

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL WEIL

Décomposition d'un temps terminal

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 342-346

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__342_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DECOMPOSITION D'UN TEMPS TERMINAL

par Michel WEIL

Supposons, pour simplifier, que nous avons affaire avec la réalisation canonique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^x, x \in E)$ d'un semi-groupe de HUNT sur un espace localement compact à base dénombrable E .

Soit T un temps d'arrêt pour la famille (\mathcal{F}_t) . On vérifie alors que les temps

$$T_p = \begin{cases} T & \text{sur } \{X_{T-} = X_T\} \\ +\infty & \text{sur } \{X_{T-} \neq X_T\} \end{cases} \quad T_i = \begin{cases} T & \text{sur } \{X_{T-} \neq X_T\} \\ +\infty & \text{sur } \{X_{T-} = X_T\} \end{cases}$$

sont respectivement prévisible et totalement inaccessible sur l'ensemble $\{0 < T < +\infty\}$. De plus on a $T = T_p \wedge T_i$.

Malheureusement si T est terminal, les temps T_p et T_i ne le sont pas. Le théorème suivant donne une autre décomposition de T résolvant cette question.

THÉOREME. - Soit T un temps terminal exact sans point régulier. Notons par $A = \{X_{T-} = X_T, T < \infty\}$ et $I = \{X_{T-} \neq X_T, T < \infty\}$ la décomposition de $\{T < \infty\}$ en partie prévisible et totalement inaccessible. Alors il existe deux temps d'arrêt terminaux T_{pr} et T_{in} , l'un prévisible, l'autre totalement inaccessible, respectivement égaux à T sur A et I , et tels que $T = T_{ac} \wedge T_{pr}$.

Remarque. - La propriété ci-dessus en remplaçant le terme prévisible par accessible est encore valable lorsqu'on a un processus stochastique muni d'un opérateur de translation : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}, X_t, \theta_t, P)$, mais alors la décomposition du théorème dépend de la mesure P .

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. - Pour simplifier nous supposons que le temps T est parfait (i.e. la relation $t + T \circ \theta_t = T$ a lieu identiquement sur $\{t < T\}$).

Si a est un nombre rationnel positif nous poserons

$$T^a = a + T \circ \theta_a .$$

C'est encore un temps d'arrêt pour la famille (\mathcal{F}_t) . Nous désignerons par A^a (resp. I^a) le sous-ensemble $\{X_{T^a} = X_{T^a}\}$ (resp. $\{X_{T^a} \neq X_{T^a}\}$) de $\{T < \infty\}$ où T^a est prévisible (resp. totalement inaccessible), et par T_p^a, T_i^a les temps suivants

$$T_p^a = \begin{cases} T^a & \text{sur } A^a \\ +\infty & \text{sur } I^a \end{cases}$$

$$T_i^a = \begin{cases} T^a & \text{sur } I^a \\ +\infty & \text{sur } A^a \end{cases} .$$

Définissons alors les temps d'arrêt suivants :

$$T_{pr} = \inf_{a \in \mathbb{Q}_+} T_p^a \quad T_{in} = \inf_{a \in \mathbb{Q}_+} T_i^a .$$

Ils sont respectivement prévisible et totalement inaccessible. (*) Montrons que

$T = T_{in}$ sur I : nous avons $I = I^a \cap \{a < T\}$ car sur $\{a < T\}$ on a $T^a = T$; par conséquent si $\omega \in I$ on a :

$$\begin{aligned} T_{in}(\omega) &= \inf_a T_i^a(\omega) \\ &= \inf_a T^a(\omega) && \text{car } \omega \in I^a \\ &= \inf_a T(\omega) && \text{car } \omega \in \{a < T\} \\ &= T(\omega) . \end{aligned}$$

(*) Le temps terminal T étant sans point régulier, l'ensemble des valeurs $T^a(\omega)$ est isolé à droite, et les inf en question sont atteints.

De même on montre que $T = T_p$ sur A et tout ceci entraîne que $T = T_{in} \wedge T_{pr}$.

Il reste à montrer que T_{in} et T_p sont des temps terminaux.

Prouvons le par exemple pour T_{in} , c'est-à-dire que pour $t < T_{in}$ on a

$$T_{in} \circ \theta_t = T_{in} - t.$$

Montrons d'abord le lemme

LEMME. - Pour tous nombres positifs, a , t on a les relations

$$(1) \quad \{X_{T_-^a} \circ \theta_t \neq X_{T^a} \circ \theta_t\} = \{X_{T_-^{a+t}} \neq X_{T^{a+t}}\}$$

$$(2) \quad (T_i)^a = T_i^a.$$

Si, de plus S est un temps d'arrêt de la famille (\mathcal{F}_s) et

$S^a = a + S \circ \theta_a$, $a \in \mathbb{R}_+$, alors d'une part

$$(3) \quad S^a = S^t \quad \text{sur} \quad \{a \leq t < S^a\},$$

d'autre part

$$(4) \quad S^a \leq S^t \quad \text{lorsque} \quad 0 \leq a \leq t.$$

DÉMONSTRATION. - On voit sans peine que

$$T^{a+t} = a + t + T \circ \theta_{a+t} = t + T^a \circ \theta_t$$

et par suite $X_{T^a} \circ \theta_t = X_{T^{a+t}}$, d'où le relation (1). On en déduit (2).

Pour la relation (3) on procède ainsi : on a $\{t < T^a\} = \{t - a < T \circ \theta_a\}$.

Donc, car T est un temps terminal :

$$t - a + T \circ \theta_a \circ \theta_{t-a} = T \circ \theta_a \quad \text{sur} \quad \{a \leq t < T^a\}$$

ou encore

$$t - a + T \circ \theta_a = T \circ \theta_a \quad \text{sur} \quad \{a \leq t < T^a\}$$

c'est-à-dire

$$T^t = T^a \quad \text{sur} \quad \{a \leq t < T^a\} .$$

Montrons la relation (4) : comme $T \leq T^\epsilon$ pour tout $\epsilon \geq 0$ on aura

$$T \circ \theta_a \leq T^\epsilon \circ \theta_a ,$$

donc

$$a + T \circ \theta_a \leq a + T^\epsilon \circ \theta_a ,$$

c'est-à-dire

$$T^a \leq T^{a+\epsilon} .$$

SUITE DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. - De la première partie du lemme précédant il résulte que

$$T_i^a \circ \theta_t = T_i^{a+t} - t$$

et par conséquent

$$T_{in} \circ \theta_t = \inf_{a \in \mathbb{Q}_+} T_i^a \circ \theta_t = \inf_{a \in \mathbb{Q}_+} T_i^{a+t} - t .$$

Or sur $\{t < T_{in}\}$ nous avons toujours $T_i^a \geq T_i^t$ pour tout $a \geq 0$. En effet :
ou bien $a \geq t$ et cela résulte de la relation (4) avec $S = T_i$; ou bien $a < t$,
mais nous sommes sur $\{t < T_{in}\}$ donc nous avons

$$a \leq t < T_i^a$$

ou encore

$$a \leq t < (T_i)^a$$

d'après (2) ; par suite

$$(T_i)^a = (T_i)^t$$

d'après (3) ;

donc

$$T_i^a = T_i^t$$

d'après (2) .

De la relation $T_i^a \geq T_i^t$, pour tout $a \in \mathbb{Q}_+$, on conclut vu (4) que

$$\inf_{a \in \mathbb{Q}_+} T_i^{a+t} = \inf_{a \in \mathbb{Q}_+} T_i^a$$

ce qui achève cette démonstration.