Patrice Assouad

Démonstration de la « Conjecture de Chung » par Carleson

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 17-20
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__17_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1969/70

DEMONSTRATION DE LA "CONJECTURE DE CHUNG" PAR CARLESON

Exposé de Patrice Assouad

L'énoncé de la " conjecture de Chung" est celui du théorème 1 ci-dessous. Il peut être interprété comme un résultat sur les processus à accroissements indépendants : sous cette forme, c'est maintenant un cas particulier des théorèmes de Kesten présentés dans ce volume par Bretagnolle. Toutefois, la première démonstration de la conjecture a été donnée par L.Carleson, **en utilisant** des méthodes purement analytiques. Cette démonstration n'a pas été publiée. Elle a été rédigée par K.L.Chung à partir d'un exposé de Carleson, et cette rédaction a servi de base au présent exposé.

THEOREME 1. <u>Soit</u> s : $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ <u>une fonction positive localement intégrable, nulle sur</u> $]-\infty, 0]$, <u>décroissante sur</u> $]0,+\infty[$, <u>telle que</u> $s(0+)=\infty$.

<u>Soit</u> w <u>une mesure de Radon sur</u> $\mathbb{R}$, <u>portée par</u> $[0,\infty[$, <u>telle que</u>

(1) $\int_0^x s(x-t)w(dt) = 1$ <u>pour presque tout</u> $x>0$.(*)

<u>Alors on a</u> $\int_0^x s(x-t)w(dt)=1$ <u>pour tout</u> $x>0$.

1) Noter que w est diffuse, sans quoi (comme $s(0+)=+\infty$) la fonction $\int s(x-t)w(dt)$ ne saurait être bornée. On ne change donc rien en supposant s continue à droite.

2) Pour $\theta>0$ posons $s_\theta(x)=\frac{1}{\theta}\int_{x-\theta}^{x} s(t)dt$. Alors s_θ est nulle sur $]-\infty,0]$, et $\int s_\theta(x-t)w(dt)$ vaut 0 sur $]-\infty,0]$, 1 sur $[0,\infty[$, est linéaire entre les deux, donc est ≤ 1 partout.

3) Fixons $x_0>0$, et considérons la mesure μ sur $\mathbb{R}$, portée par $[0,x_0]$

$$\mu(f) = \int_0^{x_0} f(x_0-t)w(dt)$$

Nous avons pour $\theta<x_0$ $\mu(s_\theta)=1$, et $s_\theta \xrightarrow[\theta\to 0]{} s$. <u>Tout revient à montrer que</u> $\mu(s)=1$.

(*) Compte tenu des hypothèses sur les supports de s et w, cela s'écrit simplement $\int s(x-t)w(dt)=Y(t)$ (fonction de Heaviside) sans qu'il soit nécessaire d'écrire les bornes.

LEMME. Soit $j(x)=\dfrac{\int_0^x s(t)dt}{xs(x)}$. Alors on a

i) $s_\theta(x) \leqq 3j(3\theta)s(x)$ sur $[0,3\theta]$ et $s_\theta(x)\leqq \frac{3}{2}j(x)s(x)$ sur $[3\theta,\infty[$.

ii) $\lim\limits_{\theta\to 0} \int_0^{3\theta} s_\theta(t)\mu(dt) = 0$.

iii) Soit $D_\theta=\{\ x : x\geqq 3\theta\ ,\ s(x-\theta)\geqq 2s(x)\ \}$, et $C_\theta = [3\theta,\infty[\setminus D_\theta$.

Alors $\int_{D_\theta} s_\theta(t)\mu(dt) \leqq \frac{12}{j(\theta)}$ et sur C_θ on a $s_\theta(x)\leqq 2s(x)$.

DEMONSTRATION DU LEMME. i) Sur $[0,3\theta]$ on a $s_\theta(x)\leqq \frac{1}{\theta}\int_0^\theta s(t)dt \leqq 3j(3\theta)s(3\theta) \leqq 3j(3\theta)s(x)$. Sur $[3\theta,\infty[$ on a $s_\theta(x) \leqq s(x-\theta) \leqq \frac{1}{x-\theta}\int_0^{x-\theta} s(t)dt \leqq \frac{x}{x-\theta}\,\frac{1}{x}\int_0^x s(t)dt \leqq \frac{3}{2}j(x)s(x)$.

ii) Posons $f(t)=\int_0^t s(u)du$ et $T(y)=\int_0^y f(t)\mu(dt)$. Alors $\lim \int_0^{3\theta} s_\theta(t)\mu(dt) \leqq \lim\limits_{\theta\to 0} \frac{1}{\theta}\int_0^{3\theta} \mu(dt)f(t) = 3 \lim\limits_{y\to 0}\frac{T(y)}{y}$. Si cette lim inf était $\neq 0$, on aurait $T(y)\geqq\lambda y$ pour un $\lambda>0$ et tout $y\in[0,1]$. Or soit $g=\frac{s}{f}$; s est décroissante, f croissante, donc g décroissante. Soit m la mesure $d(-g)$. Nous allons voir que T est localement m-intégrable , y non localement m-intégrable, et cela suffira.

Intégrons par parties : pour voir si $\int_0^+ ym(dy)$ converge, il suffit de regarder $\int_0^+ g(y)dy$, or c'est $\int_0^+ \frac{f'}{f}dy$, et log f n'a pas une limite finie en 0 puisque f s'y annule.

De même $\int_0^1 T(y)m(dy) = \int_0^1 m(dy)\int_0^y f(t)\mu(dt) = \int_0^1 f(t)\mu(dt)\int_t^1 m(dy)$
$= \int_0^1 f(t)[g(t)-g(1)]\mu(dt) \leqq \int_0^1 f(t)g(t)\mu(dt)= \int_0^1 s(t)\mu(dt)<+\infty$.

iii) Soit $\lambda_1=\inf D_\theta$, $\omega_1=]\lambda_1-\theta,\lambda_1+\theta[$, $\lambda_2=\inf\ (D_\theta\setminus \omega_1)$, $\omega_2=]\lambda_2-\theta,\lambda_2+\theta[$ ... Les ω_i couvrent D_θ , donc

$$\int_{D_\theta} s_\theta(t)\mu(dt)\leqq \sum \int_{\omega_i} s_\theta(t)\mu(dt)\leqq \sum\int_{\omega_i} s(\lambda_i-2\theta)\mu(dt)$$

Or nous avons les majorations

a) $s(\theta) \geqq s(\lambda_i-2\theta)$ (car $\lambda_i\geqq 3\theta$)

b) $s(\lambda_i-2\theta) \geqq s(\lambda_i-\theta)\geqq 2s(\lambda_i)$ (car $\lambda_i\in D_\theta$) , $\geqq 2s(\lambda_{i+2}-2\theta)$.

Les termes $s(\lambda_i-2\theta)$ pour i impair sont donc majorés par une progression géométrique de raison 1/2 et de premier terme $\leqq s(\theta)$. Leur somme est donc au plus $2s(\theta)$. En regroupant avec les termes pairs, on est ramené à prouver que

$$\sup_i \int_{\omega_i} \mu(dx) \leqq \frac{3}{s(\theta)j(\theta)}$$

Or si $x\in\omega_i$ l'intervalle $[x-\lambda_i-\theta,\ x-\lambda_i+2\theta]$ couvre $[0,\theta]$, donc

$$I_{\omega_i}(x) \leqq \int_{\lambda_i-2\theta}^{\lambda_i+\theta} s(x-t)dt \ \Big/ \int_0^{\theta} s(t)dt \ .$$

En définitive, il reste donc à montrer que pour tout i

$$\int\mu(dx)\int_{\lambda_i-2\theta}^{\lambda_i+\theta} s(x-t)dt \leqq 3\theta \ .$$

Comme $\lambda_i = \inf D_\theta = \inf \{ x\geqq 3\theta : \ldots\}$, on a $\lambda_i \geqq 3\theta$. Comme on ne s'intéresse qu'aux ω_i qui rencontrent le support de μ, on a $\lambda_i \leqq x_0+\theta$. Et

$$\int_{\lambda_i-2\theta}^{\lambda_i+\theta} s(x-t)dt = \int_0^{\lambda_i+\theta} s(x-t)dt - \int_0^{\lambda_i-2\theta} s(x-t)dt$$

$$= (\lambda_i+\theta)s_{\lambda_i+\theta}(x)-(\lambda_i-2\theta)s_{\lambda_i-2\theta}(x)$$

si l'on intègre par rapport à $\mu(dx)$, il vient comme $\lambda_i+\theta \leqq x_0$

$$\int\mu(dx)\int\ldots \leqq (\lambda_i+\theta) - (\lambda_i-2\theta) = 3\theta \ . \qquad \text{(CQFD)}$$

La dernière assertion du lemme est évidente : $s_\theta(x) \leqq s(x-\theta) \leqq 2s(x)$ par définition de C_θ.

DEMONSTRATION DU THEOREME. On distingue trois cas, suivant les valeurs de $\varliminf_{x\to 0+} j(x)$ et $\varlimsup_{x\to 0+} j(x)$.

CAS 1. $\varlimsup < \infty$. La fonction j est alors bornée sur $[0,x_0]$, d'où l'on déduit (partie i) du lemme) que $s_\theta(x) \leqq Ks(x)$ sur $[0,x_0]$. On applique alors le théorème de Lebesgue.

CAS 2. $\varliminf = \infty$. Prenons des $\theta_i \downarrow 0$ tels que $\int_0^{3\theta_i} s_{\theta_i}(t)\mu(dt) \to 0$ (partie ii) du lemme). On a aussi

$\int_{D_{\theta_i}} s_{\theta_i}(t)\mu(dt) \to 0$, d'après l'hypothèse (partie iii)). On peut appliquer le théorème de Lebesgue aux fonctions $s_{\theta_i} I_{C_{\theta_i}}$ qui tendent vers s μ-p.p.

CAS 3. $\overline{\lim}=\infty$, $\underline{\lim}<\infty$. Choisissons une suite $h_i \downarrow 0$ telle que $j(h_i)$ reste borné par un nombre A. Puis prenons $B \geq 3A$, et $\varepsilon_i = \sup \{ x < h_i, j(x) > B \}$, puis θ_i compris entre $\varepsilon_i/2$ et ε_i tel que $j(\theta_i) > B$. On a $\varepsilon_i \leq 3\theta_i \leq h_i$: la première inégalité est évidente, pour la seconde on remarque que $xj(x)$ est une fonction croissante, donc $\theta_i j(\theta_i) \leq h_i j(h_i)$ et $\frac{\theta_i}{h_i} \leq \frac{j(h_i)}{j(\theta_i)} \leq \frac{A}{B} \leq \frac{1}{3}$. On a donc $j(3\theta_i) \leq B$ par définition de ε_i.
On applique maintenant i) sur $[0,3\theta_i[$:

$$s_{\theta_i}(x) \leq 3Bs(x) \text{ , donc } \int_0^{3\theta_i} s_{\theta_i} d\mu \to 0$$

puis ii) sur D_{θ_i} : $\int_{D_{\theta_i}} s_{\theta_i} d\mu \leq \frac{12}{B}$

puis la convergence dominée aux s_{θ_i} sur C_{θ_i} : il vient que

$$\int s(t)\mu(dt) \geq 1 - \frac{12}{B}$$

B est arbitrairement grand, et le théorème est établi.