SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL WEIL

Quasi-processus et énergie

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 347-361

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__347_0>

Université de Strasbourg

Séminaire de Probabilités 1969-70

QUASI-PROCESSUS ET ÉNERGIE

par M. WEIL

1. INTRODUCTION

Soient $(P_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe sous-markovien sur un espace localement compact E , $(\Omega , \mathcal{F} , (\mathcal{F}_t) , (X_t) , P^x , x \in E)$ sa réalisation canonique et f une fonction excessive de la classe (D) . P.A. MEYER [1] a montré qu'il existe une fonctionnelle additive naturelle $(A_t)_{t\geq 0}$ sur Ω telle que pour toute mesure initiale λ du processus (X_t) on ait

(1) $$< \lambda , f > = E^{\lambda}[A_{\infty}] \quad .$$

D'autre part si η est une mesure potentiel : $\eta = \lambda U$, il est courant (P.A. MEYER [2]) d'introduire la notion d'énergie de la fonction f par rapport à cette mesure potentiel

(2) $$e(\eta , f) = \frac{1}{2} E^{\lambda}[A_{\infty}^2] \quad .$$

Nous allons, dans ce qui suit, généraliser les relations (1) et (2) pour une mesure excessive η . Pour cela nous utiliserons la notion de quasi-processus.

Je tiens à exprimer à M. P.A. MEYER ma reconnaissance pour ses suggestions et son encouragement.

2. L'ESPACE W . QUASI-PROCESSUS

L'espace des états E des processus sera un espace localement compact à base dénombrable E , muni de sa tribu borélienne $\mathcal{E}$. On adjoint à E les points suivants : 1) le point à l'infini d'Alexandrov, noté ∞ ci-dessous, 2) deux points isolés, distincts entre eux et distincts de ∞ ; nous les noterons δ (atled) et ∂ (deta).

Sur cet espace d'états E nous nous donnons un semi-groupe sous-markovien satisfaisant les "hypothèses droites", c'est-à-dire vérifiant les axiomes A_1 , A_2 , A_3 de P.A. MEYER [3] (l'axiome A_1 indique l'existence d'une réalisation canonique, l'axiome A_2 nous dit que les p-potentiels $(p > 0)$ de fonctions continues bornées sur $E \cup \{\partial\}$ sont presque boréliennes, enfin l'axiome A_3 n'est pas autre chose que la propriété forte de Markov).

L'ESPACE W : Considérons l'ensemble C de tous les couples (a , b) d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $a \leq b$, $a < +\infty$, $b > -\infty$, et distincts de $(-\infty , -\infty)$ et de $(+\infty , +\infty)$. Pour $(a , b) \in C$, désignons par W_{ab} l'ensemble suivant d'applications w de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\{\delta\} \cup E \cup \{\partial\}$ possédant les propriétés suivantes :

1) l'ensemble $\{t : w(t) = \delta\}$ est l'intervalle $]-\infty , a]$ (éventuellement vide) ;

2) l'ensemble $\{t : w(t) = \partial\}$ est l'intervalle $[b , +\infty[$ (éventuellemeny vide).

Nous poserons maintenant $W = \bigcup_C W_{ab}$. La droite étant connexe la seule situation possible est celle-ci : $a(w) < b(w)$. Nous supposerons encore que

3) sur $]a(w) , b(w)[$ l'application w , à valeurs dans E , est continue à droite.

Dans WEIL [5] nous avons encore imposé la condition : 4) si $a(w) = -\infty$ alors $\lim_{t\to-\infty} w(t) = \infty$. Nous ne l'imposerons pas ici.

Nous écrirons $Y_t(w) = w(t)$ pour $t \in R$, $w \in W$ et nous conviendrons que l'on a identiquement $Y_{-\infty} = 6$, $Y_{+\infty} = \partial$. Nous désignerons par $\mathcal{G}^o$ la tribu engendrée par les Y_t , $t \in R$, et par $\mathcal{G}^o_s$ la tribu $\mathfrak{T}(Y_t , t \leq s)$. Les fonctions a et b sont alors des variables aléatoires (instant de naissance et instant de mort), et on pose $\zeta = b - a$ (durée de vie).

L'ensemble W admet des opérateurs de translation naturels τ_t , $t \in R$: si $w \in W$ alors $\tau_t w$ est la trajectoire $s \mapsto Y_{s+t}(w)$, $s \in R$.

On introduit la relation d'équivalence (tr) :

$$(w = w' \bmod(tr)) \Leftrightarrow (\text{il existe } t \in R : w = \tau_t w')$$

et nous désignerons par $\mathcal{H}^o$ la tribu constituée par les éléments de $\mathcal{G}^o$ <u>saturés pour</u> (tr) .

La définition suivante est un peu plus générale que celle donnée dans WEIL [5] .

DÉFINITION 1. - <u>On appelle quasi-processus un triplet</u> $(W , \mathcal{H}^o , \underset{\sim}{P})$ <u>où</u> $\underset{\sim}{P}$ <u>est une mesure positive</u>, σ-<u>finie, sur</u> $(W , \mathcal{H}^o)$.

Les intégrales par rapport à $\underset{\sim}{P}$ seront souvent notées au moyen du symbole d'espérance $\underset{\sim}{E}$.

D'autre part, si K est une partie borélienne de E , la fonction

$$w \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} I_K \circ Y_s(w)ds$$

est $\mathcal{H}^o$-mesurable, d'où la définition :

DÉFINITION 2. - Nous appellerons mesure potentiel du quasi-processus $(W, \mathcal{M}^o, \underset{\approx}{P})$, la mesure

$$K \mapsto \eta(K) = \underset{\approx}{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} I_K \circ Y_s \, ds\right] \quad , \quad K \in \mathcal{E}$$

sur E.

Enfin nous notons $\mathcal{M}$ la complétion de $\mathcal{M}^o$ pour $\underset{\approx}{P}$; les variables aléatoires $\mathcal{M}$-mesurables seront dites permises.

3. QUASI-PROCESSUS MARKOVIENS

Soient $(W, \mathcal{M}^o, \underset{\approx}{P})$ un quasi-processus et η sa mesure potentiel. Une fonction S sur W, à valeurs dans $\overline{R}$, est un temps intrinsèque si elle satisfait à l'identité

$$S(\tau_t w) = S(w) - t \quad , \quad t \in R \quad .$$

On dira que S est un temps d'arrêt intrinsèque si

1) $S(w) > -\infty$ et $a(w) \leq S(w)$ pour presque tout w.
2) S est intrinsèque.
3) S est égal $\underset{\approx}{P}$ - p.s. à un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{G}^o_{t+})$.

Par exemple la variable aléatoire suivante, où H est un ouvert de E

$$T_H = \inf\{t \in R : Y_t \in H\}$$

est un temps d'arrêt intrinsèque.

Voici un autre exemple fondamental de temps d'arrêt intrinsèque : choisissons une fonction borélienne Φ , strictement positive en tout point de E , telle que $< \eta , \Phi > < +\infty$ (c'est possible dès que η est σ-finie ; si η est une mesure de Radon, nous choisirons Φ continue). Jetons hors de W les w tels que $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi \circ Y_s(w)\, ds = +\infty$ et posons

$$\Phi_t(w) = \int_{-\infty}^{t} \Phi \circ Y_s(w)\, ds$$

$$c_t(w) = \inf\{r : \Phi_r(w) > t\} \quad .$$

Alors c_t est un temps d'arrêt intrinsèque.

Notons enfin les propriétés suivantes des temps d'arrêt intrinsèques.

PROPOSITION 1. - 1) <u>Si</u> T <u>est un temps d'arrêt intrinsèque, il en est de même de</u> $T + t$ <u>pour tout</u> $t \geq 0$.

2) <u>Si</u> S <u>et</u> T <u>sont deux temps d'arrêt intrinsèques, il en est de même de</u> $S \vee T$ <u>et</u> $S \wedge T$.

3) <u>Si</u> S <u>et</u> T <u>sont deux temps d'arrêt intrinsèques, alors les variables aléatoires</u> $T - S$, Y_S , Y_T <u>sont permises</u>.

4) <u>Il existe une suite décroissante</u> (T_n) <u>de temps d'arrêt intrinsèques telle que</u> $T_n \downarrow a$, $T_n > a$ <u>pour tout</u> $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. (Il suffit, en effet, de prendre $T_n = c_{1/n}$) .

Nous allons maintenant définir les quasi-processus markoviens. Pour cela soit (P_t) un semi-groupe sous-markovien sur E , satisfaisant aux hypothèses droites, rappelées plus haut.

DÉFINITION 3. - <u>Le quasi-processus</u> $(W, \mathcal{H}^o, \underset{\approx}{P})$ <u>est markovien, de semi-groupe</u> (P_t) <u>si, pour tout temps d'arrêt intrinsèque</u> S , <u>le processus</u> $(Y_{S+t})_{t>0}$ <u>considéré sur</u> $\{S < +\infty\}$ <u>est markovien, de semi-groupe</u> (P_t) .

On peut préciser cette définition : notons $\mathcal{H}_S$ la tribu formée des $A \in \mathcal{H}$ tels que

$$S_A = \begin{cases} S & \text{sur } A \\ \\ +\infty & \text{sur } A^c \end{cases}$$

est un temps d'arrêt intrinsèque. Alors $(Y_{S+t})_{t>0}$ est un processus de Markov par rapport à la famille de tribus $(\mathcal{H}_{S+t})_{t>0}$. Si l'on n'ajoutait pas la condition relative à $\{S < \infty\}$, on risquerait d'avoir $\underset{\approx}{P}\{Y_{S+t} = \partial\} = +\infty$ pour tout $t > 0$.

Soit alors $(K_t)_{t>0}$ le semi-groupe obtenu en faisant sur $(P_t)_{t>0}$ le changement associé à Φ . Le processus $(Y_{c_t})_{t>0}$ est un processus de Markov admettant (K_t) comme semi-groupe de transition, et comme potentiel : la mesure bornée $\Phi . \eta$. Il n'est pas difficile d'en déduire qu'<u>il existe au plus un quasi-processus markovien de potentiel</u> η .

Nous ne nous occupons pas ici de construire un quasi-processus markovien de potentiel η donné (c'était, sous des hypothèses spéciales du type de Feller, l'objet du travail "quasi-processus" (WEIL [5])). Nous partons ici d'un quasi-processus supposé construit. Notons alors comme conséquence de la Proposition 1. 4) ci-dessus que la mesure η est excessive, comme enveloppe d'une suite croissante de potentiels de mesures positives, purement excessives (potentiel d'une loi d'entrée) si $a > -\infty$ p.s. .

Remarquons que les trajectoires d'un quasi-processus markovien ne rencontrent p.s. jamais un ensemble polaire. Par conséquent le processus canonique $(\Omega , \mathcal{F}^o , (\mathcal{F}^o_t) , (X_t) , t \geq 0)$ servant à construire la réalisation, continue à droite, canonique du semi-groupe (P_t) sur l'intervalle de temps $[0 , \infty[$, n'est pas un quasi-processus markovien !

Nous avons le théorème suivant de décomposition de la mesure potentiel d'un quasi-processus markovien :

PROPOSITION 2. - 1) <u>L'événement</u> $\{a = -\infty\} = J$ <u>est permis</u>.

2) <u>Si l'on pose</u> $\underset{\approx}{P}_1 = I_J \cdot \underset{\approx}{P}$, $\underset{\approx}{P}_2 = I_{J^c} \cdot \underset{\approx}{P}$, <u>les quasi-processus</u> $(W , \mathcal{H}^o , \underset{\approx}{P}_i)$, $i = 1, 2$, <u>sont markoviens et admettent</u> (P_t) <u>comme semi-groupe</u>. <u>Soient</u> η_i , $i = 1, 2$, <u>leurs potentiels respectifs</u> : <u>alors la mesure</u> η_1 <u>est invariante, la mesure</u> η_2 <u>est purement excessive et</u> $\eta = \eta_1 + \eta_2$.

DÉMONSTRATION. - La première propriété est triviale car a est une fonction intrinsèque sur W .

Si T est un temps d'arrêt intrinsèque, il en est de même de T_J et de T_{J^c} , d'où la première assertion de 2) (si $A \in \mathcal{H}$ nous avons défini le temps T_A après la définition 1).

Il reste à voir que si $a > \infty$ $\underset{\approx}{P}$-p.s. , η est purement excessive, et si $a = \infty$ $\underset{\approx}{P}$-p.s. , η est invariante. La première de ces deux assertions est facile : on peut considérer le processus $(Y_{a+t})_{t>0}$, c'est un processus de Markov admettant une loi d'entrée, dont le potentiel est η . Or le potentiel d'une loi d'entrée est une mesure purement excessive.

Passons à la seconde. Prenons une suite de temps d'arrêt intrinsèques finis (T_n) tendant en décroissant vers $-\infty$ $\underset{\approx}{P}$-p.s. ; soit K un ensemble tel que $\eta(K) < \infty$. Choisissons n pour que

$$\underset{\approx}{E}\left[\int_0^\infty I_K \circ Y_{T_n+s}\, ds\right] \geq \eta(K) - \epsilon \quad ,$$

puis choisissons m assez grand pour que $m > n$ et

$$\int_{\{T_m+t>T_n\}} d\underset{\approx}{P} \int_{-\infty}^{+\infty} I_K \circ Y_s \, ds < \epsilon \quad .$$

Désignons par η_m la mesure $A \mapsto \underset{\approx}{E}\left[\int_0^\infty I_A \circ Y_{T_m+s}\, ds\right]$: on a $\eta_n(K) \geq \eta(K) - \epsilon$, et $< \eta_m , P_t(I_K) > \geq \eta_n(k) - \epsilon$, d'où $\eta P_t(K) \geq \eta(K) - 2\epsilon$, et enfin $\eta P_t = \eta$.

Définissons maintenant des fonctionnelles additives sur W .

4. FONCTIONNELLES ADDITIVES

Nous noterons $(\Omega , \mathcal{F}^o)$ l'espace mesurable qui sert à construire la réalisation continue à droite canonique $((\mathcal{F}^o_t)_{t\geq 0}$, $(X_t)_{t\geq 0}$, $\underset{\approx}{P}^\circ)$ du semi-groupe (P_t) , sur l'intervalle de temps $[0 , \infty[$. Comme d'habitude (cf. P.A. MEYER [3]) , les tribus complétées par rapport à toutes les mesures $\underset{\approx}{P}^\mu$ (μ mesure de probabilité sur E) sont notées $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_t$ sans ^{o} .

Pour tout temps d'arrêt intrinsèque S , nous définissons une application θ_S de l'ensemble $\{a < S < \infty\}$ dans Ω de la manière suivante

$$X_t(\theta_S w) = Y_{S+t}(w) \qquad (t \geq 0) \quad .$$

Cette application est mesurable de $(W , \mathcal{H})$ dans $(\Omega , \mathcal{F}^o)$, et la loi image est une loi de la forme P^{λ}_{μ} , elle est donc mesurable aussi pour $\mathcal{F}$.

Donnons nous alors une fonctionnelle additive $(A_t)_{t\geq 0}$ sur Ω : pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $t \mapsto A_t(\omega)$, $t \geq 0$, est croissante et continue à droite, à valeurs finies ; pour tout $t \geq 0$, $A_t(.)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable; pour tout temps d'arrêt T de la famille continue à droite $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$, on a $A_{T+s}(\omega) = A_T(\omega) + A_s(\theta_T\omega)$, sauf pour des ω qui forment un ensemble négligeable pour toute mesure P^{λ}_{μ} (l'opérateur θ est celui de Ω et on ne risque pas de le confondre avec l'opérateur θ de W dans Ω défini plus haut). Considérons, d'autre part, la suite de temps d'arrêt intrinsèques $T_n = c_{1/n}$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, du début ; pour tout couple (s , t) de nombres réels tels que $s < t$, $T_n < s$, posons

$$A_{s,t}(w) = A_{t-T_n(w)}(\theta_{T_n} w) - A_{s-T_n(w)}(\theta_{T_n} w) \quad .$$

Par exemple, si (A_t) est la fonctionnelle de type intégral

$$A_t(\omega) = \int_0^t g \circ X_s(\omega)ds \qquad t \geq 0$$

où g est une fonction borélienne bornée, on a

$$A_{s,t}(w) = \int_s^t g \circ Y_u(w)du \qquad s \leq t \qquad s , t \in \mathbb{R} \ .$$

Il est bien clair que $A_{s,t}(.)$ n'est pas permise. Si maintenant nous remplaçons n par m $(m > n)$, il résulte aussitôt de la propriété forte de Markov des fonctionnelles additives rappelées plus haut que l'ensemble des $w \in W$ tels que les deux définitions de $A_{s,t}(w)$ ne concordent pas, est contenu dans un ensemble permis de mesure nulle. Autrement dit, en faisant tendre m vers l'infini, on a :

Sauf pour des $w \in W$ qui forment un ensemble $\underset{\approx}{P}$-négligeable (i.e. contenu dans un ensemble permis de mesure nulle), <u>la fonctionnelle</u> $A_{s,t}(w)$ <u>est définie</u> pour tout couple $(s\ ,\ t)$ tel que $a(w) < s < t$.

Pour s fixe c'est une fonction croissante et continue à droite de t , pour t fixe c'est une fonction décroissante et continue à droite de $s \in]a(w)\ ,\ t]$.

On a

$$A_{s,s} = 0 \qquad \text{pour tout } s \in \mathbb{R}$$
$$A_{s,t} + A_{t,u} = A_{s,u} \quad \text{si} \quad s < t < u \quad .$$

Nous prolongerons cette définition à tous les couples $(s\ ,\ t)$ tels que $s < t$ de la manière suivante : si $t \leq a(w)$, $A_{s,t}(w) = 0$; si $t > a(w)$, $s \leq a(w)$, $A_{s,t}(w) = \lim\limits_{\epsilon \downarrow 0} A_{a(w)+\epsilon,t}(w)$.

Remarquons que l'on a la formule

$$A_{s,t}(\tau_u w) = A_{s-u,t-u}(w) \quad \text{pour } \underset{\approx}{P}\text{-presque tout } w \in W$$

avec un nesemble négligeable qui dépend de u (si la fonctionnelle était parfaite, ce serait une identité hors d'un ensemble négligeable fixe).

Lorsque l'on a affaire à un temps d'arrêt intrinsèque la fonctionnelle A se calcule de la manière suivante :

PROPOSITION 3. - <u>Soit</u> T <u>un temps d'arrêt intrinsèque tel que</u> $a < T$ p.s. . <u>Alors on a pour presque tout</u> $w \in W$

(1) $$A_{T(w),T(w)+u} = A_u(\theta_T w)$$

<u>identiquement en</u> u .

DÉMONSTRATION. - On peut se borner au cas où $T \geq T_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Considérons la fonctionnelle multiplicative sur Ω :

$(M_t) = (\exp(-A_t))$, $t > 0$. On applique alors au processus markovien $(\bar{Y}_t) \equiv (Y_{T_n+t})$, $t > 0$, par rapport à la famille de tribus $(\bar{\mathcal{G}}_t) \equiv (\mathcal{H}_{T_n+t})$, $t > 0$, pour laquelle $R \equiv T - T_n$ est un temps d'arrêt, la proposition de P.A. MEYER [4] page 142 pour constater que $\underset{m}{P}$ -p.s.

$$M_{R(w)+u}(\theta_{T_n} w) = M_{R(w)}(\theta_{T_n} w) \cdot M_u(\theta_T w)$$

pour tout $u \geq 0$. La relation (1) s'en déduit.

Nous allons appliquer cela à la fonctionnelle additive qui engendre une fonction excessive f.

5. THÉORÈME DE REPRÉSENTATION

Voici d'abord quelques préliminaires.

Soit une fonction excessive finie quasi-partout. Pour tout temps d'arrêt intrinsèque R tel que $R > a$ p.s., il est évident que le processus $(f \circ Y_{R+s})_{s \geq 0}$ est une surmartingale positive généralisée (i.e. dont les espérances peuvent être infinies).

Cependant on a le résultat suivant :

LEMME 1. - Soit f une fonction excessive finie quasi-partout. Il existe une suite décroissante $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de temps d'arrêt intrinsèques telle que $S_n \downarrow a$ p.s., que $S_n > a$ p.s., et que pour tout n le processus $(f \circ Y_{S_n+s})_{s>0}$ soit une vraie surmartingale.

DÉMONSTRATION. - Soit A un temps d'arrêt intrinsèque tel que $R > a$ p.s., et λ la loi de Y_R sur E ; nous avons $\lambda U \leq \eta$ où U est l'opérateur potentiel du semi-groupe (P_t). Reprenons la fonction Φ du début (§ 3) : comme $< \eta , \Phi > < \infty$, on a $< \lambda , U\Phi > < \infty$; comme $U\Phi$ est strictement positive et finie quasi-partout, E sera réunion, à un ensemble polaire près, des ensembles finement fermés

$$K_m = \{U\Phi \geq 1/m \ , \ f \leq m\} \quad ,$$

qui croissent avec m, $m \in \mathbb{N} - \{0\}$; et l'on a $< \lambda . I_{K_m} , f > < \infty$.

Posons

$$R_{(m)} = \begin{cases} R & \text{si } Y_R \in K_m \\ + \infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors $R_{(m)} \downarrow R$ lorsque $m \uparrow + \infty$ et le processus $(f \circ Y_{R_{(m)}+s})_{s>0}$ est une vraie martingale pour tout m.

Si nous appliquons maintenant ce résultat à la suite de temps d'arrêt intrinsèques (T_n) déjà utilisée, nous obtenons le lemme en considérant les $T_{n(n)}$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Définissons encore les quantités suivantes :

DÉFINITION 4. - <u>Soient</u> η <u>la mesure potentiel du quasi-processus</u> $(W , \mathcal{H}^o , \underline{P})$ <u>et</u> f <u>une fonction excessive finie quasi-partout</u>. <u>Nous noterons</u> $L(\eta , f)$ <u>la forme bilinéaire suivante</u> :

$$L(\eta , f) = \sup_{\lambda : \lambda U \leq \eta} < \lambda , f > \quad .$$

On montre facilement que la "limite" définissant L est finie et peut-être obtenue à l'aide d'une suite (λ_n) de mesures telle que les mesures $\lambda_n U$ croissent vers η.

DÉFINITION 5. - Soient η la mesure potentiel du quasi-processus $(W, \mathcal{M}^o, \underset{\approx}{P})$, f une fonction excessive de la classe (D) et $(A_t)_{t>0}$ la fonctionnelle additive naturelle sur $(\Omega, \mathcal{F})$ engendrée par f. Nous appellerons énergie de la fonction f pour la mesure η l'expression :

$$e(\eta, f) = \frac{1}{2} \sup_{\lambda : \lambda U \leq \eta} \underset{\approx}{E}^{\lambda} [A_\infty^2] \quad .$$

Nous avons alors le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Lorsque la fonction f est de la classe (D), la fonctionnelle L et l'énergie e sont finies et ont les valeurs suivantes :

$$L(\eta, f) = \underset{\approx}{E} [A_{a,b}] = \underset{\approx}{E} [A_{-\infty,+\infty}]$$

$$e(\eta, f) = \frac{1}{2} \underset{\approx}{E} [A_{a,b}^2] = \frac{1}{2} \underset{\approx}{E} [A_{-\infty,+\infty}^2] \quad ,$$

où $(A_{s,t})$ est la fonctionnelle additive sur $(W, \mathcal{M}, \underset{\approx}{P})$ construite à partir de celle engendrant f.

DÉMONSTRATION. - Avec les notations du lemme 1 désignons par μ_n la loi de Y_{S_n} sur E : on voit aussitôt que η est limite de la suite croissante de mesures excessives $\mu_n U$, $n \in N - \{0\}$. On a donc

$$L(\eta, f) = \lim_{n\to\infty} < \mu_n , f > = \lim_{n\to\infty} E[f \circ Y_{S_n}] \quad .$$

Mais f est de la classe (D) et est donc engendrée par la fonctionnelle additive naturelle $(A_t)_{t\geq 0}$. Par conséquent, avec les notations du paragraphe 4, le processus $(f \circ Y_{S_n+s} + A_{S_n, S_n+s})_{s\geq 0}$ est une vraie martingale, et il en résulte sans peine que

$$L(\eta , f) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[A_{S_n,\infty}]$$
$$= \mathbb{E}[A_{-\infty,+\infty}] \quad .$$

Passons maintenant à l'énergie : considérons la fonction excessive $f' = \mathbb{E}^{\cdot}[A_\infty^2]$; la théorie de l'existence de $L(\eta , .)$ appliquée à f', montre que

$$\sup_{\lambda : \lambda U \leq \eta} \mathbb{E}^{\lambda}[A_\infty^2] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}^{\mu_n}[A_\infty^2] \quad .$$

D'où le théorème car

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}^{\mu_n}[A_\infty^2] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[A^2_{S_n,\infty}]$$
$$= \mathbb{E}[A^2_{-\infty,+\infty}] \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.A. MEYER Fonctionnelles additives et multiplicatives de Markov. Ann. Inst. Fourier. 12. (1962). 125-230.

[2] P.A. MEYER Interprétation probabiliste de la notion d'énergie. Séminaire Brelot-Choquet-Deny (Théorie du potentiel). 7ème année. 1962/63 n° 5 .

[3] P.A. MEYER Processus de Markov. Lecture Notes in Math. n° 26 (1967). Springer.

[4] P.A. MEYER Intégrales stochastiques IV. Séminaire de Probabilité I . Université de Strasbourg. Lecture Notes in Math. n° 39. (1967). Springer.

[5] M. WEIL Quasi-processus. Séminaire de Probabilité IV . Lecture Notes in Math. n° 1.. (1970) . Springer.