BERNARD MAISONNEUVE

Topologies du type de Skorohod

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 6 (1972), p. 113-117
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1972__6__113_0>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67 - STRASBOURG

1970/71

- Séminaire de Probabilités -

TOPOLOGIES DU TYPE DE SKOROHOD

par B. MAISONNEUVE

INTRODUCTION - NOTATIONS

Etant donnés un compact métrisable E et un intervalle $|a,b|$ quelconque de $\mathbb{R}$, nous désignons par $\Omega_{|a,b|}$ l'ensemble des applications continues à droite et pourvues de limites à gauche de $|a,b|$ dans E (on exige de plus la continuité à gauche en b si $b \in |a,b|$). Les espaces $\Omega_{\mathbb{R}}$, $\Omega_{[0,+\infty[}$ et $\Omega_{[0,1]}$ sont notés W, Ω et D respectivement.

Nous définissons sur l'espace $\Omega_{|a,b|}$ une topologie polonaise par un procédé analogue à celui de Skorohod pour l'espace D [1]. Pour $|a,b| = [0,1]$ cette topologie est celle de Skorohod, mais si $|a,b| \supset [0,1]$ la topologie trace de la topologie de $\Omega_{|a,b|}$ sur D est un peu moins fine que celle de Skorohod (D est identifié à l'ensemble des applications de $\Omega_{|a,b|}$ constantes sur $|a,0]$ et sur $[1,b|$).

Nous étudions les propriétés de continuité à droite et d'existence de limites à gauche des applications de translation $(\eta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ et $(\theta_t)_{t\geq 0}$ de W et Ω munis des topologies précédentes.

REMARQUE PRELIMINAIRE

Pour définir sur l'espace $\Omega_{|a,b|}$ une topologie d'espace polonais, il suffit de traiter le cas $E=[0,1]$; l'extension au cas d'un compact métrisable s'en déduit facilement. Nous supposerons également par la suite que $|a,b|$ est l'un des intervalles $\mathbb{R}$, $[0,+\infty[$ ou $[0,1]$, car tous les autres cas peuvent s'y rapporter par l'usage d'une bijection convenable.

Pour toute fonction ω de $\Omega_{|a,b|}$, nous noterons $\|\omega\| = \sup_{t \in |a,b|} |\omega(t)|$ et nous désignerons par $\underline{\omega}$ l'application $t \to e^{-|t|}\omega(t)$. D'après l'hypothèse $E = [0,1]$ on a $\|\underline{\omega}\| \leq \|\omega\| \leq 1$.

DEFINITIONS

A. Classe des changements de temps

Désignons par $\mathfrak{T}_{|a,b|}$ l'ensemble des applications croissantes de $|a,b|$ dans lui-même. Les éléments de $\mathfrak{T}_{|a,b|}$ seront appelés changements de temps. Le changement de temps identique est noté i.

B. Taille d'un changement de temps

Nous appellerons taille d'un changement de temps τ de $\mathfrak{T}_{|a,b|}$ le nombre suivant de $[0, +\infty]$

$$|\tau| = \sup_t |\tau(t) - t| + \sup_{s \neq t} \left|\log \frac{\tau(t) - \tau(s)}{t - s}\right| ,$$

où s et t sont pris dans $|a,b|$.

Si $|\tau| < +\infty$, τ est un homéomorphisme de $|a,b|$ sur lui-même et l'on a $|\tau^{-1}| = |\tau|$. Si $|\sigma| < +\infty$ et $|\tau| < +\infty$ on a aussi $|\sigma \circ \tau| \leq |\sigma| + |\tau|$

C. Pour tout couple (ω,ω') d'éléments de $\Omega_{|a,b|}$ posons $d_{|a,b|}(\omega,\omega') = \inf_{\tau \in \mathfrak{T}_{|a,b|}} (|\tau| + \|\underline{\omega} \circ \tau - \underline{\omega}'\|)$. En prenant $\tau = i$ on voit que $d_{|a,b|}(\omega,\omega') \leq 2$. Pour que $d_{|a,b|}(\omega_n,\omega) \to 0$ il faut et il suffit qu'il existe une suite (τ_n) d'éléments de $\mathfrak{T}_{|a,b|}$ telle que $|\tau_n| \to 0$ et $\underline{\omega}_n \circ \tau_n \to \underline{\omega}$ uniformément. On a alors $\omega_n(t) \to \omega(t)$ en tout point de continuité de ω.

Remarque : il est inutile de faire intervenir les fonctions $\underline{\omega}$ dans le cas $|a,b| = [0,1]$. Mais de cette manière nous pouvons traiter les trois cas simultanément. Nous avons alors le résultat suivant :

THEOREME.1. - *L'application $d_{|a,b|}$ est une distance sur $\Omega_{|a,b|}$. L'espace $\Omega_{|a,b|}$ est séparable et complet pour $d_{|a,b|}$.*

DEMONSTRATION. - Le fait que $d_{|a,b|}$ soit une distance résulte facilement des diverses propriétés énoncées après les définitions B et C. L'ensemble des fonctions en escaliers à valeurs et points de discontinuité rationnels constitue un ensemble dense pour $d_{|a,b|}$, grâce à l'intervention des $\underline{\omega}$.

Montrons que $\Omega_{|a,b|}$ est complet pour $d_{|a,b|}$. Pour simplifier les notations de cette démonstration, nous n'écrirons pas $|a,b|$ à côté de Ω, d. Soit donc $(\omega_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy pour d. Quitte à extraire une sous-suite de cette suite, nous pouvons supposer que $d(\omega_n, \omega_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$, $n \geq 1$ ce qui entraine l'existence d'une suite (τ_n) de changements de temps telle que

$$|\tau_n| < \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad \|\underline{\omega_n} \circ \tau_n - \underline{\omega_{n+1}}\| < \frac{1}{2^n} . \qquad (1)$$

pour n fixé et tout $m \geq 1$ posons $\sigma_{n\,m} = \tau_{n+m} \circ \dots \circ \tau_{n+1} \circ \tau_n$.

On a
$$|\sigma_{n\,m}| \leq |\tau_n| + |\tau_{n+1}| + \dots + |\tau_{n+m}| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (2)$$

La suite $(\sigma_{n\,m})_{m\geq 1}$ est une suite de Cauchy uniforme (*). Sa limite σ_n est un changement de temps tel que $|\sigma_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ d'après (2).

D'autre part la relation $\sigma_n = \sigma_{n+1} \circ \tau_n$ permet d'écrire l'égalité (1) sous la forme $\|\underline{\omega_n} \circ \sigma_n^{-1} - \underline{\omega_{n+1}} \circ \sigma_{n+1}^{-1}\| < \frac{1}{2^n}$ qui montre que la suite $(\underline{\omega_n} \circ \sigma_n^{-1})$ converge uniformément vers une limite $\underline{\omega}$. La fonction $\underline{\omega}$ est évidemment un élément de $\Omega_{|a,b|}$. Posons $\omega(t) = e^{|t|}\,\underline{\omega}(t)$. On a alors $\omega_n(t) \to \omega(t)$ en tout point de continuité de ω (ou de $\underline{\omega}$). Il en résulte que ω prend ses valeurs dans $[0,1]$ et appartient à $\Omega_{|a,b|}$.

Finalement on a trouvé $\omega \in \Omega_{|a,b|}$ et une suite (σ_n) telle que $|\sigma_n^{-1}| \to 0$ et $\|\underline{\omega_n} \circ \sigma_n^{-1} - \underline{\omega}\| \to 0$, donc $d(\omega_n, \omega) \to 0$ et le théorème est établi.

NOTATIONS. - Soit $\mathcal{S}_{|a,b|}$ la topologie définie sur $\Omega_{|a,b|}$ par la distance $d_{|a,b|}$ et soit $\mathcal{M}_{|a,b|}$ la topologie de la convergence en mesure sur $\Omega_{|a,b|}$, définie par exemple par la distance

$$\delta_{|a,b|}(\omega, \omega') = \int_a^b e^{-|t|}\,|\omega(t) - \omega'(t)|\,dt$$

(*) Car $\|\sigma_{n\,m+1} - \sigma_{n\,m}\| = \|\tau_{n+m+1} - i\| \leq \frac{1}{2^{n+m-1}}$

Voici alors deux remarques :

1. La topologie $\mathcal{M}_{|a,b|}$ est moins fine que la topologie $\mathcal{S}_{|a,b|}$ et sépare les points de $\Omega_{|a,b|}$: c'est donc une topologie lusinienne.

2. La trace de la topologie $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ sur Ω est strictement moins fine que la topologie $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+}$. En effet pour $\omega_n = I_{[\frac{1}{n},+\infty[}$, $\omega = I_{[0,+\infty[}$ on a $d_{\mathbb{R}}(\omega_n,\omega) = \frac{1}{n}$ et $d_{\mathbb{R}_+}(\omega_n,\omega) = 1$ pour tout n ; il y a donc convergence de ω_n vers ω pour $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$, mais pas pour $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+}$.

Dans l'énoncé qui suit (comme dans la remarque 2) Ω est identifié au sous-ensemble des fonctions de W constantes sur $]-\infty,0]$ et $E \times \Omega$ au sous-ensemble des fonctions de W constantes sur $]-\infty,0[$. On note $(\eta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ et $(\theta_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ les opérateurs de translation de W et Ω. Bien noter que si $\omega\in\Omega$ et $t\geq 0$ $\eta_t(\omega) \neq \theta_t(\omega)$ en général. Nous étendons l'opérateur θ_t à $E\times\Omega$ en posant $\theta_t(x,\omega) = \theta_t(\omega)$.

THEOREME 2. - a. La tribu borélienne de $\Omega_{|a,b|}$ est la tribu engendrée par les applications coordonnées $(X_t, t\in |a,b|)$.

b. Pour tout w de W l'application $t \to \eta_t(w)$ de $\mathbb{R}$ dans W est continue pour la topologie $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$. Pour tout ω de Ω l'application $t \to \theta_t(\omega)$ de $\mathbb{R}_+$ dans Ω est continue à droite pour la topologie $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+}$.

c. L'ensemble Ω est borélien dans W. Son adhérence $\overline{\Omega}$ pour la topologie $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ est l'ensemble $E\times\Omega$. Muni de la topologie trace de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$, l'ensemble $E\times\Omega$ est donc polonais.

d. Pour tout ω de $E\times\Omega$, l'application $t\to\theta_t(\omega)$ de $\mathbb{R}_+$ dans $E\times\Omega$ est continue à droite et pourvue de limites à gauche pour la topologie trace de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ sur $E\times\Omega$. On a pour tout $t>0$

$$\theta_{t-}(\omega) = (X_{t-}(\omega), \theta_t(\omega)).$$

DEMONSTRATION. - Le point a. se démontre comme pour D [1].

b. L'application $t\to\eta_t(w)$ est $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$-continue : on le voit en utilisant le changement de temps $\tau_h(t) = t-h$ et en faisant tendre h vers 0.

L'application $t\to\theta_t(\omega)$ est $\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+}$- continue : on utilise le changement de temps

$\sigma_h(t) = t + (\frac{t^2}{2} \wedge h)$, $t \geq 0$. On a $|\sigma_h| \to 0$ et $\|\theta_s(\omega) \circ \sigma_h - \theta_{s+h}(\omega)\| \to 0$ quand $h \to 0$.

c. <u>L'ensemble</u> Ω <u>est borélien dans</u> W : cela résulte de l'égalité $\Omega = \bigcap_{\substack{r \leq 0 \\ r \in \mathbb{Q}}} \{X_r = X_0\}$ et du point a.

Soit w un point adhérent à Ω et soit (ω_n) une suite de Ω de limite W, au sens de $\mathcal{S}_R$. Soit C l'ensemble des points de $]-\infty, 0]$ qui sont de continuité pour w. On a $\omega_n(t) \to w(t)$ $\forall t \in C$. Mais $\omega_n(t) = \omega_n(t')$ $\forall t, t' \in C$ donc $w(t) = w(t')$ $\forall t, t' \in C$. Il en résulte que w est constante sur $]-\infty, 0[$ c'est-à-dire appartient à $E \times \Omega$.

Inversement si $w \in E \times \Omega$, $\eta_{-\frac{1}{n}}(w) \in \Omega$ et $\eta_{-\frac{1}{n}}(w) \to w$ d'après b. Donc $w \in \overline{\Omega}$.

d. Pour établir le point d il suffit de voir que pour tout ω de Ω l'application $t \to \theta_t(\omega)$ de R_+ dans W est continue à droite et pourvue de limites à gauche pour la topologie $\mathcal{S}_R$. La continuité à droite résulte du point b et de la remarque 2. Pour l'existence de limites à gauche, utilisons le changement de temps $\tau_h(t) = t - h$, $t \in R$ on a pour $0 < h < s$

$$
\begin{aligned}
|(X_{s-}(\omega), \theta_s(\omega)) \circ \tau_h(t) - \theta_{s-h}(\omega)(t)| &= 0 && \text{si } t \geq h \\
&= |X_{s-}(\omega) - X_{s-h+t}(\omega)| && \text{si } 0 \leq t < h \\
&= |X_{s-}(\omega) - X_{s-h}(\omega)| && \text{si } t < 0 .
\end{aligned}
$$

L'existence d'une limite à gauche $X_{s-}(\omega)$ pour le processus (X_t) montre donc que $\theta_{s-h}(\omega)$ admet pour limite $(X_{s-}(\omega), \theta_s(\omega))$ lorsque $h \to 0$.

<u>Remarque</u> : Il résulte du théorème précédent que sur l'espace $E \times \Omega$ le processus $(\vartheta_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $E \times \Omega$ est continu à droite, a des limites à gauche (pour la topologie trace de $\mathcal{S}_R$) <u>et admet les mêmes discontinuités que le processus</u> $(X_t)_{t \geq 0}$.

<u>REFERENCE</u>

(1) BILLINGSLEY Convergence of Probability Measures - Wiley .