

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PIERRE CARTIER

## **Introduction à l'étude des mouvements browniens à plusieurs paramètres**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 5 (1971), p. 58-75

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1971\\_\\_5\\_\\_58\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__58_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

INTRODUCTION A L'ÉTUDE DES MOUVEMENTS  
BROWNIENS A PLUSIEURS PARAMÈTRES

par P. CARTIER

Le but de cet exposé est de donner les résultats élémentaires sur les fonctions aléatoires de plusieurs variables introduites par P. LÉVY sous le nom de "mouvement brownien à plusieurs paramètres", le cas le plus nouveau étant celui où le nombre de paramètres devient infini. Accessoirement, nous résoudrons une contradiction apparente entre les résultats de P. LÉVY [2] et ceux de McKEAN [1], en donnant raison à McKEAN.

1. Rappels sur les variables aléatoires gaussiennes

Dans tout cet exposé, on fixe un espace probabilisé  $(\Omega, \underline{F}, P)$  et toutes les variables aléatoires sont relatives à cet espace probabilisé.

Soit  $\sigma$  un nombre réel positif; la mesure de probabilité  $g_\sigma$  sur  $\underline{R}$  est définie comme suit:

- a) la mesure  $g_0$  est la masse unité au point 0;
- b) pour  $\sigma > 0$ , la mesure  $g_\sigma$  admet la densité  $(2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-x^2/2\sigma^2}$  par rapport à la mesure de Lebesgue  $dx$ .

Dans tous les cas, la transformée de Fourier de la mesure  $g_\sigma$  est donnée par la formule suivante:

$$(1) \quad \int e^{iux} g_\sigma(dx) = e^{-\sigma^2 u^2/2} \quad (\text{pour } u \text{ réel});$$

cette formule donne une autre définition de la mesure  $g_\sigma$ .

Selon l'usage, on dit qu'une variable aléatoire (réelle)  $X$  est gaussienne d'écart-type  $\sigma$  si sa loi de probabilité est la mesure  $g_\sigma$  sur  $\underline{\mathbb{R}}$ ; il revient au même de dire que l'on a

$$(2) \quad E[e^{iuX}] = e^{-\sigma^2 u^2 / 2}$$

pour tout  $u$  réel. En particulier, on a  $E[X] = 0$  et  $E[X^2] = \sigma^2$ , de sorte que  $\sigma$  est la norme de  $X$  dans l'espace de Hilbert  $L^2 = L^2(\Omega, \underline{\mathbb{F}}, P)$ . Pour tout nombre réel  $p \geq 1$ , posons  $C_p = \pi^{-1/2} 2^{p/2} \Gamma(\frac{p+1}{2})$ , où  $\Gamma$  est la fonction gamma d'Euler, définie par  $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$  pour  $s > 0$ . Un calcul immédiat montre alors que, si  $X$  est une variable gaussienne d'écart-type  $\sigma$ , on a  $E[|X|^p] = C_p \sigma^p$ ; par suite,  $X$  appartient à  $L^p = L^p(\Omega, \underline{\mathbb{F}}, P)$  et l'on a  $\|X\|_p = C_p^{1/p} \|X\|_2$ .

LEMME 1.- Si une variable aléatoire  $X \in L^2$  est limite dans l'espace de Hilbert  $L^2$  d'une suite de variables gaussiennes  $X_n$ , alors  $X$  est gaussienne.

Posons  $\sigma_n = \|X_n\|_2$  et  $\sigma = \|X\|_2$ , d'où  $\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$ ; quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que  $X$  est limite presque sûre de la suite  $(X_n)$ , d'où  $E[e^{iuX}] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[e^{iuX_n}]$  pour tout  $u$  réel, d'après le théorème de convergence bornée. Comme  $X_n$  est gaussienne, on a  $E[e^{iuX_n}] = \exp -\frac{1}{2} \sigma_n^2 u^2$ , d'où  $E[e^{iuX}] = \exp -\frac{1}{2} \sigma^2 u^2$ , pour tout  $u$  réel. On a prouvé que  $X$  est gaussienne d'écart-type  $\sigma$ .

LEMME 2.- Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires. Pour tout vecteur réel  $u = (u_1, \dots, u_n)$ , on pose  $X(u) = u_1 X_1 + \dots + u_n X_n$ .

a) Supposons que  $(X_1, \dots, X_n)$  soit une suite indépendante de variables gaussiennes. Alors  $X(u)$  est une variable gaussienne pour tout vecteur  $u$  réel.

b) Réciproquement, supposons que la variable aléatoire  $X(u)$  soit gaussienne pour tout vecteur réel  $u$  et que l'on ait  $E[X_i X_j] = 0$  pour  $i \neq j$ . Alors  $(X_1, \dots, X_n)$  est une suite indépendante de variables gaussiennes.

Supposons que la suite  $(X_1, \dots, X_n)$  soit indépendante et que  $X_j$  soit gaussienne

d'écart-type  $\sigma_j$ . Pour tout  $t$  réel, on a alors

$$E[e^{itX(u)}] = E\left[\prod_{j=1}^n e^{itu_j X_j}\right] = \prod_{j=1}^n E[e^{itu_j X_j}] = \prod_{j=1}^n e^{-t^2 u_j^2 \sigma_j^2 / 2} = e^{-t^2 \sigma^2 / 2}$$

en posant  $\sigma^2 = u_1^2 \sigma_1^2 + \dots + u_n^2 \sigma_n^2$ ; on a prouvé que  $X(u)$  est gaussienne d'écart-type  $\sigma$ , d'où a).

On a  $X_j = X(\overbrace{0, \dots, 0}^{j-1}, 1, \overbrace{0, \dots, 0}^{n-j})$ ; les hypothèses de b) entraînent donc que chacune des variables  $X_1, \dots, X_n$  est gaussienne. Notons  $\sigma_j$  l'écart-type de  $X_j$ ; vu l'hypothèse d'orthogonalité  $E[X_i X_j] = 0$  pour  $i \neq j$ , on a  $E[X(u)^2] = u_1^2 \sigma_1^2 + \dots + u_n^2 \sigma_n^2$  et comme  $X(u)$  est gaussienne, on a

$$E[e^{iX(u)}] = \exp\left[-\frac{1}{2}(u_1^2 \sigma_1^2 + \dots + u_n^2 \sigma_n^2)\right] = \prod_{j=1}^n E[e^{iu_j X_j}].$$

L'indépendance de la suite  $(X_1, \dots, X_n)$  s'ensuit par un critère classique, d'où b).

## 2. Covariances

Dans tout espace de Hilbert, nous noterons  $(a|b)$  le produit scalaire des vecteurs  $a$  et  $b$ , et  $\|a\|$  la norme du vecteur  $a$ .

LEMME 3.- Soient  $T$  un ensemble et  $C$  une fonction réelle sur  $T \times T$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) il existe une application  $f$  de  $T$  dans un espace de Hilbert (réel)  $\underline{H}$  telle que  $C(t, t') = (f(t)|f(t'))$  pour  $t, t'$  dans  $T$  ;

b) on a  $C(t, t') = C(t', t)$  pour  $t, t'$  dans  $T$ , et quels que soient  $t_1, \dots, t_n$  distincts dans  $T$  et les nombres réels  $u_1, \dots, u_n$ , on a  $\sum_{i, j=1}^n C(t_i, t_j) u_i u_j \geq 0$  ;

c) il existe une famille  $(f_i)_{i \in I}$  de fonctions réelles sur  $T$  telle que  $\sum_{i \in I} f_i(t)^2 < \infty$  pour tout  $t \in T$  et  $C(t, t') = \sum_{i \in I} f_i(t) f_i(t')$  pour  $t, t'$  dans  $T$ .

Soient  $\underline{H}$  un espace de Hilbert réel et  $(e_i)_{i \in I}$  une base orthonormale de  $\underline{H}$ . La formule  $f(t) = \sum_{i \in I} f_i(t) \cdot e_i$  (pour  $t$  dans  $T$ ) définit une bijection de l'ensemble des applications  $f$  de  $T$  dans  $\underline{H}$  sur l'ensemble des familles  $(f_i)_{i \in I}$  de fonctions réelles sur  $T$  telles

que  $\sum_{i \in I} f_i(t)^2 < \infty$  pour tout  $t \in T$  ; avec ces notations , on a de plus

$$(3) \quad (f(t)|f(t')) = \sum_{i \in I} f_i(t)f_i(t') \quad (t, t' \text{ dans } T) .$$

Ces remarques établissent l'équivalence de a) et c) .

Avec les notations de a) , on a

$$(4) \quad \sum_{i, j=1}^n C(t_i, t_j) u_i u_j = \left\| \sum_{i=1}^n u_i \cdot f(t_i) \right\|^2$$

donc a) entraîne b) .

Plaçons-nous sous les hypothèses de b) . Il existe un espace vectoriel réel  $V$  ayant une base  $(v_t)_{t \in T}$  indexée par  $T$  . La fonction  $C$  sur  $T \times T$  définit une forme bilinéaire symétrique  $B$  sur  $V \times V$  par  $B(v_t, v_{t'}) = C(t, t')$  . Tout élément  $v$  de  $V$  s'écrit sous

$$(5) \quad v = \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_{t_i} \quad \text{avec } t_1, \dots, t_n \text{ distincts dans } T \text{ et } u_1, \dots, u_n \text{ réels ; on a alors}$$

$$B(v, v) = \sum_{i, j=1}^n C(t_i, t_j) u_i u_j \geq 0 .$$

Comme il est bien connu , l'ensemble  $N$  des  $v \in V$  tels que  $B(v, v) = 0$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  ; notant  $\pi$  l'application canonique de  $V$  sur  $\underline{H}_0 = V/N$  , on construit une forme bilinéaire symétrique  $(\cdot | \cdot)$  sur  $\underline{H}_0$  telle que  $B(v, v') = (\pi(v) | \pi(v'))$  pour  $v, v'$  dans  $V$  . On a alors  $(x|x) > 0$  pour  $x \neq 0$  dans  $\underline{H}_0$  , et l'on peut donc compléter  $\underline{H}_0$  en un espace de Hilbert  $\underline{H}$  . Il suffit alors de poser  $f(t) = \pi(v_t)$  pour  $t \in T$  ; l'application  $f$  de  $T$  dans  $\underline{H}$  satisfait à  $C(t, t') = (f(t)|f(t'))$  .

Q.E.D.

Une fonction  $C$  sur  $T \times T$  satisfaisant aux conditions équivalentes du lemme 3 s'appelle une covariance sur  $T$  . La propriété b) montre que la somme de deux covariances et le produit d'une covariance par un nombre positif sont des covariances ; la propriété c) montre que le produit de deux covariances est une covariance .

Le lemme suivant donne une caractérisation en termes de covariances des espaces métriques isométriques à un sous-espace d'un espace de Hilbert .

LEMME 4.- Soient  $T$  un ensemble et  $d$  une fonction réelle positive sur  $T \times T$  .

On suppose que l'on a  $d(t, t) = 0$  et  $d(t, t') = d(t', t)$  pour  $t, t'$  dans  $T$  . Les

conditions suivantes sont équivalentes :

- a) il existe une application  $g$  de  $T$  dans un espace de Hilbert  $\underline{H}$  telle que  
 $d(t, t') = ||g(t) - g(t')||$  pour  $t, t'$  dans  $T$  ;
- b) quels que soient  $t_1, \dots, t_n$  distincts dans  $T$  et les nombres réels  $u_1, \dots, u_n$  de somme nulle , on a l'inégalité  

$$\sum_{i,j=1}^n d(t_i, t_j)^2 u_i u_j \leq 0$$
 ;
- c) pour tout nombre réel  $s > 0$  , la fonction  $e^{-sd^2}$  sur  $T \times T$  est une covariance .

Sous les hypothèses de a) , définissons la covariance  $C$  sur  $T$  par  $C(t, t') = (g(t)|g(t'))$  . Les propriétés élémentaires des covariances montrent alors que la fonction  $e^{sC} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n C^n}{n!}$  sur  $T \times T$  est une covariance pour tout  $s > 0$  . Si  $t_1, \dots, t_n$  sont des éléments de  $T$  et  $u_1, \dots, u_n$  des nombres réels , on a

$$(6) \quad \sum_{i,j=1}^n [\exp - sd(t_i, t_j)^2] u_i u_j = \sum_{i,j=1}^n [\exp sC(t_i, t_j)] v_i v_j \geq 0$$

(on a posé  $v_i = u_i \cdot \exp - s \cdot ||g(t_i)||^2$  ) puisque  $e^{sC}$  est une covariance . Par suite ,  $e^{-sd^2}$  est une covariance , et a) entraîne c) .

Sous les hypothèses de c) , choisissons des éléments  $t_1, \dots, t_n$  de  $T$  et des nombres réels  $u_1, \dots, u_n$  de somme nulle ; définissons une fonction d'une variable réelle  $\varphi$  par

$$(7) \quad \varphi(s) = \sum_{i,j=1}^n [\exp - sd(t_i, t_j)^2] u_i u_j$$

On a par hypothèse  $\varphi(s) \geq 0$  pour  $s > 0$  et l'on a  $\varphi(0) = (\sum_{i=1}^n u_i)^2 = 0$  ; la dérivée  $\varphi'(0)$  est égale à  $\sum_{i,j=1}^n -d(t_i, t_j)^2 u_i u_j$  et comme l'on a  $\varphi'(0) = \lim_{s \rightarrow 0} [\varphi(s) - \varphi(0)]/s$  , on a  $\varphi'(0) \geq 0$  , et c) entraîne b) .

Sous les hypothèses de b) , choisissons un élément  $o$  de  $T$  , posons  $T_1 = T - \{o\}$  et  $C(t, t') = \frac{1}{2} [d(o, t)^2 + d(o, t')^2 - d(t, t')^2]$  pour  $t, t'$  dans  $T_1$  . Soient  $t_1, \dots, t_n$  des éléments distincts de  $T_1$  et  $u_1, \dots, u_n$  des nombres réels . Posons  $t_o = o$  et  $u_o = -(u_1 + \dots + u_n)$  ; un calcul facile donne

$$(8) \quad 2 \sum_{i,j=1}^n C(t_i, t_j) u_i u_j = - \sum_{i,j=0}^n d(t_i, t_j)^2 u_i u_j$$

et l'hypothèse faite sur  $d$  montre que  $C$  est une covariance sur  $T_1$  . Nous pouvons donc trouver

un espace de Hilbert  $\underline{\underline{H}}$  et une application  $g_1$  de  $T_1$  dans  $\underline{\underline{H}}$  satisfaisant à

$C(t, t') = (g_1(t) | g_1(t'))$  pour  $t, t'$  dans  $T_1$ , c'est-à-dire à

$$(9) \quad d(t, t')^2 = d(o, t)^2 + d(o, t')^2 - 2.(g_1(t) | g_1(t'))$$

pour  $t, t'$  dans  $T_1$ . Prolongeant  $g_1$  en une application <sup>a)</sup> de  $T$  dans  $\underline{\underline{H}}$  par  $g(o) = 0$ , on obtient par un calcul facile la relation cherchée  $d(t, t') = ||g(t) - g(t')||$  (pour  $t, t'$  dans  $T$ ). Par suite, b) entraîne a).

### 3. Espaces gaussiens et fonctions aléatoires gaussiennes

Nous appellerons espace gaussien tout sous-espace vectoriel  $\underline{\underline{H}}$  de  $L^2$  qui se compose de variables gaussiennes. On a alors

$$(10) \quad E[e^{iX}] = \exp -\frac{1}{2}E[X^2] \quad \text{pour tout } X \in \underline{\underline{H}};$$

inversement, si  $\underline{\underline{H}}$  est un sous-espace vectoriel de  $L^2$  satisfaisant à (10), c'est un espace gaussien, comme on le voit en remplaçant  $X$  par  $uX$  dans (10), avec  $u$  réel.

Le théorème suivant résume les propriétés élémentaires des espaces gaussiens.

THÉORÈME 1.- a) La fermeture dans  $L^2$  d'un espace gaussien est un espace gaussien.

b) Soient  $X_1, \dots, X_n$  des éléments deux à deux orthogonaux d'un espace gaussien. Alors la suite  $(X_1, \dots, X_n)$  est indépendante.

c) Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille indépendante de variables gaussiennes. Le sous-espace vectoriel fermé de  $L^2$  engendré par cette famille est gaussien.

d) Soit  $\underline{\underline{K}}$  un espace de Hilbert. Il existe un isomorphisme de  $\underline{\underline{K}}$  sur un espace gaussien  $\underline{\underline{H}}$  défini sur un espace probabilisé convenable.

Les assertions a) à c) résultent immédiatement des lemmes 1 et 2 du n° 1. Pour prouver d), introduisons une base orthonormale  $(e_i)_{i \in I}$  de  $\underline{\underline{K}}$ . Pour tout  $i \in I$ , soit  $\underline{\underline{\Omega}}_i$  l'ensemble des nombres réels,  $\underline{\underline{F}}_i$  la tribu borélienne sur  $\underline{\underline{\Omega}}_i$  et  $P_i = g_1$ . Notons  $(\underline{\underline{\Omega}}, \underline{\underline{F}}, P)$  l'espace probabilisé produit de la famille  $(\underline{\underline{\Omega}}_i, \underline{\underline{F}}_i, P_i)$  (pour  $i \in I$ ) et  $X_i$  la projection d'indice  $i$  dans  $\underline{\underline{\Omega}}$ . Alors  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille indépendante de variables

gaussiennes et l'on a  $E[X_i^2] = 1$ ,  $E[X_i X_j] = E[X_i] \cdot E[X_j] = 0$  pour  $i, j$  distincts dans  $I$ ; d'après c), la famille  $(X_i)_{i \in I}$  est une base orthonormale d'un espace gaussien  $\underline{H}$ , et il existe un isomorphisme de  $\underline{K}$  sur  $\underline{H}$  qui applique  $e_i$  sur  $X_i$  pour tout  $i \in I$ .

Q.E.D.

Une fonction aléatoire gaussienne sur un ensemble  $T$  est une famille  $X = (X(t))_{t \in T}$  de variables aléatoires, telle que toute combinaison linéaire finie  $\sum_{i=1}^n u_i \cdot X(t_i)$  (avec  $t_1, \dots, t_n$  dans  $T$  et  $u_1, \dots, u_n$  réels) soit une variable gaussienne. Il revient au même de dire que les  $X(t)$  appartiennent à un même espace gaussien. Pour  $t, t'$  dans  $T$ , notons  $C_X(t, t')$  le produit scalaire  $E[X(t) \cdot X(t')]$  de  $X(t)$  et  $X(t')$  dans l'espace de Hilbert  $L^2$ ; alors  $C_X$  est une covariance sur  $T$ , que l'on appelle la covariance de la fonction aléatoire gaussienne  $X$ . Si  $t_1, \dots, t_n$  sont des éléments de  $T$  et  $u_1, \dots, u_n$  des nombres réels, on a

$$(11) \quad E[\exp i \sum_{j=1}^n u_j \cdot X(t_j)] = \exp - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n C_X(t_j, t_k) \cdot u_j \cdot u_k$$

d'après (4) et (10); par suite, la covariance  $C_X$  définit la loi de la fonction aléatoire  $X$ .

Soit  $C$  une covariance sur un ensemble  $T$ ; il existe une fonction aléatoire gaussienne  $X$  sur  $T$  telle que  $C = C_X$ . En effet, il existe une application  $f$  de  $T$  dans un espace de Hilbert  $\underline{K}$  telle que  $C(t, t') = (f(t) | f(t'))$  pour  $t, t'$  dans  $T$  (lemme 3, a) et un isomorphisme  $\pi$  de  $\underline{K}$  sur un espace gaussien  $\underline{H}$ ; il suffit alors de poser  $X(t) = \pi(f(t))$  pour  $t \in T$ .

#### 4. Mouvement brownien et bruit blanc

La définition classique du mouvement brownien (Einstein-Schmolukowski) est la suivante: c'est une fonction aléatoire  $W$  d'une variable réelle telle que

- a) on a  $W(0) = 0$ ;
- b) pour  $t < t'$ , la variable aléatoire  $W(t') - W(t)$  est gaussienne d'écart-type  $|t' - t|^{1/2}$ ;
- c) pour  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , la suite des variables aléatoires  $W(t_i) - W(t_{i-1})$  pour  $1 \leq i \leq n$  est indépendante.

Soit  $\underline{\underline{E}}$  l'espace vectoriel des fonctions réelles en escalier sur  $\underline{\underline{R}}$ . Soit  $f$  dans  $\underline{\underline{E}}$ ; par définition, il existe des nombres  $t_0, t_1, \dots, t_n$  et  $u_1, \dots, u_n$  tels que  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  et  $f(t) = u_i$  lorsque  $t_{i-1} < u \leq t_i$  et  $f(t) = 0$  si  $t \leq t_0$  ou  $t > t_n$ . Dans ces conditions, posons

$$(12) \quad J_0(f) = \sum_{i=1}^n u_i \cdot (W(t_i) - W(t_{i-1})) \quad .$$

On obtient ainsi une application  $J_0$  de  $\underline{\underline{E}}$  dans  $L^2$ ; d'après le lemme 2, a) et l'hypothèse c) ci-dessus, la variable aléatoire  $J_0(f)$  est gaussienne et l'on a

$$(13) \quad E[J_0(f)^2] = \sum_{i=1}^n u_i^2 \cdot |t_i - t_{i-1}| = \int f(t)^2 dt \quad .$$

Comme  $\underline{\underline{E}}$  est dense dans l'espace de Hilbert  $\underline{\underline{H}} = L^2(\underline{\underline{R}}, dt)$ , l'application  $J_0$  se prolonge de manière unique en un isomorphisme d'espaces de Hilbert de  $\underline{\underline{H}}$  sur un espace gaussien de variables aléatoires (th.1, a). Pour  $f \in \underline{\underline{H}}$ , on écrit  $J(f)$  sous la forme  $\int f(t) dW(t)$  (intégrale stochastique de Wiener).

Pour tout  $t$  réel, on définit une fonction  $f_t$  sur  $\underline{\underline{R}}$  par la règle

$$(14) \quad f_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \text{ et } 0 < x \leq t \\ -1 & \text{si } t \leq 0 \text{ et } t < x \leq 0 \\ 0 & \text{dans les autres cas .} \end{cases}$$

On obtient ainsi une courbe paramétrée  $\Gamma = (f_t)_{t \in \underline{\underline{R}}}$  dans l'espace de Hilbert  $\underline{\underline{H}}$ ; elle jouit des propriétés suivantes :

a') on a  $f_0 = 0$  ;

b') on a  $\|f_t - f_{t'}\| = |t - t'|^{1/2}$  ;

c') si  $t < u < v < w$ , les éléments  $f_u - f_t$  et  $f_w - f_v$  de  $\underline{\underline{H}}$  sont orthogonaux .

De manière plus intuitive, la condition c') signifie que si les quatre points A, B, C et D se suivent sur la courbe  $\Gamma$ , les cordes AB et CD sont orthogonales; on peut encore dire que si l'on prend pour origine dans  $\underline{\underline{H}}$  un point quelconque de  $\Gamma$ , les deux moitiés de  $\Gamma$  délimitées par A sont situées dans des espaces orthogonaux. D'une manière générale, on appelle hélice toute courbe dans un espace de Hilbert  $\underline{\underline{H}}$  qui jouit des propriétés précédentes.

Revenons au mouvement brownien . On a  $W(t) = J(f_t)$  et par conséquent ,  $W$  est une fonction aléatoire gaussienne sur  $\underline{\mathbb{R}}$  , de covariance donnée par

$$(15) \quad C_W(t, t') = \frac{1}{2} E[W(t)^2 + W(t')^2 - W(t-t')^2] = \frac{1}{2} \{ |t| + |t'| - |t-t'| \} ;$$

on a donc

$$(16) \quad C_W(t, t') = C_W(t', t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \leq t' \\ -t' & \text{si } t' \leq 0 \end{cases}$$

lorsque  $t \leq t'$  .

Pour tout ensemble borélien  $A \subset \underline{\mathbb{R}}$  , on note  $I_A$  son indicatrice et  $m(A)$  sa mesure au sens de Lebesgue ; si  $m(A)$  est fini , la fonction  $I_A$  appartient à  $\underline{\mathbb{H}} = L^2(\underline{\mathbb{R}}, m)$  et la variable  $M(A) = J(I_A)$  est définie . On a les propriétés suivantes :

a") pour tout ensemble  $A$  , la variable aléatoire  $M(A)$  est gaussienne d'écart-type  $m(A)^{1/2}$  ;

b") si  $A_1, \dots, A_n$  sont deux à deux disjoints , la suite de variables aléatoires  $(M(A_1), \dots, M(A_n))$  est indépendante et l'on a  $M(A_1 \cup \dots \cup A_n) = M(A_1) + \dots + M(A_n)$  .

Le mouvement brownien est donné par

$$(17) \quad W(t) = \begin{cases} M(]0, t]) & \text{si } t \geq 0 \\ -M(]t, 0]) & \text{si } t \leq 0 \end{cases} .$$

D'une manière générale , soit  $(T, \underline{\mathbb{A}}, m)$  un espace mesuré ; on appelle mesure aléatoire gaussienne sur  $(T, \underline{\mathbb{A}})$  , de variance  $m$  , une application  $M$  de l'ensemble des parties  $A$  de  $T$  appartenant à  $\underline{\mathbb{A}}$  et telles que  $m(A)$  soit fini dans l'ensemble des variables aléatoires , qui satisfait à a") et b") . On dit aussi , à cause de certaines applications physiques de ces processus , qu'une telle mesure aléatoire est un "bruit blanc" . On montre comme plus haut qu'il existe un isomorphisme d'espaces de Hilbert de  $L^2(T, \underline{\mathbb{A}}, m)$  sur un espace gaussien caractérisé par  $J(I_A) = M(A)$  ; on écrit aussi  $\int_T f(t) M(dt)$  pour  $J(f)$  .

5. Processus de Lévy

THEOREME 2.- Soit  $\underline{T}$  un espace de Hilbert (réel) . Il existe une fonction aléatoire gaussienne  $X$  sur  $\underline{T}$  satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(18) \quad X(0) = 0$$

$$(19) \quad E[(X(t) - X(t'))^2] = ||t - t'|| \quad .$$

Sa covariance est donnée par

$$(20) \quad C_X(t, t') = \frac{1}{2} \{ ||t|| + ||t'|| - ||t-t'|| \} \quad .$$

Le calcul de la covariance  $C_X$  à partir de (18) et (19) est immédiat . Comme tout espace de Hilbert est isomorphe à un espace gaussien (th.1 , d) , il suffit de construire une application  $f$  de  $\underline{T}$  dans un espace de Hilbert  $\underline{H}$  qui satisfait à  $f(0) = 0$  et à la relation

$$(21) \quad ||f(t) - f(t')|| = ||t - t'||^{1/2} \quad .$$

On peut d'ailleurs se dispenser de la condition  $f(0) = 0$  car on s'y ramène immédiatement en soustrayant un vecteur constant de  $f$  , ce qui ne modifie pas la validité de (21) .

Selon le lemme 4 , l'existence d'une telle fonction  $f$  équivaut aux inégalités

$$(22) \quad \sum_{i,j=1}^n u_i u_j \cdot ||t_i - t_j|| \leq 0$$

pour  $u_1, \dots, u_n$  réels de somme nulle et  $t_1, \dots, t_n$  dans  $\underline{T}$  . Comme chacune de ces inégalités ne porte que sur un nombre fini de vecteurs dans  $\underline{T}$  , on se ramène au cas où  $\underline{T}$  est de dimension finie  $d \geq 1$  . Sous cette hypothèse , soit  $m$  la mesure de Haar normalisée sur  $\underline{T}$  et  $\underline{H}$

l'espace de Hilbert réel formé des fonctions complexes de carré intégrable sur  $(\underline{T}, m)$  , avec le produit scalaire  $(f|g) = \int_{\underline{T}} \text{Re}\{\overline{f(x)}g(x)\} m(dx)$  . Pour tout  $t$  dans  $\underline{T}$  , la formule

$$(23) \quad f_t(x) = ||x||^{-(d+1)/2} \cdot (1 - e^{i(t|x)})$$

définit une fonction continue sur  $\underline{T} - \{0\}$  . L'inégalité  $1 - \cos a \leq a^2/2$  entraîne par un calcul facile l'inégalité

$$(24) \quad |f_t(x)|^2 \leq \inf ( ||t||^2 \cdot ||x||^{1-d} , 4 \cdot ||x||^{-1-d} ) \quad ;$$

cela suffit à prouver que  $f_t$  appartient à  $\underline{H}$  .

Posons  $U(t) = \int_{\underline{T}} |f_t(x)|^2 m(dx)$  pour tout  $t \in \underline{T}$  ; il est immédiat qu'on a  $U(0) = 0$  ,  $U(\lambda t) = \lambda.U(t)$  pour  $\lambda > 0$  et que la fonction  $U$  sur  $\underline{T}$  est invariante par les automorphismes de  $\underline{T}$  ; il existe donc une constante  $C_d > 0$  telle que  $U(t) = C_d^{-2} \cdot ||t||$  . Comme on a  $|f_t - f_{t'}| = |f_{t-t'}|$  , l'application  $f$  de  $\underline{T}$  dans  $\underline{H}$  définie par  $f(t) = C_d \cdot f_t$  satisfait à (21) .

Q.E.D.

La fonction aléatoire définie dans le théorème 2 s'appelle le processus de Lévy ou mouvement brownien à plusieurs paramètres . Lorsque  $\underline{T} = \underline{R}$  , on retrouve le mouvement brownien d'après la forme de la covariance . Lorsque  $\underline{T}$  est de dimension finie  $d \geq 1$  , la démonstration précédente fournit une représentation de  $X$  par une intégrale portant sur un bruit blanc  $M$  sur  $(\underline{T}, m)$  , à savoir

$$X(t) = C_d \cdot \int_{\underline{T}} ||x||^{-(d+1)/2} \cdot (1 - e^{i(t|x)}) \cdot M(dx) \quad .$$

Pour  $d = 1$  , on obtient l'expression suivante du mouvement brownien usuel

$$W(t) = (2\pi)^{-1/2} \int (1 - e^{ist}) \cdot |s|^{-1} \cdot M(ds) \quad ;$$

c'est essentiellement la transformée de Fourier de la représentation (17) donnée antérieurement .

C'est L.Schwartz qui a démontré le premier que la fonction  $C_X$  définie par (20) est une covariance ; selon la légende , il aurait obtenu la main de la fille de P.Lévy pour récompense de cet exploit mathématique . Par ailleurs , P.Lévy a généralisé le théorème 2 en obtenant des processus satisfaisant à la relation

$$E[|X(t) - X(t')|^2] = ||t - t'||^\alpha$$

(pour  $\alpha$  tel que  $0 < \alpha \leq 2$ ) ; le cas  $\alpha = 2$  est trivial (th. 1, d) . D'après le lemme 4 , il revient au même de dire que la fonction  $C_{\alpha, s}$  définie par  $C_{\alpha, s}(t, t') = e^{-s||t-t'||^\alpha}$  est une covariance pour  $s > 0$  et  $0 < \alpha \leq 2$  .

## 6. Propriétés markoviennes du processus de Lévy

D'après le lemme 2 , deux variables aléatoires gaussiennes orthogonales dans un espace gaussien sont indépendantes . Cette propriété entraîne de remarquables

relations d'indépendance dans les processus gaussiens . Pour les exprimer , nous aurons besoin de deux rappels et d'un lemme .

Soient  $\underline{H}_1$  et  $\underline{H}_2$  deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Hilbert  $\underline{H}$  et soit  $P_i$  (pour  $i = 1, 2$ ) le projecteur orthogonal de  $\underline{H}$  sur  $\underline{H}_i$  . On dit que  $\underline{H}_1$  et  $\underline{H}_2$  sont permutables si l'on a  $P_1 P_2 = P_2 P_1$  . Il revient au même de supposer qu'on a  $P_2(\underline{H}_1) \subset \underline{H}_2$  , ou encore que tout vecteur de  $\underline{H}_1$  qui est orthogonal à  $\underline{H}_1 \cap \underline{H}_2$  est orthogonal à  $\underline{H}_2$  .

Par ailleurs , soient  $\underline{F}_1$  ,  $\underline{F}_2$  et  $\underline{G}$  des sous-tribus de  $\underline{F}$  . On dit que  $\underline{F}_1$  et  $\underline{F}_2$  sont conditionnellement indépendantes par rapport à  $\underline{G}$  si l'on a

$$(25) \quad P[A_1 \cap A_2 | \underline{G}] = P[A_1 | \underline{G}] \cdot P[A_2 | \underline{G}]$$

pour  $A_1$  dans  $\underline{F}_1$  et  $A_2$  dans  $\underline{F}_2$  .

**LEMME 5.-** Soient  $\underline{H}$  un espace gaussien et  $\underline{H}_1$  ,  $\underline{H}_2$  deux sous-espaces vectoriels fermés de  $\underline{H}$  . On note  $\underline{F}_1$  la tribu engendrée par  $\underline{H}_1$  et  $\underline{G}$  la tribu engendrée par  $\underline{H}_1 \cap \underline{H}_2$  .

a) Pour tout  $X \in \underline{H}$  , on a  $E[X | \underline{F}_1] \in \underline{H}_1$  , et  $X \mapsto E[X | \underline{F}_1]$  est l'opérateur de projection orthogonale de  $\underline{H}$  sur  $\underline{H}_1$  .

b) Pour que les tribus  $\underline{F}_1$  et  $\underline{F}_2$  soient conditionnellement indépendantes par rapport à  $\underline{G}$  , il faut et il suffit que les sous-espaces  $\underline{H}_1$  et  $\underline{H}_2$  de  $\underline{H}$  soient permutables .

a) Si  $X$  appartient à  $\underline{H}_1$  , on a  $X = E[X | \underline{F}_1]$  ; si  $X$  est orthogonal à  $\underline{H}_1$  , il est indépendant de  $\underline{F}_1$  d'où  $E[X | \underline{F}_1] = E[X] = 0$  . Ceci prouve a) d'après la linéarité de l'opérateur d'espérance conditionnelle .

b) Supposons d'abord que  $\underline{H}_1$  et  $\underline{H}_2$  soient permutables . Soit  $\underline{K}$  l'ensemble des vecteurs de  $\underline{H}_1$  orthogonaux à  $\underline{H}_1 \cap \underline{H}_2$  ; d'après les hypothèses faites ,  $\underline{H}_1$  est somme directe de  $\underline{K}$  et de  $\underline{H}_1 \cap \underline{H}_2$  et  $\underline{K}$  est orthogonal à  $\underline{H}_2$  . Notons  $\underline{A}$  le sous-tribu de  $\underline{F}$  engendrée par  $\underline{K}$  , et  $\underline{C}$  la classe des ensembles de la forme  $\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap G_i)$  (réunion disjointe) avec  $A_i \in \underline{A}$  et  $G_i \in \underline{G}$  . Il est immédiat que  $\underline{C}$  est une algèbre de Boole , et que  $\underline{F}_1$  est la tribu , donc la classe monotone , engendrée par  $\underline{C}$  .

Pour prouver que  $\underline{F}_1$  et  $\underline{F}_2$  sont conditionnellement indépendantes par rapport à  $\underline{G}$  ,

il suffit de prouver que  $P[A_1 | \underline{F}_2]$  appartient à  $\underline{G}$  pour  $A_1$  dans  $\underline{F}_1$ . D'après ce qui précède et les propriétés des probabilités conditionnelles, il suffit de prouver ce fait pour  $A_1$  de la forme  $A \cap G$  avec  $A \in \underline{A}$  et  $G \in \underline{G}$ . Comme  $\underline{K}$  est orthogonal à  $\underline{H}_2$ , les tribus  $\underline{A}$  et  $\underline{F}_2$  sont indépendantes (lemme 2, b), d'où  $P[A \cap G | \underline{F}_2] = P[A] \cdot I_G \in \underline{G}$  (\*).

Réciproquement, supposons que les tribus  $\underline{F}_1$  et  $\underline{F}_2$  soient **conditionnellement indépendantes** par rapport à  $\underline{G}$ , et notons  $P_2$  le projecteur orthogonal de  $\underline{H}$  sur  $\underline{H}_2$ . Soit  $X$  dans  $\underline{H}_1$ ; on a  $P_2(X) = E[X | \underline{F}_2]$  d'après a), et  $E[X | \underline{F}_2] \in \underline{G}$  par l'hypothèse d'indépendance faite. Par suite, on a  $P_2(\underline{H}_1) \subset \underline{H}_1$ , ce qui montre que  $\underline{H}_1$  et  $\underline{H}_2$  sont permutables.

Q.E.D.

La propriété markovienne du mouvement brownien  $W$  s'interprète facilement dans ce cadre gaussien. Pour tout  $a > 0$ , définissons l'espace gaussien "intérieur"  $\underline{I}_a$  comme l'espace de Hilbert engendré par les variables  $W(t)$  pour  $|t| \leq a$ , et de même l'espace "extérieur"  $\underline{E}_a$  par les variables  $W(t)$  pour  $|t| \geq a$ . Il est immédiat que la projection orthogonale de  $W(t)$  sur  $\underline{I}_a$  est égale à  $W(a)$  si  $t \geq a$  et à  $W(-a)$  si  $t \leq -a$ ; par suite, les sous-espaces  $\underline{I}_a$  et  $\underline{E}_a$  de  $L^2$  sont permutables, et leur intersection est le sous-espace  $\underline{P}_a$  engendré par  $W(a)$  et  $W(-a)$ . D'après le lemme 5, les processus  $(W(t))_{|t| \leq a}$  et  $(W(t))_{|t| \geq a}$  sont donc conditionnellement indépendants par rapport à  $(W(a), W(-a))$ .

Passons maintenant au processus de Lévy  $X$  sur un espace de Hilbert  $\underline{T}$  de dimension finie  $d \geq 1$ . Pour tout  $a > 0$ , le sous-espace  $\underline{I}_a$  (resp.  $\underline{E}_a$ ) sera engendré par les variables aléatoires  $X(t)$  pour  $||t|| \leq a$  (resp.  $||t|| \geq a$ ). On doit à MCKEAN [1] les résultats suivants, qui ont été généralisés par P. ASSOUD au moyen des espaces de Soboleff (Séminaire de Probabilités de Strasbourg et article détaillé à paraître) :

a) lorsque  $d$  est impair, les sous-espaces  $\underline{I}_a$  et  $\underline{E}_a$  de  $L^2$  sont permutables et leur intersection est engendrée par les variables aléatoires de la forme  $(\frac{\partial}{\partial r})^i X(r, u) \Big|_{r=a}$  pour

(\*) Nous disons par abus de langage qu'une variable aléatoire appartient à une sous-tribu de  $\underline{F}$  si elle est mesurable par rapport à cette sous-tribu.

$0 \leq i \leq (d-1)/2$  et  $\|u\| = 1$  ; ces dérivées normales sont relativement délicates à définir;

b) lorsque  $d$  est pair , les sous-espaces  $\underline{I}_a$  et  $\underline{E}_a$  de  $I^2$  ne sont pas permutables .

On peut encore dire que, lorsque  $d$  est impair, le processus de Lévy  $X$  intérieur à la sphère de rayon  $a$  centrée en  $O$  est indépendant du processus  $X$  extérieur à cette même sphère , conditionnellement à la donnée de  $X$  et de ses dérivées normales d'ordre  $\leq (d-1)/2$  sur la surface de la sphère . Par contre , lorsque  $d$  est pair , il n'existe pas de telle propriété markovienne .

Supposons encore  $\underline{T}$  de dimension finie  $d \geq 1$  ; la distance de  $X(t)$  au sous-espace  $\underline{I}_a$  de  $L^2$  est l'erreur quadratique  $E[(X(t) - E[X(t)|\underline{I}_a])^2]^{1/2}$  commise en remplaçant  $X(t)$  par l'extrapolation à partir des valeurs du processus  $X(s)$  pour  $\|s\| \leq a$  . On voit immédiatement que cette erreur est de la forme  $\pi_d(\|t\|)$  , où la fonction  $\pi_d$  ne dépend que de  $d$  ; de plus , on peut montrer que  $\pi_d(r)$  tend vers 0 pour tout  $r$  lorsque  $d$  tend vers l'infini . On déduit de là l'égalité  $\underline{I}_a = \underline{I}_b$  pour  $0 < a < b$  lorsque  $\underline{T}$  est cette fois de dimension infinie . C'est ce résultat qui fait dire à P.Lévy que le processus  $X$  est "déterministe" lorsque  $\underline{T}$  est de dimension infinie .

### 7. Processus de moyenne sphérique

Supposons pour le moment que  $\underline{T}$  soit de dimension finie impaire  $d = 2n + 1$  . D'après la formule (19) , l'application  $X$  de  $\underline{T}$  dans  $L^2$  est continue , et l'on peut définir l'intégrale forte suivante

$$(26) \quad w_{d,r} = \int_S X(r,t) \sigma(dt) \quad (r \geq 0) ,$$

où  $S$  est la sphère unité dans  $\underline{T}$  et  $\sigma$  la mesure de probabilité sur  $S$  invariante par rotations . On obtient ainsi une fonction aléatoire gaussienne  $(w_{d,r})_{r \geq 0}$  dont la covariance se déduit de la covariance  $C_X$  de  $X$  par double intégration ; on trouve ainsi pour cette covariance :

$$(27) \quad C_d(r,r') = \frac{1}{2} \left\{ r + r' - a_d \int_{-1}^1 (r^2 + r'^2 - 2rr'x)^{1/2} (1-x^2)^{n-1} dx \right\}$$

$$\text{avec } a_d = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{n-1} dx .$$

On déduit facilement de l'expression explicite (27) que les dérivées

$(\frac{\partial}{\partial r})^i (\frac{\partial}{\partial r'})^j C_d(r, r')$  existent et sont continues pour  $r > 0$ ,  $r' > 0$ ,  $0 \leq i \leq n$  et

$0 \leq j \leq n$ . D'après les résultats classiques de Loève, on en déduit que l'application

$r \mapsto w_{d,r}$  de  $]0, \infty[$  dans  $L^2$  est  $n$  fois continuellement différentiable. On peut donc définir les dérivées en moyenne quadratique

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^i \int_S X(r, t) \sigma(dt)$$

pour  $r > 0$  et  $0 \leq i \leq n$ ; ce sont formellement les moyennes sphériques des dérivées normales auxquelles il a été fait allusion au n° 6.

Passons maintenant à la limite sur  $d$ . Lorsque  $\underline{T}$  est de dimension infinie, on ne peut plus définir les moyennes sphériques, mais la formule (27) montre que la limite

$$C_\infty(r, r') = \lim_{d \rightarrow \infty} C_d(r, r')$$

existe et qu'elle est donnée par

$$(28) \quad C_\infty(r, r') = \frac{1}{2} \left\{ r + r' - (r^2 + r'^2)^{1/2} \right\}.$$

Comme la fonction  $C_\infty$  est analytique sur  $]0, \infty[ \times ]0, \infty[$ , les résultats classiques de Loève montrent que l'application  $r \mapsto w_{\infty, r}$  de  $]0, \infty[$  dans  $L^2$  est analytique pour toute fonction aléatoire gaussienne  $(w_{\infty, r})_{r \geq 0}$  de covariance  $C_\infty$ . Une telle fonction aléatoire est donc déterministe, en accord avec le caractère déterministe du processus  $X$  lorsque  $\underline{T}$  est de dimension infinie (cf. n° 6).

### 8. Prolongement analytique

Le problème posé par P. Lévy dans [ 2 ] est celui de l'existence d'un prolongement analytique dans le plan complexe d'un processus de covariance  $C_\infty$ . Les raisonnements de McKean dans [ 1 ] montrent que le domaine maximum de prolongement analytique est l'ensemble des nombres complexes  $r$  tels que  $|\text{Arg } r| < \pi/4$ . La méthode de McKean est assez compliquée et repose sur l'étude du rayon de convergence d'une série de puissances. Nous allons en donner une version simplifiée.

Nous remarquerons d'abord que le processus  $(w_{\infty, \sqrt{u}})_{u \geq 0}$  a une covariance donnée par la formule

$$(29) \quad D(u, u') = \frac{1}{2} \left\{ u^{1/2} + u'^{1/2} - (u + u')^{1/2} \right\} .$$

Moyennant un changement de variable évident, le résultat de McKean est conséquence du théorème suivant.

THEOREME 3.- Soit  $(A_u)_{u>0}$  une fonction aléatoire gaussienne de covariance D.

Soit  $\Pi$  l'ensemble des nombres complexes de partie réelle positive, et soit  $U$  l'intérieur de  $\Pi$ . Il existe un processus gaussien  $(B_u)_{u \in \Pi}$  avec les propriétés suivantes :

a) on a  $B_u = A_u$  pour  $u$  réel  $> 0$  ;

b) l'application  $u \mapsto B_u$  de  $\Pi$  dans  $L^2$  est continue, et sa restriction à  $U$  est holomorphe.

De plus,  $U$  est le domaine du prolongement analytique maximal de  $A_u$ .

Notons  $\underline{H}$  l'espace de Hilbert  $L^2(0, \infty)$  (mesure de Lebesgue) ; pour  $u$  complexe et  $x > 0$ , posons

$$(30) \quad F(u, x) = \frac{1}{2} \pi^{-1/4} x^{-3/4} (1 - e^{-ux}) .$$

Comme  $1 - e^{-ux}$  est équivalent à  $ux$  pour  $x$  tendant vers 0 et  $u$  fixé, la fonction  $F(u, \cdot)$  sur  $]0, \infty[$  se prolonge en une fonction continue sur  $[0, \infty[$  nulle à l'origine. Le facteur exponentiel dans (30) permet de voir facilement que la fonction  $F(u, \cdot)$  est de carré intégrable si et seulement si la partie réelle de  $u$  est positive. Pour tout  $u \in \Pi$ , on a l'inégalité

$$(31) \quad \pi^{1/2} |F(u, x)|^2 \leq \inf ( |u|^2 x^{1/2}, x^{-3/2} ) \quad (x > 0) ;$$

le théorème de convergence dominée montre alors que l'application  $u \mapsto F(u, \cdot)$  de  $\Pi$  dans  $\underline{H}$  est continue et que sa restriction à  $U$  est holomorphe.

Supposons par ailleurs que  $U_1$  soit un ouvert connexe de l'ensemble des nombres complexes et contienne  $U$ , et que  $F_1$  soit une application holomorphe de  $U_1$  dans  $\underline{H}$  telle que  $F_1(u) = F(u, \cdot)$  pour  $u \in U$ . Soit  $h$  une fonction continue à support compact dans  $]0, \infty[$  ; posons  $\tilde{\Phi}(u) = \int_0^\infty F(u, x) h(x) dx$  pour  $u$  complexe et  $\tilde{\Phi}_1(u) = (F_1(u) | h)$  pour  $u$  dans  $U_1$ . Alors  $\tilde{\Phi}$  est holomorphe dans  $\underline{C}$  et  $\tilde{\Phi}_1$  dans  $U_1$ , et  $\tilde{\Phi}$  et  $\tilde{\Phi}_1$  coïncident dans  $U$  ; on en déduit que  $\tilde{\Phi}$  et  $\tilde{\Phi}_1$  coïncident dans  $U_1$ . Soient alors  $u$  dans  $U_1$  et  $C = ||F_1(u)||$  ;

on a donc l'inégalité

$$(32) \quad \left| \int_0^{\infty} F(u,x) \cdot h(x) dx \right|^2 \leq c^2 \cdot \int_0^{\infty} |h(x)|^2 dx$$

pour toute fonction continue à support compact  $h$  dans  $]0, \infty[$ , et par suite, la fonction  $F(u, \cdot)$  est de carré intégrable sur  $]0, \infty[$ . Comme on l'a vu, ceci entraîne  $u \in \Pi$ , d'où  $U_1 \subset \Pi$  et finalement  $U_1 \subset U$ . On a donc prouvé que  $U$  est le domaine du prolongement analytique maximal de l'application  $u \mapsto F(u, \cdot)$  sur  $]0, \infty[$ .

Soient  $u$  et  $u'$  strictement positifs. Un calcul immédiat donne

$$(33) \quad \int_0^{\infty} F(u,x) \cdot F(u',x) dx = T(u) + T(u') - T(u + u')$$

avec la définition

$$(34) \quad T(u) = \frac{1}{4} \pi^{-1/2} \int_0^{\infty} x^{-3/2} (1 - e^{-ux}) dx.$$

Une intégration par parties dans (34) permet de se ramener à la définition classique de la fonction gamma d'Euler, d'où  $T(u) = \frac{1}{2} u^{1/2}$  (utiliser la formule  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{1/2}$ ). On a donc

$$(35) \quad D(u, u') = \int_0^{\infty} F(u,x) \cdot F(u',x) dx \quad (u > 0, u' > 0);$$

si  $\underline{K}$  est le sous-espace gaussien de  $L^2$  engendré par les variables aléatoires  $A_u$  pour  $u > 0$ , et  $\underline{H}_1$  le sous-espace fermé de  $\underline{H} = L^2(0, \infty)$  engendré par les fonction  $F(u, \cdot)$ , il existe donc un isomorphisme  $\mathcal{G}$  de  $\underline{H}_1$  sur  $\underline{K}$  caractérisé par  $\mathcal{G}(F(u, \cdot)) = A_u$  pour  $u > 0$ .

Pour tout  $h \in \underline{H}$ , la fonction  $u \mapsto (F(u, \cdot) | h)$  est continue dans  $\Pi$  et holomorphe dans  $U$ ; si  $h$  est orthogonale à  $\underline{H}_1$ , cette fonction s'annule sur  $]0, \infty[$ , donc partout dans  $\Pi$ . Par suite,  $F(u, \cdot)$  appartient à  $\underline{H}_1$  pour  $u \in \Pi$ . Si l'on pose  $B_u = \mathcal{G}(F(u, \cdot))$  pour  $u \in \Pi$ , les conditions a) et b) du théorème 3 sont satisfaites. Un argument analogue au précédent montre que tout prolongement analytique de l'application  $u \mapsto A_u$  de  $]0, \infty[$  dans  $L^2$  prend ses valeurs dans  $\underline{K}$ , d'où immédiatement la dernière assertion du théorème 3.

Q.E.D.

### 9. Remarques finales

Dans tout cet exposé, nous avons implicitement considéré une variable aléatoire comme une classe d'équivalence presque sûre de fonctions mesurables sur  $(\underline{\Omega}, \underline{F})$  et un processus comme une famille de telles variables aléatoires. En fait, P.Lévy a construit des

réalisations presque sûrement continues du processus  $X$ . On peut aussi montrer qu'une série aléatoire  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot z^n$ , où la suite  $(A_n)_{n \geq 0}$  est gaussienne, a le même rayon de convergence au sens  $L^2$  ou au sens presque sûr, ce qui permet d'étendre les résultats du n° 8 en obtenant des versions holomorphes (presque sûrement) du processus  $(B_u)_{u \in U}$ .

Dans [ 2 ], P. Lévy démontre que le domaine de prolongement analytique maximal du processus  $(w_{\infty, r})$  est donné par l'inégalité  $|\text{Arg } r| < \pi/6$ . En fait, son raisonnement est fautif à la page 164. P. Lévy essaye de passer à la limite dans son intégrale (5.2.1); malheureusement, dans (5.2.2) les deux termes du membre de droite sont du même ordre de grandeur pour  $u$  dans un voisinage de 1, région qui donne la contribution principale à l'intégrale. En fait, on a  $\sigma_{\omega, h}^2(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^h \left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^h C_{\infty}(t, t') \Big|_{t=t'}$ ; un calcul direct donne  $\sigma_{\omega, 1}^2(t) = 2^{-5/2} t^{-1}$  et  $\sigma_{\omega, 2}^2(t) = 7 \cdot 2^{-9/2} t^{-3}$ , au lieu des coefficients  $2^{-7/2}$  et  $15 \cdot 2^{-11/2}$  trouvés par P. Lévy dans ces cas respectifs. En conclusion, la formule (5.2.7) de P. Lévy, sur laquelle repose le calcul des rayons de convergence, est fautive.

#### REFERENCES

- [ 1 ] MCKEAN, H.P., Brownian motion with a several-dimensional time, Theory of Prob. and its Appl., 8 (1963), p. 335-354.
- [ 2 ] LÉVY, P., A special problem of brownian motion and a general theory of gaussian random functions, Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume II, Univ. of Cal. Press, 1956, p.133-175.