

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL WEIL

## Quasi-processus et énergie

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 5 (1971), p. 347-361

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1971\\_\\_5\\_\\_347\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__347_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUASI-PROCESSUS ET ÉNERGIE

par M. WEIL

1. INTRODUCTION

Soient  $(P_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe sous-markovien sur un espace localement compact  $E$ ,  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), (X_t), P^x, x \in E)$  sa réalisation canonique et  $f$  une fonction excessive de la classe  $(D)$ . P.A. MEYER [1] a montré qu'il existe une fonctionnelle additive naturelle  $(A_t)_{t \geq 0}$  sur  $\Omega$  telle que pour toute mesure initiale  $\lambda$  du processus  $(X_t)$  on ait

$$(1) \quad \langle \lambda, f \rangle = E^\lambda[A_\infty] \quad .$$

D'autre part si  $\eta$  est une mesure potentiel :  $\eta = \lambda U$ , il est courant (P.A. MEYER [2]) d'introduire la notion d'énergie de la fonction  $f$  par rapport à cette mesure potentiel

$$(2) \quad c(\eta, f) = \frac{1}{2} E^\lambda[A_\infty^2] \quad .$$

Nous allons, dans ce qui suit, généraliser les relations (1) et (2) pour une mesure excessive  $\eta$ . Pour cela nous utiliserons la notion de quasi-processus.

Je tiens à exprimer à M. P.A. MEYER ma reconnaissance pour ses suggestions et son encouragement.

2. L'ESPACE  $W$  . QUASI-PROCESSUS

L'espace des états  $E$  des processus sera un espace localement compact à base dénombrable  $E$ , muni de sa tribu borélienne  $\mathcal{E}$ . On adjoint à  $E$  les points suivants : 1) le point à l'infini d'Alexandrov, noté  $\infty$  ci-dessous, 2) deux points isolés, distincts entre eux et distincts de  $\infty$ ; nous les noterons  $\delta$  (atled) et  $\partial$  (deta).

Sur cet espace d'états  $E$  nous nous donnons un semi-groupe sous-markovien satisfaisant les "hypothèses droites", c'est-à-dire vérifiant les axiomes  $A_1, A_2, A_3$  de P.A. MEYER [3] (l'axiome  $A_1$  indique l'existence d'une réalisation canonique, l'axiome  $A_2$  nous dit que les  $p$ -potentiels ( $p > 0$ ) de fonctions continues bornées sur  $E \cup \{\partial\}$  sont presque boréliennes, enfin l'axiome  $A_3$  n'est pas autre chose que la propriété forte de Markov).

L'ESPACE  $W$  : Considérons l'ensemble  $C$  de tous les couples  $(a, b)$  d'éléments de  $\bar{\mathbb{R}}$  tels que  $a \leq b$ ,  $a < +\infty$ ,  $b > -\infty$ , et distincts de  $(-\infty, -\infty)$  et de  $(+\infty, +\infty)$ . Pour  $(a, b) \in C$ , désignons par  $W_{ab}$  l'ensemble suivant d'applications  $w$  de  $\bar{\mathbb{R}}$  dans  $\{\delta\} \cup E \cup \{\partial\}$  possédant les propriétés suivantes :

- 1) l'ensemble  $\{t : w(t) = \delta\}$  est l'intervalle  $]-\infty, a]$  (éventuellement vide) ;
- 2) l'ensemble  $\{t : w(t) = \partial\}$  est l'intervalle  $[b, +\infty[$  (éventuellement vide).

Nous poserons maintenant  $W = \bigcup_C W_{ab}$ . La droite étant connexe la seule situation possible est celle-ci :  $a(w) < b(w)$ . Nous supposons encore que

- 3) sur  $]a(w), b(w)[$  l'application  $w$ , à valeurs dans  $E$ , est continue à droite.

Dans WEIL [5] nous avons encore imposé la condition : 4) si  $a(w) = -\infty$  alors  $\lim_{t \rightarrow -\infty} w(t) = \infty$ . Nous ne l'imposerons pas ici.

Nous écrirons  $Y_t(w) = w(t)$  pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $w \in W$  et nous convenons que l'on a identiquement  $Y_{-\infty} = \epsilon$ ,  $Y_{+\infty} = \partial$ . Nous désignerons par  $\mathcal{G}^0$  la tribu engendrée par les  $Y_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , et par  $\mathcal{G}_s^0$  la tribu  $\mathcal{I}(Y_t, t \leq s)$ . Les fonctions  $a$  et  $b$  sont alors des variables aléatoires (instant de naissance et instant de mort), et on pose  $\zeta = b - a$  (durée de vie).

L'ensemble  $W$  admet des opérateurs de translation naturels  $\tau_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  : si  $w \in W$  alors  $\tau_t w$  est la trajectoire  $s \mapsto Y_{s+t}(w)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .

On introduit la relation d'équivalence (tr) :

$$(w = w' \text{ mod}(\text{tr})) \Leftrightarrow (\text{il existe } t \in \mathbb{R} : w = \tau_t w')$$

et nous désignerons par  $\mathcal{H}^0$  la tribu constituée par les éléments de  $\mathcal{G}^0$  saturés pour (tr).

La définition suivante est un peu plus générale que celle donnée dans WEIL [5].

**DÉFINITION 1.** - On appelle quasi-processus un triplet  $(W, \mathcal{H}^0, \underset{\mathcal{M}}{P})$  où  $\underset{\mathcal{M}}{P}$  est une mesure positive,  $\sigma$ -finie, sur  $(W, \mathcal{H}^0)$ .

Les intégrales par rapport à  $\underset{\mathcal{M}}{P}$  seront souvent notées au moyen du symbole d'espérance  $\underset{\mathcal{M}}{E}$ .

D'autre part, si  $K$  est une partie borélienne de  $E$ , la fonction

$$w \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} I_K \circ Y_s(w) ds$$

est  $\mathcal{H}^0$ -mesurable, d'où la définition :

DEFINITION 2. - Nous appellerons mesure potentiel du quasi-processus

$(W, \mathbb{H}^0, \mathbb{P})$ , la mesure

$$K \mapsto \eta(K) = E_{\mathbb{M}} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} I_K \circ Y_s ds \right] , \quad K \in \mathcal{E}$$

sur  $E$ .

Enfin nous notons  $\mathbb{M}$  la complétion de  $\mathbb{H}^0$  pour  $\mathbb{P}$ ; les variables aléatoires  $\mathbb{M}$ -mesurables seront dites permises.

### 3. QUASI-PROCESSUS MARKOVIENS

Soient  $(W, \mathbb{H}^0, \mathbb{P})$  un quasi-processus et  $\eta$  sa mesure potentiel. Une fonction  $S$  sur  $W$ , à valeurs dans  $\bar{\mathbb{R}}$ , est un temps intrinsèque si elle satisfait à l'identité

$$S(\tau_t w) = S(w) - t , \quad t \in \mathbb{R} .$$

On dira que  $S$  est un temps d'arrêt intrinsèque si

- 1)  $S(w) > -\infty$  et  $a(w) \leq S(w)$  pour presque tout  $w$ .
- 2)  $S$  est intrinsèque.
- 3)  $S$  est égal  $\mathbb{P}$ -p.s. à un temps d'arrêt de la famille  $(\tau_{t+}^0)$ .

Par exemple la variable aléatoire suivante, où  $H$  est un ouvert de  $E$

$$T_H = \inf\{t \in \mathbb{R} : Y_t \in H\}$$

est un temps d'arrêt intrinsèque.

Voici un autre exemple fondamental de temps d'arrêt intrinsèque :  
 choisissons une fonction borélienne  $\bar{\varphi}$ , strictement positive en tout point  
 de  $E$ , telle que  $\langle \eta, \bar{\varphi} \rangle < +\infty$  (c'est possible dès que  $\eta$  est  $\sigma$ -finie ;  
 si  $\eta$  est une mesure de Radon, nous choisirons  $\bar{\varphi}$  continue). Jetons hors de  
 $W$  les  $w$  tels que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi} \circ Y_s(w) ds = +\infty$  et posons

$$\bar{\varphi}_t(w) = \int_{-\infty}^t \bar{\varphi} \circ Y_s(w) ds$$

$$c_t(w) = \inf\{r : \bar{\varphi}_r(w) > t\} \quad .$$

Alors  $c_t$  est un temps d'arrêt intrinsèque.

Notons enfin les propriétés suivantes des temps d'arrêt intrinsèques.

PROPOSITION 1. - 1) Si  $T$  est un temps d'arrêt intrinsèque, il en est de même de  $T + t$  pour tout  $t \geq 0$ .

2) Si  $S$  et  $T$  sont deux temps d'arrêt intrinsèques, il en est de même de  $S \vee T$  et  $S \wedge T$ .

3) Si  $S$  et  $T$  sont deux temps d'arrêt intrinsèques, alors les variables aléatoires  $T - S$ ,  $Y_S$ ,  $Y_T$  sont permises.

4) Il existe une suite décroissante  $(T_n)$  de temps d'arrêt intrinsèques telle que  $T_n \downarrow a$ ,  $T_n > a$  pour tout  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ . (Il suffit, en effet, de prendre  $T_n = c_{1/n}$ ).

Nous allons maintenant définir les quasi-processus markoviens. Pour cela soit  $(P_t)$  un semi-groupe sous-markovien sur  $E$ , satisfaisant aux hypothèses droites, rappelées plus haut.

DÉFINITION 3. - Le quasi-processus  $(W, \mathbb{H}^0, P)$  est markovien, de semi-groupe  $(P_t)$  si, pour tout temps d'arrêt intrinsèque  $S$ , le processus  $(Y_{S+t})_{t>0}$  considéré sur  $\{S < +\infty\}$  est markovien, de semi-groupe  $(P_t)$ .

On peut préciser cette définition : notons  $\mathbb{H}_S$  la tribu formée des  $A \in \mathbb{H}$  tels que

$$S_A = \begin{cases} S & \text{sur } A \\ +\infty & \text{sur } A^c \end{cases}$$

est un temps d'arrêt intrinsèque. Alors  $(Y_{S+t})_{t>0}$  est un processus de Markov par rapport à la famille de tribus  $(\mathbb{H}_{S+t})_{t>0}$ . Si l'on n'ajoutait pas la condition relative à  $\{S < \infty\}$ , on risquerait d'avoir  $P_{\mathbb{H}}\{Y_{S+t} = \partial\} = +\infty$  pour tout  $t > 0$ .

Soit alors  $(K_t)_{t>0}$  le semi-groupe obtenu en faisant sur  $(P_t)_{t>0}$  le changement associé à  $\bar{\varphi}$ . Le processus  $(Y_{c_t})_{t>0}$  est un processus de Markov admettant  $(K_t)$  comme semi-groupe de transition, et comme potentiel : la mesure bornée  $\bar{\varphi} \cdot \eta$ . Il n'est pas difficile d'en déduire qu'il existe au plus un quasi-processus markovien de potentiel  $\eta$ .

Nous ne nous occupons pas ici de construire un quasi-processus markovien de potentiel  $\eta$  donné (c'était, sous des hypothèses spéciales du type de Feller, l'objet du travail "quasi-processus" (WEIL [5])). Nous partons ici d'un quasi-processus supposé construit. Notons alors comme conséquence de la Proposition 1. 4) ci-dessus que la mesure  $\eta$  est excessive, comme enveloppe d'une suite croissante de potentiels de mesures positives, purement excessives (potentiel d'une loi d'entrée) si  $a > -\infty$  p.s. .

Remarquons que les trajectoires d'un quasi-processus markovien ne rencontrent p.s. jamais un ensemble polaire. Par conséquent le processus canonique  $(\Omega, \mathcal{F}^0, (\mathcal{F}_t^0), (X_t), t \geq 0)$  servant à construire la réalisation, continue à droite, canonique du semi-groupe  $(P_t)$  sur l'intervalle de temps  $[0, \infty[$ , n'est pas un quasi-processus markovien !

Nous avons le théorème suivant de décomposition de la mesure potentiel d'un quasi-processus markovien :

PROPOSITION 2. - 1) L'événement  $\{a = -\infty\} = J$  est permis.

2) Si l'on pose  $P_{\mathbb{A}1} = I_J \cdot P_{\mathbb{A}}$ ,  $P_{\mathbb{A}2} = I_{J^c} \cdot P_{\mathbb{A}}$ , les quasi-processus  $(W, \mathbb{H}^0, P_{\mathbb{A}i})$ ,  $i = 1, 2$ , sont markoviens et admettent  $(P_t)$  comme semi-groupe. Soient  $\eta_i$ ,  $i = 1, 2$ , leurs potentiels respectifs : alors la mesure  $\eta_1$  est invariante, la mesure  $\eta_2$  est purement excessive et  $\eta = \eta_1 + \eta_2$ .

DÉMONSTRATION. - La première propriété est triviale car  $a$  est une fonction intrinsèque sur  $W$ .

Si  $T$  est un temps d'arrêt intrinsèque, il en est de même de  $T_J$  et de  $T_{J^c}$ , d'où la première assertion de 2) (si  $A \in \mathbb{H}$  nous avons défini le temps  $T_A$  après la définition 1).

Il reste à voir que si  $a > \infty$  P-p.s.,  $\eta$  est purement excessive, et si  $a = \infty$  P-p.s.,  $\eta$  est invariante. La première de ces deux assertions est facile : on peut considérer le processus  $(Y_{a+t})_{t>0}$ , c'est un processus de Markov admettant une loi d'entrée, dont le potentiel est  $\eta$ . Or le potentiel d'une loi d'entrée est une mesure purement excessive.



Passons à la seconde. Prenons une suite de temps d'arrêt intrinsèques finis  $(T_n)$  tendant en décroissant vers  $-\infty$   $\mathbb{P}$ -p.s. ; soit  $K$  un ensemble tel que  $\eta(K) < \infty$ . Choisissons  $n$  pour que

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^{\infty} I_K \circ Y_{T_n+s} ds \right] \geq \eta(K) - \epsilon ,$$

puis choisissons  $m$  assez grand pour que  $m > n$  et

$$\int_{\{T_m+t > T_n\}} d\mathbb{P} \int_{-\infty}^{+\infty} I_K \circ Y_s ds < \epsilon .$$

Désignons par  $\eta_m$  la mesure  $A \mapsto \mathbb{E} \left[ \int_0^{\infty} I_A \circ Y_{T_m+s} ds \right]$  : on a  $\eta_n(K) \geq \eta(K) - \epsilon$ , et  $\langle \eta_m, P_t(I_K) \rangle \geq \eta_n(K) - \epsilon$ , d'où  $\eta P_t(K) \geq \eta(K) - 2\epsilon$ , et enfin  $\eta P_t = \eta$ .

Définissons maintenant des fonctionnelles additives sur  $W$ .

#### 4. FONCTIONNELLES ADDITIVES

Nous noterons  $(\Omega, \mathcal{F}^0)$  l'espace mesurable qui sert à construire la réalisation continue à droite canonique  $((\mathcal{F}_t^0)_{t \geq 0}, (X_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P}^0)$  du semi-groupe  $(P_t)$ , sur l'intervalle de temps  $[0, \infty[$ . Comme d'habitude (cf. P.A. MEYER [3]), les tribus complétées par rapport à toutes les mesures  $\mathbb{P}^\mu$  ( $\mu$  mesure de probabilité sur  $E$ ) sont notées  $\mathcal{F}, \mathcal{F}_t$  sans  $^0$ .

Pour tout temps d'arrêt intrinsèque  $S$ , nous définissons une application  $\theta_S$  de l'ensemble  $\{a < S < \infty\}$  dans  $\Omega$  de la manière suivante

$$X_t(\theta_S w) = Y_{S+t}(w) \quad (t \geq 0) .$$

Cette application est mesurable de  $(W, \mathcal{H})$  dans  $(\Omega, \mathcal{F}^0)$ , et la loi image est une loi de la forme  $P_{\mathbb{M}}^\lambda$ , elle est donc mesurable aussi pour  $\mathcal{F}$ .

Donnons nous alors une fonctionnelle additive  $(A_t)_{t \geq 0}$  sur  $\Omega$  : pour tout  $\omega \in \Omega$ , l'application  $t \mapsto A_t(\omega)$ ,  $t \geq 0$ , est croissante et continue à droite, à valeurs finies ; pour tout  $t \geq 0$ ,  $A_t(\cdot)$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable ; pour tout temps d'arrêt  $T$  de la famille continue à droite  $(\mathcal{F}_s)_{s \geq 0}$ , on a  $A_{T+s}(\omega) = A_T(\omega) + A_s(\theta_T \omega)$ , sauf pour des  $\omega$  qui forment un ensemble négligeable pour toute mesure  $P_{\mathbb{M}}^\lambda$  (l'opérateur  $\theta$  est celui de  $\Omega$  et on ne risque pas de le confondre avec l'opérateur  $\theta$  de  $W$  dans  $\Omega$  défini plus haut). Considérons, d'autre part, la suite de temps d'arrêt intrinsèques  $T_n = c_{1/n}$ ,  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ , du début ; pour tout couple  $(s, t)$  de nombres réels tels que  $s < t$ ,  $T_n < s$ , posons

$$A_{s,t}(\omega) = A_{t-T_n}(\omega)(\theta_{T_n} \omega) - A_{s-T_n}(\omega)(\theta_{T_n} \omega) \quad .$$

Par exemple, si  $(A_t)$  est la fonctionnelle de type intégral

$$A_t(\omega) = \int_0^t g \circ X_s(\omega) ds \quad t \geq 0$$

où  $g$  est une fonction borélienne bornée, on a

$$A_{s,t}(\omega) = \int_s^t g \circ Y_u(\omega) du \quad s \leq t \quad s, t \in \mathbb{R} \quad .$$

Il est bien clair que  $A_{s,t}(\cdot)$  n'est pas permise. Si maintenant nous remplaçons  $n$  par  $m$  ( $m > n$ ), il résulte aussitôt de la propriété forte de Markov des fonctionnelles additives rappelées plus haut que l'ensemble des  $\omega \in W$  tels que les deux définitions de  $A_{s,t}(\omega)$  ne concordent pas, est contenu dans un ensemble permis de mesure nulle. Autrement dit, en faisant tendre  $m$  vers

l'infini, on a :

Sauf pour des  $w \in W$  qui forment un ensemble  $\mathbb{P}$ -négligeable (i.e. contenu dans un ensemble permis de mesure nulle), la fonctionnelle  $A_{s,t}(w)$  est définie pour tout couple  $(s, t)$  tel que  $a(w) < s < t$ .

Pour  $s$  fixe c'est une fonction croissante et continue à droite de  $t$ , pour  $t$  fixe c'est une fonction décroissante et continue à droite de  $s \in ]a(w), t]$ .

On a

$$\begin{aligned} A_{s,s} &= 0 && \text{pour tout } s \in \mathbb{R} \\ A_{s,t} + A_{t,u} &= A_{s,u} && \text{si } s < t < u \end{aligned}$$

Nous prolongerons cette définition à tous les couples  $(s, t)$  tels que  $s < t$  de la manière suivante : si  $t \leq a(w)$ ,  $A_{s,t}(w) = 0$  ; si  $t > a(w)$ ,  $s \leq a(w)$ ,  $A_{s,t}(w) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} A_{a(w)+\epsilon, t}(w)$ .

Remarquons que l'on a la formule

$$A_{s,t}(\tau_u w) = A_{s-u, t-u}(w) \quad \text{pour } \mathbb{P}\text{-presque tout } w \in W$$

avec un ensemble négligeable qui dépend de  $u$  (si la fonctionnelle était parfaite, ce serait une identité hors d'un ensemble négligeable fixe).

Lorsque l'on a affaire à un temps d'arrêt intrinsèque la fonctionnelle  $A$  se calcule de la manière suivante :

**PROPOSITION 3.** - Soit  $T$  un temps d'arrêt intrinsèque tel que  $a < T$  p.s.

Alors on a pour presque tout  $w \in W$

$$(1) \quad A_{T(w), T(w)+u} = A_u(\theta_T w)$$

identiquement en  $u$ .

DÉMONSTRATION. - On peut se borner au cas où  $T \geq T_n$  pour un certain  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ . Considérons la fonctionnelle multiplicative sur  $\Omega$  :

$(M_t) = (\exp(-A_t))$ ,  $t > 0$ . On applique alors au processus markovien  $(\bar{Y}_t) \equiv (Y_{T_n+t})$ ,  $t > 0$ , par rapport à la famille de tribus  $(\bar{\mathcal{G}}_t) \equiv (\mathcal{M}_{T_n+t})$ ,  $t > 0$ , pour laquelle  $R \equiv T - T_n$  est un temps d'arrêt, la proposition de P.A. MEYER [4] page 142 pour constater que  $\mathbb{P}$ -p.s.

$$M_{R(w)+u}(\theta_{T_n} w) = M_{R(w)}(\theta_{T_n} w) \cdot M_u(\theta_{T_n} w)$$

pour tout  $u \geq 0$ . La relation (1) s'en déduit.

Nous allons appliquer cela à la fonctionnelle additive qui engendre une fonction excessive  $f$ .

## 5. THÉORÈME DE REPRÉSENTATION

Voici d'abord quelques préliminaires.

Soit une fonction excessive finie quasi-partout. Pour tout temps d'arrêt intrinsèque  $R$  tel que  $R > a$  p.s., il est évident que le processus  $(f \circ Y_{R+s})_{s \geq 0}$  est une surmartingale positive généralisée (i.e. dont les espérances peuvent être infinies).

Cependant on a le résultat suivant :

LEMME 1. - Soit  $f$  une fonction excessive finie quasi-partout. Il existe une suite décroissante  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de temps d'arrêt intrinsèques telle que  $S_n \downarrow a$  p.s., que  $S_n > a$  p.s., et que pour tout  $n$  le processus  $(f \circ Y_{S_n+s})_{s > 0}$  soit une vraie surmartingale.

DÉMONSTRATION. - Soit  $A$  un temps d'arrêt intrinsèque tel que  $R > a$  p.s., et  $\lambda$  la loi de  $Y_R$  sur  $E$ ; nous avons  $\lambda U \leq \eta$  où  $U$  est l'opérateur potentiel du semi-groupe  $(P_t)$ . Reprenons la fonction  $\bar{\varphi}$  du début (§ 3) : comme  $\langle \eta, \bar{\varphi} \rangle < \infty$ , on a  $\langle \lambda, U\bar{\varphi} \rangle < \infty$ ; comme  $U\bar{\varphi}$  est strictement positive et finie quasi-partout,  $E$  sera réunion, à un ensemble polaire près, des ensembles finement fermés

$$K_m = \{U\bar{\varphi} \geq 1/m, f \leq m\},$$

qui croissent avec  $m$ ,  $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ ; et l'on a  $\langle \lambda, I_{K_m}, f \rangle < \infty$ .

Posons

$$R_{(m)} = \begin{cases} R & \text{si } Y_R \in K_m \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors  $R_{(m)} \downarrow R$  lorsque  $m \uparrow +\infty$  et le processus  $(f \circ Y_{R_{(m)}+s})_{s>0}$  est une vraie martingale pour tout  $m$ .

Si nous appliquons maintenant ce résultat à la suite de temps d'arrêt intrinsèques  $(T_n)$  déjà utilisée, nous obtenons le lemme en considérant les  $T_{n(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ .

Définissons encore les quantités suivantes :

DÉFINITION 4. - Soient  $\eta$  la mesure potentiel du quasi-processus  $(W, \mathbb{H}^0, \mathbb{P})$  et  $f$  une fonction excessive finie quasi-partout. Nous noterons  $L(\eta, f)$  la forme bilinéaire suivante :

$$L(\eta, f) = \sup_{\lambda: \lambda U \leq \eta} \langle \lambda, f \rangle.$$

On montre facilement que la "limite" définissant  $L$  est finie et peut-être obtenue à l'aide d'une suite  $(\lambda_n)$  de mesures telle que les mesures  $\lambda_n U$  croissent vers  $\eta$ .

**DÉFINITION 5.** - Soient  $\eta$  la mesure potentiel du quasi-processus  $(W, \mathcal{M}, P)$ ,  $f$  une fonction excessive de la classe (D) et  $(A_t)_{t>0}$  la fonctionnelle additive naturelle sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  engendrée par  $f$ . Nous appellerons énergie de la fonction  $f$  pour la mesure  $\eta$  l'expression :

$$e(\eta, f) = \frac{1}{2} \sup_{\lambda: \lambda U \leq \eta} E^\lambda [A_\infty^2] .$$

Nous avons alors le théorème suivant :

**THÉORÈME 1.** - Lorsque la fonction  $f$  est de la classe (D), la fonctionnelle  $L$  et l'énergie  $e$  sont finies et ont les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} L(\eta, f) &= E [A_{a,b}] = E [A_{-\infty, +\infty}] \\ e(\eta, f) &= \frac{1}{2} E [A_{a,b}^2] = \frac{1}{2} E [A_{-\infty, +\infty}^2] , \end{aligned}$$

où  $(A_{s,t})$  est la fonctionnelle additive sur  $(W, \mathcal{M}, P)$  construite à partir de celle engendrant  $f$ .

**DÉMONSTRATION.** - Avec les notations du lemme 1 désignons par  $\mu_n$  la loi de  $Y_{S_n}$  sur  $E$  : on voit aussitôt que  $\eta$  est limite de la suite croissante de mesures excessives  $\mu_n U$ ,  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ . On a donc

$$L(\eta, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mu_n, f \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} E[f \circ Y_{S_n}] .$$

Mais  $f$  est de la classe (D) et est donc engendré par la fonctionnelle additive naturelle  $(A_t)_{t \geq 0}$ . Par conséquent, avec les notations du paragraphe 4, le processus  $(f \circ Y_{S_n+s} + A_{S_n, S_n+s})_{s \geq 0}$  est une vraie martingale, et il en résulte sans peine que

$$\begin{aligned} L(\eta, f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E_{\mu_n}^{\lambda} [A_{S_n, \infty}] \\ &= E_{\mu}^{\lambda} [A_{-\infty, +\infty}] \quad . \end{aligned}$$

Passons maintenant à l'énergie : considérons la fonction excessive  $f' = E_{\mu}^{\lambda} [A_{\infty}^2]$  ; la théorie de l'existence de  $L(\eta, \cdot)$  appliquée à  $f'$ , montre que

$$\sup_{\lambda: \lambda U \leq \eta} E_{\mu}^{\lambda} [A_{\infty}^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} E_{\mu_n}^{\mu} [A_{\infty}^2] \quad .$$

D'où le théorème car

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E_{\mu_n}^{\mu} [A_{\infty}^2] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E_{\mu_n}^{\lambda} [A_{S_n, \infty}^2] \\ &= E_{\mu}^{\lambda} [A_{-\infty, +\infty}^2] \quad . \end{aligned}$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P.A. MEYER      Fonctionnelles additives et multiplicatives de Markov.  
Ann. Inst. Fourier. 12. (1962). 125-230.
- [2] P.A. MEYER      Interprétation probabiliste de la notion d'énergie. Séminaire  
Brelot-Choquet-Deny (Théorie du potentiel). 7ème année.  
1962/63 n° 5 .
- [3] P.A. MEYER      Processus de Markov. Lecture Notes in Math. n° 26 (1967).  
Springer.
- [4] P.A. MEYER      Intégrales stochastiques IV. Séminaire de Probabilité I .  
Université de Strasbourg. Lecture Notes in Math. n° 39.  
(1967). Springer.
- [5] M. WEIL        Quasi-processus. Séminaire de Probabilité IV . Lecture Notes  
in Math. n° 1.. (1970) . Springer.