

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN BRETAGNOLLE

Résultats de Kesten sur les processus à accroissements indépendants

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 21-36

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__21_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RESULTATS DE KESTEN SUR LES PROCESSUS A ACCROISSEMENTS
INDEPENDANTS

par Jean Bretagnolle

I. INTRODUCTION. On se propose de donner une démonstration des résultats de Kesten sur les processus à accroissements indépendants contenus dans " Hitting probabilities of single points for processes with stationary independent increments " (*) et un autre article non encore publié.

Comme le lecteur pourra s'en convaincre aisément, les idées de la démonstration sont celles de Kesten, et l'allègement provient de ce qu'on utilise les fonctions excessives naturellement associées au problème, ce qui permet de raisonner directement sur les points et non sur le potentiel de petits intervalles.

Présentons rapidement les résultats de Kesten.

$X=(X_t)$ est un processus à accroissements indépendants et stationnaires (P.A.I. pour abrégé), tel que $P\{X_0=0\}=1$, à valeurs réelles. Définissons C comme

$$C = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, P\{ X_t=x \text{ pour au moins un } t>0 \} > 0 \}$$

Nous dirons que X est un processus de Poisson généralisé si les trajectoires issues de 0 restent un moment en 0 avant de le quitter: X n'a pas de partie gaussienne, un nombre fini de sauts dans tout intervalle, et pas de translation. Ce cas sera exclu dans la suite.

Le difficile théorème principal de Kesten est alors le suivant :

Ou bien C a une mesure de Lebesgue $\lambda(C) \neq 0$, ou bien $C=\emptyset$ (on obtient aisément un critère sur le potentiel pour que $\lambda(C)=0$). Si C n'est pas vide, C est l'un des ensembles $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$.

De même, si X est à valeurs dans \mathbb{R}^d , et est " honestly d -dimensional " (ce qui signifie qu'aucune projection unidimensionnelle de X n'est un processus de Poisson généralisé), on a $C=\emptyset$.

(*) *Memoirs Amer. Math. Soc.*, n°93, 1969 .

Puis, dans le cas où $d=1$, Kesten donne un critère de régularité de 0 pour $\{0\}$.

Enfin, Kesten classe les P.A.I. par rapport aux propriétés précédentes, suivant leur décomposition de Lévy.

II. RAPPELS ET NOTATIONS. X est un P.A.I. à valeurs dans \mathbb{R}^d , construit canoniquement de la manière habituelle. Le processus X est donc continu à droite, pourvu de limites à gauche, quasi-continu à gauche. Il satisfait à la propriété de Markov forte et à la loi 0-1 de Blumenthal. On note Θ_t l'opérateur de translation ($X_s \circ \Theta_t = X_{s+t}$), P_x la loi du processus issu de x , et P_0 est abrégée en P .

On note P_t le semi-groupe ($P_t f(x) = E_x[f \circ X_t]$), U^p le p -potentiel ($U^p f(x) = E_x[\int_0^\infty e^{-pt} P_t f(x) dt]$, pour $p > 0$), et U^p aussi la mesure $U^p(0, \cdot)$, de sorte que

$$U^p f(x) = \int U^p(dy) f(x+y).$$

On note T_A le temps d'entrée dans l'ensemble A ($T_A = \inf \{ t > 0 \mid X_t \in A \}$), T_x le temps d'entrée dans l'ensemble $\{x\}$. Le point x est dit régulier pour A si $P_x\{T_A=0\}=1$.

Une fonction g est p -excessive si $e^{-pt} P_t g \leq g$, et $\lim_{t \rightarrow 0} P_t g(x) = g(x)$ pour tout x . On se sert de la continuité fine d'une telle fonction sous la forme suivante : l'image inverse par g d'un ouvert de \mathbb{R} est un ouvert fin G , ce qui signifie que le processus partant d'un point $x \in G$ ne quitte P_x -p.s. pas tout de suite G .

LEMME 1. Soit A un ensemble pour lequel 0 est régulier, et soit g une fonction p -excessive. Il existe alors une suite (x_n) , $x_n \in A$, $x_n \rightarrow 0$ et $\lim_n g(x_n) = g(0)$.

DEMONSTRATION. Supposons le contraire. Il existe un $\varepsilon > 0$ et un voisinage V de 0 tel que $V \cap \{x \mid g(0) - \varepsilon < g(x) < g(0) + \varepsilon\}$ ne rencontre pas A . Or cet ensemble est un ouvert fin, le processus issu de 0 y reste p.s. un moment avant d'en sortir, donc T_A ne peut être nul P -p.s.

LEMME 2. La fonction g^p définie par $g^p(x) = E_x[e^{-pT_0}]$ est p -excessive.
(Posons $T_0 = T$; $e^{-pt} P_t g^p(x) = E_x[\exp(-p(t+T_0 \circ \Theta_t))]$, et $t+T_0 \circ \Theta_t \downarrow T$)

En fait, suivant les notations de Kesten, on utilise plutôt la fonction $h^P(x) = g^P(-x) = E[e^{-P^T x}]$. L'ensemble C de l'introduction est alors

$$C = \{ x \mid h^P(x) > 0 \} .$$

On a $T_{x+y} \leq T_x + T_y \circ \theta_{T_x}$, d'où $h^P(x+y) \geq h^P(x)h^P(y)$ (propriété de Markov forte). En particulier, C est un semi-groupe.

Toutes les définitions précédentes s'appliquent au cas d'un P.A.I. à valeurs dans un groupe abélien E, localement compact à base dénombrable. Port et Stone (*) ont étendu à ce cas une grande partie des résultats de Kesten.

Rappelons notre hypothèse principale pour toute la suite (+)
(H) 0 est point régulier pour $E \setminus \{0\}$ (autrement dit, dans le cas $E = \mathbb{R}$, X n'est pas un processus de Poisson généralisé). Cela exclut que E soit discret. On note λ la mesure de Haar de E.

III. RAPPORTS ENTRE U^P ET h^P . On comparera les résultats de cette partie avec les paragraphes 6 et 7 de Port et Stone. Si A est un ensemble, $x+A$ est le translaté de A par x, et

$$h^P(A) = E[e^{-P^T A}]$$

LEMME 3.- Soient $x \in E$, J un voisinage compact symétrique de 0. On a

$$h^P(x) \cdot U^P(J) \leq U^P(x+J) \leq h^P(x+J) \cdot \sup_{z \in J} U^P(z+J)$$

DEMONSTRATION. Posons $x+J=A$, $T_{x+J}=T$. Nous avons

$$U^P(A) = E\left[\int_0^\infty e^{-Pt} I_A \circ X_t dt\right] = E\left[\int_T^\infty e^{-Pt} I_A \circ X_t dt\right]$$

Pour la seconde inégalité, on applique la propriété de Markov ainsi :

$$U^P(A) = E[e^{-P^T A} U^P(X_T, A)]$$

Mais $X_T \in A$, et pour $y \in A$ $U^P(y, A) = U^P(x-y+J) \leq \sup_{z \in J} U^P(z+J)$, tandis que $E[e^{-P^T A}] = h^P(x+J)$. Pour la première inégalité, on remarque que $x \in x+J$, donc $T_x \geq T$ et

(*) Infinitely divisible processes and their potential theory. A paraître. (+) Toutefois le théorème 1 est vrai sans cette hypothèse.

$$U^P(A) \geq E \left[\int_{T_x}^{\infty} e^{-Pt} I_A \circ X_t dt \right] = E \left[e^{-P T_x} U^P(X_{T_x}, A) \right] = h^P(x) U^P(x, x+J) \\ = h^P(x) U^P(J) .$$

Dans l'énoncé suivant, nous désignons par \mathfrak{J} une suite décroissante de voisinages compacts symétriques de 0, formant une base du filtre des voisinages. Nous posons

$$k^P(\mathfrak{J}) = \limsup_J \sup_{zeJ} \frac{U^P(z+J)}{\lambda(J)}$$

(la \limsup est prise suivant l'ensemble filtrant \mathfrak{J} ; on abrège $k^P(\mathfrak{J})$ en k^P) .

THEOREME 1. 1) Si $k^P = +\infty$, on a $\lambda(C) = 0$

2) Si $k^P < +\infty$, on a $\lambda(C) > 0$, la mesure $U^P(dx)$ est absolument continue par rapport à λ , et une version bornée de sa densité est

$$u^P(x) = k^P \cdot h^P(x) .$$

DEMONSTRATION. Si $zeJ = -J$, on a $xex+z+J$, et on a comme dans le lemme 3, première inégalité

$$h^P(x) U^P(z+J) \leq U^P(x+z+J)$$

D'où en intégrant sur E et en divisant par $\lambda(J)$

$$(1) \quad \frac{U^P(z+J)}{\lambda(J)} \int_E h^P(x) \lambda(dx) \leq \frac{1}{\lambda(J)} \int_E U^P(x+z+J) \lambda(dx) = \frac{1}{p}$$

En passant à la limite en z et J, on obtient que si $k^P = +\infty$, h^P est nulle λ -p.p. .

Passons à 2). Soit G un ouvert relativement compact. La seconde inégalité du lemme 3, intégrée sur G, donne

$$\limsup_J \int_G \frac{U^P(x+J)}{\lambda(J)} \lambda(dx) \leq k^P \cdot \limsup_J \int_G h^P(x+J) \lambda(dx)$$

Mais $h^P(x+J)$ tend vers $h^P(x)$ sur $E \setminus \{0\}$, en vertu de la quasi-continuité à gauche du processus. L'hypothèse faite sur X exclut que E soit discret, donc λ est diffuse ; comme $\lambda(G) < +\infty$ on peut appliquer le théorème de convergence dominée et l'on obtient

$$\limsup_J \int_G \frac{U^P(x+J)}{\lambda(J)} \lambda(dx) \leq k^P \cdot \int_G h^P(x) \lambda(dx)$$

Par ailleurs, soit i_J la fonction $I_J/\lambda(J)$. L'intégrale au premier membre vaut $\int U^P(dy) / i_J(y-x) I_G(x) \lambda(dx)$, et l'on a $\liminf_J i_J * I_G \geq I_G$.

Il vient alors en appliquant Fatou

$$(2) \quad U^p(G) \leq k^p \int_G h^p(x) \lambda(dx) ,$$

qui entraîne la continuité absolue de U^p et le fait que sa densité est bornée. Reprenons l'inégalité (1), mais en intégrant sur un compact K contenu dans G au lieu de E :

$$(3) \quad \frac{U^p(z+J)}{\lambda(J)} \int_K h^p(x) \lambda(dx) \leq \frac{1}{\lambda(J)} \int_K U^p(x+z+J) \lambda(dx) \\ = \int_K U^p(dy) / \lambda(dx) I_{z+J}(y-x) / \lambda(J)$$

Si J est assez petit, zeJ , l'intégrale intérieure est majorée par I_G . Un passage à la limite en z, J , puis K donne l'inégalité $k^p / \int_G h^p(x) \lambda(dx) \leq U^p(G)$, inverse de (2). Le théorème est démontré.

COROLLAIRE 1.- $k^p(\mathfrak{J})$ ne dépend pas de \mathfrak{J} .

COROLLAIRE 2.- On a $\lambda(C) > 0$ si et seulement si

$$(1) \quad \limsup_{J \in \mathfrak{J}} \frac{U^p(J)}{\lambda(J)} < \infty \quad (\text{ce corollaire, pour } E = \mathbb{R}^d)$$

Noter que cette \limsup n'est pas forcément égale à k^p . Il est clair que si $k^p < \infty$, cette \limsup est finie. Inversement, si cette \limsup est finie, notons \mathfrak{J}' l'ensemble des intervalles $J' = \frac{1}{2}J$, $J \in \mathfrak{J}$. On a si zeJ'

$$\frac{U^p(z+J')}{\lambda(J')} \leq 2 \frac{U^p(J)}{\lambda(J)}, \text{ d'où aussitôt la résultat.}$$

IV. PROPRIETES LOCALES DE h^p . Cette partie contient la démonstration du théorème de Kesten lorsque $E = \mathbb{R}$.

LEMME 4. Soit (y_n) une suite telle que $\lim_n y_n = 0$, $y_n \neq 0$, $h^p(y_n) \geq c > 0$ pour tout n . Soit $A = \cup_n \{y_n\}$.

Alors si $T_A > 0$ P-p.s., on a $\lim_n h^p(-y_n) = 1$ et $T_{-A} = 0$ P-p.s..

DEMONSTRATION. On rappelle que d'après la loi de 0-1 de Blumenthal, $P\{T_A=0\}$ ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1.

Soit $A_n = \bigcup_{k \geq n} \{y_k\}$, et soit $T_n = T_{A_n}$. Les temps d'arrêt T_n croissent, soit S leur limite. Comme $\bigcap_n \bar{A}_n = \{0\}$, la quasi-continuité à gauche des trajectoires entraîne que $X_S = \lim_n X_{T_n} = 0$ p.s. sur $\{S < \infty\}$.

Une application facile de la propriété de Markov entraîne que, pour tout ensemble H , X_{T_n} appartient à H ou est régulier pour H . Ici 0 n'appartient pas à A_n , et n'est pas régulier pour A_n puisqu'il ne l'est pas pour A . Donc $X_{T_n} \neq 0$; comme $X_{T_n} \in \bar{A}_n = A_n \cup \{0\}$, on a $X_{T_n} \in A_n$ sur $\{T_n < \infty\}$. Mais $X_S = 0$ sur $\{S < \infty\}$. On a donc $T_n < S$ sur $\{T_n < \infty\}$.

On a donc aussi $S \geq T_n + T_{\{0\} \circ \theta_{T_n}}$, donc $E[e^{-pS}] \leq E[e^{-p(T_n + T_{\{0\} \circ \theta_{T_n}})}] = E[e^{-pT_n} g^p \circ X_{T_n}]$ (rappelons que $g^p(x) = h^p(-x) = E_X[e^{-pT_0}]$). Donc

$$E[e^{-pS}] \leq E[e^{-pT_n}] \cdot \sup_{y \in A_n} h^p(-y)$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, on a $T_n \uparrow S$, et il vient aussitôt que ou bien $\lim_n T_n = +\infty$ p.s., ou bien sinon $\sup_{y \in A_n} h^p(-y) \rightarrow 1$ ($=1$). Le premier cas

est exclu ici, car $E[e^{-pT_n}] \geq h^p(y_n) \geq c$. On a donc $\lim_n \sup_{y \in A_n} h^p(-y) = 1$; en considérant des suites extraites on remplace $\lim_n \sup_{y \in A_n}$ par \lim_n . L'égalité $T_A = 0$ P-p.s. est alors évidente.

THEOREME 2. Les seules valeurs d'adhérence possibles pour $h^p(y)$ quand $y \rightarrow 0$ sont 0, $h^p(0)$ et 1.

DEMONSTRATION. Supposons d'abord $h^p(0) \neq 0$. Soit c une valeur d'adhérence, et soit une suite $y_n \rightarrow 0$, $y_n \neq 0$ pour tout n , telle que $h^p(y_n) \rightarrow c$. Quitte à extraire une sous suite, nous pouvons supposer aussi que $h^p(-y_n)$ a une limite b .

Premier cas : $T_A = 0$ p.s.. On applique alors le lemme 1 à $-A$ et à la fonction p -excessive g^p : il existe une sous-suite $(-y_{n_k})$ telle que $g^p(-y_{n_k}) \rightarrow g^p(0)$. Autrement dit, $h^p(y_{n_k}) \rightarrow h^p(0)$, et $c = h^p(0)$.

(*) Ce résultat sera amélioré : cf. th.6.

Second cas : $T_{-A} > 0$ p.s., $T_A = 0$ p.s. Le lemme 1 appliqué à A entraîne l'existence d'une sous-suite (y_{n_k}) telle que $g^p(y_{n_k}) \rightarrow g^p(0)$, ou $h^p(-y_{n_k}) \rightarrow h^p(0) \neq 0$. On a donc $b \neq 0$, et le lemme 4 appliqué à $-A$ entraîne $c=1$.

Troisième cas : $T_{-A} > 0$ p.s., $T_A > 0$ p.s. . On a alors $c=0$. Sinon, en effet, le lemme 4 s'appliquerait à A et entraînerait $T_{-A}=0$, en contradiction avec l'hypothèse.

Supposons maintenant $h^p(0)=0$. Si $h^p \equiv 0$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, choisissons un $r \neq 0$ tel que $h^p(r) > 0$. Soit alors (P_t) un processus de Poisson de hauteur de saut $-r$, de paramètre a (a sera choisi petit) indépendant de X_t , et soit $\bar{X}_t = X_t + P_t$. On a $\bar{h}^p(0) > 0$ (la surcharge $\bar{\quad}$ indique le remplacement de (X_t) par le nouveau processus (\bar{X}_t)) : en effet, si $\omega \in \Omega$ est tel que la trajectoire $X_t(\omega)$ rencontre r , et que la trajectoire $P_t(\omega)$ ait exactement un saut entre 0 et $T_r(\omega)$, alors la trajectoire $\bar{X}_t(\omega)$ rencontre 0. Les deux processus étant indépendants, cet événement a une probabilité positive.

Soit τ l'instant du premier saut du processus de Poisson. Nous avons pour tout y

$$\bar{T}_y = T_y \text{ sur } \{\tau > T_y\}, \quad T_y \geq \tau, \quad T_y \geq \tau \text{ sur } \{\tau \leq T_y\}$$

et par conséquent

$$|h^p(y) - \bar{h}^p(y)| \leq \int_{\{\tau \leq T_y\}} (e^{-p\bar{T}_y} + e^{-pT_y}) \leq 2E[e^{-p\tau}] = \frac{2a}{p+a}$$

Soit alors une suite $y_n \rightarrow 0$ telle que $h^p(y_n) \rightarrow c \neq 0$. En choisissant a assez petit, on aura que $\liminf_n \bar{h}^p(y_n) \geq \frac{c}{2}$, $\bar{h}^p(0) < \frac{c}{2}$. D'après la première partie de la démonstration, appliquée à \bar{X} , il ne reste plus que la possibilité $\lim_n \bar{h}^p(y_n) = 1$: en faisant tendre a vers 0, on obtient $\lim h^p(y_n) = 1$ par convergence uniforme, et avec cela la démonstration est achevée.

Nous passons maintenant au théorème principal de Kesten .

THEOREME 3. Dans le cas $E=\mathbb{R}$, ou bien $C=\emptyset$, ou bien $\lambda(C)>0$.

DEMONSTRATION. Supposons $C \neq \emptyset$. Nous pouvons aussi supposer $h^p(0) \neq 0$. En effet, si $h^p(0)=0$, comme $C \neq \emptyset$ nous pouvons choisir un r tel que $h^p(r) > 0$, et construire le processus modifié \bar{X} de la fin de la démonstration précédente, pour lequel $\bar{h}^p(0) > 0$. Nous aurons alors $\lambda(\bar{C}) > 0$; mais le processus de Poisson P ne prend que des valeurs de la forme $-nr$ (n entier positif), donc $\bar{C} \subset \bigcup_n (-nr+C)$, et $\lambda(C) > 0$.

L'hypothèse (H) signifie que 0 est point régulier pour $A=E \setminus \{0\}$ (i.e. $T_A=0$ P-p.s.). Le lemme 1 entraîne alors l'existence d'une suite $y_n \rightarrow 0$, $y_n \neq 0$, telle que $g^p(y_n) \rightarrow g^p(0)$. Autrement dit, si nous posons $r_n = -y_n$, nous avons $r_n \rightarrow 0$, $r_n \neq 0$ et $h^p(r_n) \rightarrow h^p(0)$. Il nous suffira de savoir que $h^p(r_n) \geq \frac{1}{2}h^p(0)$.

Soit J_n l'intervalle centré en 0, de longueur $\frac{1}{2}|r_n|$, et soit

$$k_n = \inf \{ k \mid k \in \mathbb{N}, h^p(k \cdot r_n) < \frac{1}{2}h^p(0) \}$$

Noter que k_n n'est ni 0, ni 1. Les intervalles $kr_n + J_n$ sont disjoints deux à deux, et on a la chaîne d'inégalités

$$p^{-1} = U^p(\mathbb{R}) \geq \sum_0^{k_n-1} U^p(kr_n + J_n) \geq \sum_0^{k_n-1} h^p(kr_n) U^p(J_n) \geq \frac{1}{2}h^p(0)k_n U^p(J_n)$$

Il en résulte d'abord que $k_n < \infty$.

(lemme 3)

Ensuite, comme $\lambda(J_n) = |r_n|/2$, nous avons

$$\frac{U^p(J_n)}{\lambda(J_n)} \leq \frac{4}{ph^p(0)|k_n r_n|}$$

Pour achever la démonstration, compte tenu du second corollaire du th.1, il suffit de montrer que $\liminf_n |k_n r_n| > 0$.

Supposons donc $\liminf_n |k_n r_n| = 0$. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer $\lim_n k_n r_n = 0$. Comme $k_n < \infty$, nous avons

$\limsup_n h^p(k_n r_n) \leq \frac{1}{2} h^p(0)$ d'après la définition de k_n . D'après le corollaire du lemme 4, cela entraîne que $h^p(k_n r_n) \rightarrow 0$. Mais nous avons d'autre part

$$h^p(k_n r_n) \geq h^p(r_n) h^p((k_n - 1) r_n) \geq \left[\frac{1}{2} h^p(0) \right]^2 > 0.$$

C'est absurde, et le théorème est prouvé.

THEOREME 4. Dans le cas $E = \mathbb{F}^d$, $d > 1$, si aucune projection unidimensionnelle de X n'est un processus de Poisson généralisé (hypothèse H), alors C est vide.

La démonstration utilisant des résultats sur le cas $d=1$ qui seront prouvés plus loin, nous la renvoyons à la fin de l'exposé.

V. ETUDE DU CAS $\lambda(C) > 0$. Dans toute cette partie, on va supposer que $\lambda(C) > 0$. On caractérisera alors complètement la topologie fine des P.A.I. sur \mathbb{E} possédant cette propriété, et on retrouvera les résultats de Kesten sur la régularité de 0 pour $\{0\}$.

Utilisation de l'équation résolvante. Lorsque $\lambda(C) > 0$, nous avons vu que la mesure $U^p(dx)$ admet une densité bornée $u^p(x) = k^p h^p(x)$. Voici quelques conséquences de ce résultat.

- a) Si f est une fonction bornée, on a $U^p f(x) = \int f(x+y) u^p(y) dy$; cette fonction est continue. Si f est positive, $U^p f$ est s.c.i..
- b) Si f est p -excessive, on a $f = \lim_{p \rightarrow \infty} U^p f$, donc f est s.c.i. Noter aussi que deux fonctions p -excessives égales λ -p.p. sont égales partout.

Nous dirons que f est p -coexcessive si la fonction $x \mapsto f(-x)$ est p -excessive. L'énoncé b) vaut aussi pour les fonctions p -coexcessives. Les fonctions h^p, u^p sont p -coexcessives.

- c) Nous avons la relation $u_p - u_q = (q-p) u_p * u_q$ λ -p.p. (équation résolvante). Supposons par exemple $q > p$; les fonctions $u_p, u_q + (q-p) u_p * u_q$ sont q -coexcessives et égales λ -p.p., donc partout.

THEOREME 5.- Si $\lambda(C) > 0$, les fonctions u^p, h^p sont continues sur $E \setminus \{0\}$, et on a $h^p(0) = \liminf_{x \rightarrow 0, x \neq 0} h^p(x)$.

DEMONSTRATION. Soit V un voisinage de 0 . Si $x \in V^c$, on a $T_x \geq T_{V^c}$, donc $h^q(x) = E[e^{-qT_x}] \leq E[e^{-qT_{V^c}}]$, et il en résulte que h^q tend vers 0 uniformément sur V^c lorsque $q \rightarrow \infty$. Comme k^q décroît évidemment lorsque $q \rightarrow \infty$, $u^q = k^q h^q$ tend vers 0 uniformément sur V^c . Mais dans l'équation résolvante $u_p = u_q + (q-p)u_p * u_q$, le produit de convolution $u_p * u_q$ est une fonction continue. Lorsque $q \rightarrow \infty$, il en résulte que u^p est continue sur V^c . Ainsi, u^p (et donc h^p) est continue sur $E \setminus \{0\}$.

La fonction h^p est p -coexcessive, donc s.c.i., et on a $h^p(0) \leq \liminf_{x \rightarrow 0, x \neq 0} h^p(x)$. Il résulte d'autre part du lemme 1, appliqué à g^p et à $E \setminus \{0\}$, qu'il existe une suite $x_n \rightarrow 0$, $x_n \neq 0$ telle que $h^p(x_n) \rightarrow h^p(0)$, d'où l'inégalité inverse, et finalement l'égalité cherchée.

THEOREME 6. Si $\lambda(C) > 0$, h^p a en 0 deux valeurs d'adhérence (éventuellement confondues) : 1 et $h^p(0)$. La fonction h^p est continue en 0 si et seulement si $h^p(0) = 1$ (c'est à dire si 0 est régulier pour $\{0\}$).

Dans le cas où $E = \mathbb{R}^{(*)}$ h^p a une limite à droite et une limite à gauche en 0 , égales aux deux valeurs d'adhérence précédentes, et on a la classification suivante, en supposant par exemple que $h^p(0+) = 1$

a) Si $h^p(0) = 1$, la topologie fine est la topologie usuelle de \mathbb{R} , et on a $C = \mathbb{R}$.

b) Si $0 < h^p(0) < 1$, la topologie fine est la topologie droite, et $C = \mathbb{R}$.

c) Si $h^p(0) = 0$, la topologie fine est la topologie droite, et $C = \mathbb{R}_+$.

La fonction h^p est nulle sur \mathbb{R}_- , et X est un processus croissant.

DEMONSTRATION.- Nous savons (th.2) que h^p peut avoir au plus trois valeurs d'adhérence, 0 , $h^p(0)$, 1 , mais la valeur d'adhérence 0 est exclue si $h^p(0) \neq 0$, d'après le th.5.

Montrons ensuite que $(h^p \text{ continue en } 0) \Leftrightarrow (h^p(0) = 1)$. Dans le sens \Leftarrow , cela résulte des relations $h^p \leq 1$, $h^p(0) = \liminf_{x \rightarrow 0, x \neq 0} h^p(x)$.

(*) Il n'y a pas lieu d'étudier le cas $E = \mathbb{R}^d$, $d > 1$, car nous verrons que l'on a toujours $\lambda(C) = 0$ si $d > 1$.

Dans le sens \Rightarrow , on note que $(h^P \text{ continue}) \Rightarrow (u^P \text{ continue}) \Rightarrow (k^P = u^P(0)) \Rightarrow (h^P(0) = u^P(0)/k^P = 1)$.

La valeur d'adhérence 1 est toujours présente : c'est clair si h^P est continue d'après ce qui précède, et si h^P n'est pas continue elle a au moins deux valeurs d'adhérence, dont l'une doit être 1.

Supposons que $h^P(0) = 1$. Si les topologies fine et initiale n'étaient pas identiques, il existerait un voisinage fin de 0, V , qui ne serait pas un voisinage de 0. Choisissons des $y_n \in V^c$, tels que $y_n \rightarrow 0$, et posons $A = \bigcup \{y_n\}$; la relation $\lim h^P(y_n) = 1$ entraîne que $T_A = 0$ P-p.s., donc $T_{V^c} = 0$ p.s., ce qui est ⁿ absurde.

Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, $h^P(0) > 0$, le semi-groupe $C = \{h^P > 0\}$ contient un voisinage de 0; on a donc $C = \mathbb{R}$.

Étudions maintenant le cas où $h^P(0) < 1$. Posons $c = h^P(0)$. Si h^P n'admettait pas de limite à droite en 0, on pourrait trouver deux suites x_n, x'_n , convergeant toutes deux vers 0 en décroissant, telles que $h^P(x_n) \rightarrow 1$, $h^P(x'_n) \rightarrow c$. Mais h^P étant continue, il existe un y_n compris entre x_n et x'_n , pour n assez grand, tel que $h^P(y_n) = \frac{1+c}{2}$, ce qui est impossible, car h^P n'a que deux valeurs d'adhérence en 0. Supposons que l'on ait $h^P(0+) = 1$, $h^P(0-) = h^P(0) = c$.

La fonction g^P est finement continue (elle est p-excessive), donc 0 n'est pas finement adhérent à l'ensemble $\{g^P > g^P(0)\}$. Comme $g^P(0-) = 1$, on voit que 0 n'est pas finement adhérent à \mathbb{R}_+^* . En revanche, si A est une partie de \mathbb{R}_+^* , adhérente à 0, alors A contient une suite $y_n \downarrow 0$, on a $h^P(y_n) \rightarrow 1$, et $T_A = 0$ P-p.s. Il en résulte aussitôt que la topologie fine est la topologie droite. On a évidemment $\mathbb{R}_+ \subset C$.

Si $h^P(0) = 0$, la relation $h^P(0) \geq h^P(x)h^P(-x)$ montre que $C \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$, donc $C = \mathbb{R}^+$. Comme h^P est à un facteur près la densité de u^P , \mathbb{R}_- est un ensemble de potentiel nul en 0; le processus issu de 0 passe donc toute son existence dans \mathbb{R}^+ , les accroissements de X sont positifs, et X est croissant. La démonstration est achevée.

VI. CRITERES ANALYTIQUES. On se propose dans cette dernière partie de caractériser les P.A.I. possédant les diverses propriétés étudiées plus haut, au moyen de leur décomposition de Lévy.

Rappelons que tout P.A.I. à valeurs dans \mathbb{R}^d admet une fonction caractéristique de la forme

$$E[e^{i\langle u, X_t \rangle}] = \exp [t \psi(u)], \text{ où } \langle , \rangle \text{ est le produit scalaire,}$$

$$\psi(u) = i\langle u, a \rangle - \frac{1}{2}Q(u) + \int_{\mathbb{R}^d} [e^{i\langle u, y \rangle} - 1 - \frac{i\langle u, y \rangle}{1+|y|^2}] M(dy)$$

a désignant un élément de \mathbb{R}^d , Q une forme quadratique positive (mais éventuellement dégénérée) sur \mathbb{R}^d , et M une mesure positive sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ telle que $\int (|y|^2 \wedge 1) M(dy) < \infty$.

Nous étudierons surtout le cas $d=1$. Nous poserons alors $Q(u) = \sigma^2 u^2$. Dans le cas où $\int (1 \wedge |y|) M(dy) < \infty$, nous utiliserons la représentation plus simple

$$\psi(u) = iua' - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_{\mathbb{R}} [e^{iuy} - 1] M'(dy).$$

Nous allons d'abord traduire le théorème 1, qui est vrai sans aucune hypothèse spéciale :

THEOREME 7.- Une condition nécessaire et suffisante pour que $\lambda(C) > 0$ est que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{Re} \frac{1}{p - \psi(u)} \lambda(du) < +\infty.$$

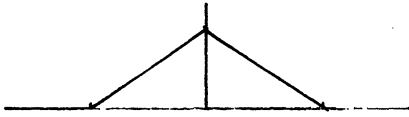
DEMONSTRATION.- Soit f une fonction continue sur \mathbb{R}^d positive, paire, à support compact, telle que $f(0) > 0$, $\int f(x) \lambda(dx) = 1$, et soit $f_n(x) = n^d f(nx)$. f est majorée et minorée par l'indicatrice d'un pavé symétrique de centre 0, le corollaire 2 du théorème 1 nous donne

$$\lambda(C) > 0 \Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n(y) U^n(dy) < \infty$$

Cette intégrale s'écrit $C(d) \int \hat{f}_n(u) \hat{U}^n(u) du$ par transformation de Fourier, or $\hat{U}^n(u) = 1/p - \psi(u)$, $\hat{f}_n(u) = \hat{f}(\frac{u}{n})$ est réelle, et il reste seulement à étudier

$$\int \hat{f}(\frac{u}{n}) \operatorname{Re} \frac{1}{p - \psi(u)} du$$

La partie réelle est positive, car $\operatorname{Re} \psi \leq 0$, et il ne reste plus qu'à bien choisir f. Nous le ferons pour $d=1$. Soit g une fonction triangle d'intégrale 1 :



Alors $\hat{g}(u)$ est de la forme $\frac{\sin au}{au}$; si l'on prend alors $f=g*g$, $\hat{f}(u) = \left(\frac{\sin au}{au}\right)^2$ est positive, et $\hat{f}\left(\frac{u}{n}\right)$ croît vers 1 sur tout compact K pour $n \geq N_K$ (dépendant de K). On laisse conclure le lecteur.

Voici la classification finale. Nous distinguons les cas suivants.

CAS A . $\sigma \neq 0$.

CAS B . $\sigma = 0$; $\int (|x| \wedge 1) M(dx) = +\infty$

CAS C . $\sigma = 0$; $\int (|x| \wedge 1) M(dx) < +\infty$. Nous adoptons alors la représentation simplifiée, et nous distinguons trois sous-cas (*)

C_1 . $a' = 0$,

C_2 . $a' > 0$, M' portée par \mathbb{R}_+ ,

C_3 . $a' > 0$, M' charge \mathbb{R}_- .

On rappelle que dans le cas C M' est supposée non bornée, le cas des processus de Poisson généralisés ayant été exclu de la discussion.

THEOREME 8. Dans le cas A, on a $C = \mathbb{R}$, et 0 est régulier pour $\{0\}$.

Dans le cas B, on peut avoir $C = \emptyset$ ou $C = \mathbb{R}$ (on n'a pas d'autre critère que le th.7). Si $C = \mathbb{R}$, 0 est régulier pour $\{0\}$.

Dans le cas C_1 , on a $C = \emptyset$.

Dans le cas C_2 , on a $C = \mathbb{R}_+$ (et 0 n'est pas régulier pour $\{0\}$)

Dans le cas C_3 , on a $C = \mathbb{R}$ (et 0 n'est pas régulier pour \emptyset)

Dans le cas B, Kesten montre en outre que si l'une des deux intégrales $\int (x^+ \wedge 1) M(dx)$, $\int (x^- \wedge 1) M(dx)$ converge, alors $C = \mathbb{R}$. Nous laissons

cela de côté.

DEMONSTRATION. Quitte à remplacer M par $M.I_{[-n, +n]}$, où n est très grand (ce qui ne modifie le processus qu'après un temps d'arrêt exponentiel très long), nous pouvons supposer que M est à support compact.

Etudions d'abord l'ensemble C . Dans le cas A, on a $\psi(u) = iau + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 = o(u^2)$ quand $|u| \rightarrow \infty$, donc $\operatorname{Re} \frac{1}{1 - \psi(u)}$ est intégrable, et $C \neq \emptyset$.

Dans les cas C_2 et C_3 , on écrit $\frac{\text{Im} \psi(u)}{u} = a' + \frac{\sin uy}{u} M'(dy)$, qui tend vers $a' \neq 0$ lorsque $|u| \rightarrow \infty$ (convergence dominée). Puisque $a' \neq 0$, on a $\text{Im} \psi(u) \sim u$, donc $|\text{Re} \psi(u)|^2 \geq \frac{1}{2} u^2$ pour $|u|$ assez grand, et l'intégrale du théorème 7 est de même nature que $\int_{|u|>1} \frac{-\text{Re} \psi(u)}{u^2} du$. Mais on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\text{Re} \psi(u)}{u^2} du = \iint \frac{1 - \cos uy}{u^2} du M'(dy) = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos v}{v^2} dv \int |x| M'(dx) < \infty$$

Ainsi $C \neq \emptyset$ dans les cas C_2 et C_3 . Énonçons maintenant le théorème de Rogozin : dans les cas A et B, on a p.s. (pour P_0)

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{X_t}{t} = +\infty, \quad \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{X_t}{t} = -\infty$$

tandis que dans le cas C on a $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{X_t}{t} = a'$. Dans le cas C_1 , on peut donc associer à tout $\varepsilon \in]0, 1[$ un nombre $t_\varepsilon \leq 1$ tel que

$$P_0 \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t_\varepsilon} \frac{|X_s|}{s} \leq \varepsilon \right\} \geq 1 - \varepsilon$$

Alors $U^P([- \varepsilon t_\varepsilon, \varepsilon t_\varepsilon]) \geq (1 - \varepsilon) \int_0^{t_\varepsilon} e^{-pt} dt$, et $\frac{U^P([- \varepsilon t_\varepsilon, \varepsilon t_\varepsilon])}{2 \varepsilon t_\varepsilon} \geq \frac{(1 - \varepsilon) e^{-p}}{2 \varepsilon}$

qui est arbitrairement grand. Le théorème 1 nous donne alors $\lambda(C) = 0$, et le théorème 3, $C = \emptyset$.

Lorsque $C \neq \emptyset$, on a $C = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ ou \mathbb{R}_- . Mais $C = \mathbb{R}_+$ signifie (puisque u^p et h^p sont proportionnelles) que u^p est nulle sur \mathbb{R}_- , donc que le processus partant de 0 reste dans \mathbb{R}_+ : le processus est donc croissant, et M est portée par \mathbb{R}_+ . Comme $C \neq \emptyset$, on a $a' \neq 0$ (cas C_2). Le cas $C = \mathbb{R}_-$ est le cas symétrique, il ne figure pas dans la classification.

Passons à la régularité de 0 pour $\{0\}$. Dans le cas A, ou dans le cas B si $C \neq \emptyset$, le théorème de Rogozin entraîne que le processus entre instantanément dans \mathbb{R}_+ et dans \mathbb{R}_- . La topologie fine ne peut donc être ni la topologie droite, ni la topologie gauche, c'est donc la topologie usuelle, et le théorème 6 entraîne que 0 est régulier pour $\{0\}$. Le cas C_2 est trivial (processus croissant). Dans le cas C_3 , le théorème de Rogozin entraîne que X_t rentre aussitôt dans \mathbb{R}_+ , et y reste un moment avant de rencontrer \mathbb{R}_- . La topologie fine n'est donc pas la topologie usuelle, c'est la droite, et comme $C \neq \mathbb{R}_+$ on a $0 \notin \hat{h}^p(0) < 1$, et 0 n'est pas régulier pour $\{0\}$ (th.6). La classification est achevée.

VII. LE CAS OU $d > 1$. On se propose dans cette dernière partie de démontrer le théorème 4. Il suffit de traiter le cas où $d=2$: en effet, si le processus X de dimension $d > 2$ admettait des points non polaires, ses projections de dimension 2 en admettraient à plus forte raison. Nous allons montrer d'abord que si $d=2$, on a $\lambda(C)=0$, en nous appuyant sur les théorèmes 1 et 7 (indépendants de l'hypothèse (H)). Comme dans la démonstration précédente, on peut se simplifier la vie en supposant que la mesure de Lévy M est à support compact.

Traitons d'abord le cas où le processus admet une partie gaussienne non dégénérée : la forme quadratique Q est de rang 2. Un argument de convergence dominée dans le terme intégral de la formule de Lévy montre que $|\psi(u) + \frac{1}{2}Q(u)| = o(|u|^2)$ quand $u \rightarrow \infty$; mais on peut écrire cela $o(Q(u))$ puisque Q est de rang 2, et il en résulte que $\psi(u) \sim \frac{1}{2}Q(u)$. Comme $\int_{|u|>1} \frac{du}{|u|^p}$ diverge pour $p=2$, converge pour $p > 2$, il est très facile de vérifier que l'intégrale du th.7 est divergente.

Supposons Q de rang < 2 . Soit γ la mesure gaussienne dont la transformée de Fourier est $\exp(-\frac{1}{2}Q(u))$, et soit $B(0,a)$ la boule de centre 0 et de rayon a . Un argument de convergence dominée dans la formule de Lévy montre que $t\psi(u.t^{-1/2})$ tend vers $-\frac{1}{2}Q(u)$ lorsque $t \rightarrow 0$, autrement dit, la loi de $\frac{X_t}{\sqrt{t}}$ tend vers γ , et on en déduit que pour tout $a > 0$

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{U^P(B(0,\varepsilon))}{\varepsilon^2} &= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int e^{-pt} P\{|X_t| \leq \varepsilon\} \frac{dt}{\varepsilon^2} \\ &\geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon^2/a^2} e^{-pt} P\{|X_t| \leq a\sqrt{t}\} \frac{dt}{\varepsilon^2} \\ &\geq \frac{\gamma(B(0,a))}{a^2} \end{aligned}$$

Mais γ est une loi gaussienne dégénérée, donc ce dernier terme tend vers l'infini lorsque $a \rightarrow 0$, et le th.1 donne le résultat cherché.

Nous montrons ensuite que , sous l'hypothèse (H), on a $C = \emptyset$. On va calquer la démonstration du théorème 3. Supposons $C \neq \emptyset$. On se ramène au cas où $h^P(0) \neq 0$ (cf. théorème 3). Il existe une suite r_n telle que $r_n \neq 0$, $|r_n| \rightarrow 0$, $h^P(r_n) \geq \frac{1}{2}h^P(0)$. On peut imposer de plus

que $r_n/|r_n|$ converge vers un vecteur unitaire u . Nous prendrons des axes Ox, Oy suivant u et la direction perpendiculaire, et nous écrirons $r_n = (x_n, y_n)$. Soit Y_t la projection de X_t sur la direction perpendiculaire à u . Comme $C(Y)$ contient la projection de $C(X)$, qui n'est pas vide, $C(Y)$ ne l'est pas non plus, et le th.3 (que nous pouvons appliquer

en vertu de l'hypothèse (H) : Y_t n'est pas un processus de Poisson généralisé) entraîne que $C(Y)$ a une mesure non nulle. D'après le théorème 1, le potentiel V^P de Y a une densité bornée, et il existe donc une constante a telle que

$$U^P(\{(x,y) \mid |y| < d\}) \leq ad \text{ pour tout } d > 0.$$

Comme dans la démonstration du théorème 3, on pose

$$k_n = \inf \{ k \mid k \in \mathbb{N}, h^P(k.r_n) < \frac{1}{2} h^P(0) \}$$

et on démontre que $k_n < \infty$, et que $k_n.r_n$ ne tend pas vers 0. Nous pouvons donc choisir des entiers $l_n \leq k_n$ tels que $|l_n.r_n|$ reste borné supérieurement et inférieurement : quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $l_n.x_n \rightarrow b \neq 0$, et alors comme $y_n = o(x_n)$ on a $l_n.y_n \rightarrow 0$. Fixons $d > 0$; soit J_k^n le carré de centre $k.r_n$ et d'arête d . Comme $l_n.y_n \rightarrow 0$, tous les J_k^n , $k < l_n$, sont contenus dans la bande $\{|y| < 2d\}$ pour $n \geq N$ fixe, et on peut en trouver à peu près $\frac{l_n}{d/r_n} \sim \frac{b}{d}$ disjoints. Nous avons donc pour n grand

$$U^P(\{(x,y) \mid |y| < 2d\}) \geq \frac{1}{2} \frac{b}{d} \left(\frac{1}{2} h^P(0) \right) U^P(J_0^n) \quad (\text{lemme 3})$$

Le premier membre est majoré par $2ad$. D'autre part, J_0^n est simplement le carré J_d de centre 0 et d'arête d . Il vient donc

$$U^P(J_d) = O(d^2) = O(\lambda(J_d))$$

Mais c'est absurde : d'après le corollaire 2 du th.1 cela entraînerait $\lambda(C) > 0$.