nulle" ?

Nous démontrerons un lemme d'un type déjà vu dans le cas différentiable :

LEMME 9. - Soient (u , Ω , f) et (u' , Ω' , f') deux cartes convexes de support V et V', telles que $V \cap V'$ soit un ouvert de V et de V'. Soient B une partie mesurable de $V \cap V'$ et μ une mesure positive et bornée sur $V \cap V'$. On a les résultats :

i) si l'ensemble $C = \bar{f}^{-1} \circ u\,(B)$ est de mesure nulle dans $\Omega_o = \bar{f}^{-1} \circ u\,(V \cap V')$, il en est de même de l'ensemble $C' = \bar{f}'^{-1} \circ u'\,(B)$ dans $\Omega'_o = \bar{f}'^{-1} \circ u'\,(V \cap V')$.

ii) si l'image de μ par $\bar{f}^{-1} \circ u$ est absolument continue dans Ω_o, il en est de même de l'image de μ par $\bar{f}'^{-1} \circ u'$ dans Ω'_o.

DEMONSTRATION. - Puisque $\bar{f}$ et $\bar{f}'$ sont des homéomorphismes de Ω et Ω' sur $\bar{f}(\Omega)$ et $\bar{f}'(\Omega')$ respectivement, l'application $p \circ u' \circ u^{-1} \circ \bar{f}$, où p désigne la projection de R^p sur $R^{p-1} \times \{0\}$, est un homéomorphisme de Ω_o sur Ω'_o, qui échange C et C'. Ceci ne suffirait pas à assurer que C' soit de mesure nulle, mais nous remarquons que f étant convexe sur l'ouvert Ω, l'application $\bar{f}$ est localement lipschitzienne et donc aussi l'application $p \circ u' \circ u^{-1} \circ \bar{f}$ de Ω_o sur Ω'_o ; l'image par cette dernière application d'une partie C de mesure nulle dans Ω_o est alors une partie de mesure nulle dans Ω'_o : le point i) est établi.

Pour établir ii) il suffit de noter que l'application inverse, soit $p \circ u \circ u'^{-1} \circ \bar{f}'$ de Ω'_o sur Ω_o est elle aussi localement lipschitzienne, et d'appliquer le critère d'absolue continuité fourni par le théorème de Radon-Nikodym.

PROPOSITION 4. - Soient S une surface convexe, U un ouvert de S, B une partie mesurable de S, μ une mesure positive et bornée sur S, (V_i) un recouvrement (ouvert nécessairement) de U par des supports de cartes convexes (u_i , Ω_i , f_i). Supposons que :

i) pour tout i, l'image par $\bar{f}_i^{-1} \circ u_i$ de $B \cap V_i$ soit de mesure nulle dans Ω_i.

ii) pour tout i, l'image par $\bar{f}_i^{-1} \circ u_i$ de la restriction μ_i de μ à V_i soit absolument continue dans Ω_i.

Alors pour toute carte convexe (u , Ω , f) de support V contenu dans U, on peut affirmer que

i) l'image par $\bar{f}^{-1} \circ u$ de $B \cap V$ est de mesure nulle dans Ω

ii) l'image par $\bar{f}^{-1} \circ u$ de la restriction π de μ à V est absolument continue dans Ω.

DEFINITION 4. - On appelle ensemble (mesurable) de mesure nulle dans un ouvert U d'une surface convexe S, toute partie mesurable B de S telle qu'il existe un système de cartes (u_i , Ω_i , f_i) dont les supports recouvrent U et qui vérifient avec B la condition i) de la proposition 4.

On appelle mesure absolument continue dans un ouvert U d'une surface convexe S toute mesure positive et bornée μ sur S, telle qu'il existe un système de cartes (u_i , Ω_i , f_i) dont les supports recouvrent U et qui vérifient avec μ, la condition ii) de la proposition 4.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION. - L'espace V étant paracompact comme Ω, on peut le recouvrir par les traces d'une sous-famille dénombrable (V_{i_n}) ; le lemme précédent montre alors pour tout n, que $\overline{f}^{-1} \circ u(V \cap V_{i_n} \cap B)$ est de mesure nulle dans Ω et que la restriction de $\overline{f}^{-1} \circ u(\pi)$ à $\overline{f}^{-1} \circ u(V \cap V_{i_n})$ est absolument continue dans cet ouvert ; la proposition en résulte.

Nous appellerons <u>surface convexe de type 2</u>, toute surface convexe S telle que, sauf pour les points d'un ensemble de mesure nulle dans S, en tout point de S existe une indicatrice dont la frontière soit une quadrique propre (cf. [2] p. 23). Pour toute carte (u, Ω, f) dont le support est contenu dans une telle surface, f est presque partout dans Ω à forme hessienne non dégénérée. Il suffit inversement de trouver un recouvrement d'une surface convexe S par des supports de cartes (u_i, Ω_i, f_i) avec f_i presque partout à forme hessienne non dégénérée, pour assurer que S soit de type 2.

<u>6. ENONCE ET DEMONSTRATION DU RESULTAT PRINCIPAL</u>

PROPOSITION 5. - <u>Soient</u> S <u>une surface convexe de</u> R^p, π, π', π'' <u>trois mesures positives et bornées sur</u> S, <u>de même masse totale</u>, T <u>un ouvert de</u> S <u>portant la mesure</u> π <u>et n'ayant jamais trois de ses points alignés</u>.

<u>Supposons vérifiée une des conditions de régularité suivantes</u> :

i) π <u>est à densité continue dans l'ouvert</u> T, π' <u>et</u> π'' <u>sont à densités continues dans des ouverts contenant</u> T.

ii) π, π', π'' <u>sont absolument continues dans l'ouvert</u> T <u>et il existe un recouvrement de</u> T <u>par des supports de cartes convexes</u> (u_i, Ω_i, f_i) <u>où chaque</u> f_i <u>est presque partout, dans</u> Ω_i, <u>à forme hessienne non dégénérée</u>.

<u>Alors si l'égalité</u> $\pi * \pi = \pi' * \pi''$ <u>a lieu au voisinage de</u> $2.T$, <u>on peut affirmer que</u> $\pi = \pi' = \pi''$.

Un énoncé moins précis mais plus bref est celui du

RESULTAT PRINCIPAL. - Soient S une surface strictement convexe de R^p, de type 1 (resp. de type 2), (X_1, X_2) un couple indépendant de points aléatoires équidistribués portés par S, (Y, Z) un couple indépendant de points aléatoires portés par S, les lois de ces points étant à densités continues dans S (resp. absolument continues dans S).

Si les lois des milieux de X_1, X_2 d'une part et de Y, Z d'autre part, sont égales au voisinage de S elles sont égales dans R^p et l'on peut affirmer que X_1, X_2, Y, Z sont équidistribués.

DEMONSTRATION. - a) D'après le lemme d'existence de cartes (strictement) convexes, on peut recouvrir T par une suite V_n d'ouverts, supports de cartes strictement convexes (u_n, Ω_n, f_n), chaque f_n étant de classe C^1 dans Ω_n sous la condition i), ou presque partout à la forme hessienne non dégénérée sous la condition ii).

b) Notons π_n, π'_n, π''_n les restrictions de π, π', π'' à V_n : le corollaire 2 du lemme 6, appliqué à T, $G = V_n$, prouve que

$$\pi_n * \pi_n = \pi'_n * \pi''_n \qquad \text{au voisinage de } 2 . V_n .$$

c) Soit $\mathcal{S}$ le graphe de la fonction strictement convexe f_n, et ν, ν', ν'' les mesures sur Ω_n dont les images par $u_n^{-1} \circ \bar{f}_n$ sont π_n, π'_n, π''_n respectivement. Sous la condition i) ces mesures ont des densités continues dans Ω_n ; sous la condition ii) elles sont seulement absolument continues. Puisque la transformation u_n est linéaire, on trouve que

$$\bar{f}_n(\nu) * \bar{f}_n(\nu) = \bar{f}_n(\nu') * \bar{f}_n(\nu'')$$

au voisinage de $2 . \mathcal{S}$.

La proposition 1 (Première Partie) appliquée à $\mathcal{S}$, f_n, Ω_n, $\bar{f}_n(\nu)$, $\bar{f}_n(\nu')$, $\bar{f}_n(\nu'')$ prouve que pour tout borélien B de S, contenu dans

V_n , on a l'inégalité :

$$(\pi(B))^2 \leq \pi'(B) \, . \, \pi''(B) \qquad .$$

Nous allons montrer que cette inégalité s'étend à tous les boréliens de S .

d) l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique permet de déduire de l'alinéa précédent que la mesure (abstraite) $\frac{1}{2}(\pi' + \pi'') - \pi$ sur S , est positive sur chaque ouvert V_n . Pour établir quelle est positive sur S, nous utiliserons la correspondance entre mesures abstraites et mesures de Radon fournie par le théorème de Riesz, et le

LEMME 10. - Soit σ une mesure de Radon sur un espace localement compact et paracompact X , telle que tout point de X possède un voisinage ouvert sur lequel la restriction σ soit une mesure positive ; la mesure σ est alors une mesure positive.

Considérons en effet un recouvrement ouvert localement fini (V_i) tel que pour tout i la restriction de σ à V_i soit positive ; soit (φ_i) une partition continue de l'unité, subordonnée à (V_i) :

$$0 \leq \varphi_i \leq 1 \qquad , \qquad \text{support } (\varphi_i) \subset V_i \qquad , \qquad \sum_i \varphi_i = 1 \qquad .$$

La fonction $\varphi_i \, . \, f$, continue sur f , a un support compact comme celui de f , fonction test continue à support compact dans X . Le support de $\varphi_i \, . \, f$ est contenu dans V_i comme celui de φ_i ; c'est donc un compact de V_i et $\sigma(\varphi_i \, . \, f) \geq 0$ d'où $\sigma(f) \geq 0$.

La mesure $\frac{1}{2}(\pi' + \pi'') - \pi$ est donc positive sur S , et de masse nulle ; elle est donc nulle.

e) pour tout borélien C de S on a donc

$$\pi(C) = \frac{1}{2}(\pi'(C) + \pi''(C)) \qquad ,$$

si de plus C est contenu dans V_n on a

$$\pi(C) \leq (\pi'(C) \, . \, \pi''(C))^{1/2} \quad ,$$

d'où l'on déduit que sur chaque V_n , π , π' , π'' sont égales, ce qui établit l'égalité de π , π' , π'' . Le résultat principal est ainsi établi.

ANNEXE : UN CONTRE-EXEMPLE EN THEORIE DE LA MESURE

Pour répondre au problème posé dans la remarque suivant le schéma de la démonstration de la proposition 1, nous allons construire sur la partie de $[0,1]$ formée des nombres à développement dyadique "illimité", deux mesures de probabilité distinctes telles que tout point de cet espace possède un système fondamental de voisinages ouverts ayant même masse pour l'une et l'autre mesure.

Reprenons (cf remarque 3 suivant l'énoncé de la proposition 1, 1è partie, § 2) l'espace $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, et soit D l'ensemble, dénombrable, des $x = (x_1, x_2, \dots)$ de Ω tels que $x_n = x_{n+1}$ pour tout n assez grand.

Pour $0 < p < 1$ et $p \neq \frac{1}{2}$, notons μ et ν les restrictions de P_p et P_{1-p} à $X = \Omega - D$.

Puisque pour $0 < p < 1$, P_p ne charge aucun point de Ω, on a $P_p(D) = 0$; μ et ν sont bien des mesures de probabilité, distinctes car $p \neq \frac{1}{2}$,

Soit $x \in X$; les traces sur X des ouverts V_n de Ω, définis par

$$V_n = \{y \in \Omega \ ; \ x_1 = y_1, \ x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n\}$$

forment un système fondamental de voisinages ouverts de x dans X ; notons $U_n = V_n \cap X$.

Montrons que pour tout n assez grand, on peut définir un voisinage ouvert A_n de x dans X, tel que

$A_n \subset U_n$, $\mu(A_n) = \nu(A_n)$; nous aurons alors le contre-exemple cherché avec (X, μ, ν).

Soit i et j les nombres de 0 et de 1 respectivement parmi les éléments $x_1, x_2, \dots, x_n$: on a, bien sûr,

$$i+j = n \ , \ \mu(U_n) = p^i (1-p)^j \ , \ \nu(U_n) = (1-p)^i \, p^j \ .$$

Si n est assez grand, i et j sont tous deux non nuls, puisque $x \notin D$. Pour la même raison on peut trouver des indices :

$$n < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_i < m_1 < m_2 < \ldots < m_j$$

tels que :

$$x_{n_1} = x_{n_2} = \ldots = x_{n_i} = 1 \quad \text{et} \quad x_{m_1} = x_{m_2} = \ldots = x_{m_j} = 0 \; .$$

Posons alors

$$B_n = \{y \in \Omega \; ; \; x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n, x_{n_1} = y_{n_1}, \ldots, x_{n_i} = y_{n_i} \; , x_{m_1} = y_{m_1}, \ldots, x_{m_j} = y_{m_j} \} \, ,$$

$$\text{et} \quad A_n = B_n \cap X \; ;$$

on trouve naturellement que

$$P_p(B_n) = p^i (1-p)^j (1-p)^i p^j = (1-p)^i p^j p^i (1-p)^j = P_{1-p}(B_n)$$

et donc que $P_p(B_n \cap \complement D) = P_{1-p}(B_n \cap \complement D)$, soit $\mu(A_n) = \nu(A_n)$, ce que nous voulions démontrer.

REFERENCES

[1] Ph. ARTZNER , Comptes-Rendus, 272, Série A , 1971, p. 1735 - 1738 .

[2] H. BUSEMANN , Convex Surfaces, Interscience, New-York, 1958 .

[3] G.E. SHILOV et B.L. GUREVICH, Integral, Measure and Derivative : a unified approach, Prentice-Hall, 1966.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
7, rue René Descartes

67 - STRASBOURG