CATHERINE DOLÉANS-DADE

Une martingale uniformément intégrable mais non localement de carré intégrable

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 138-140
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__138_0>

Université de Strasbourg

Séminaire de Probabilités 1969-70

UNE MARTINGALE UNIFORMÉMENT INTÉGRABLE MAIS NON LOCALEMENT DE CARRÉ INTÉGRABLE

par C. DOLÉANS-DADE

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet et $(\mathcal{F}_t)_{t\in R_+}$ une famille croissante, continue à droite de sous-tribus de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F}_0$ contienne tous les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$. Une martingale (X_t) à valeurs réelles et à trajectoires continues à droite est localement de carré intégrable s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt (T_n) tels que

1) $\lim T_n = +\infty$ p.s.

2) pour chaque n, $(X_{t\wedge T_n})$ est une martingale de carré intégrable (c'est-à-dire pour chaque n, $E[X^2_{T_n}] < +\infty$).

L'étude des intégrales stochastiques par rapport aux martingales localement de carré intégrable se ramène trivialement à celle des intégrales stochastiques par rapport aux martingales de carré intégrable. Il est donc intéressant, pour justifier la théorie des intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales faite en [2], de savoir qu'il existe des martingales locales qui ne sont pas localement de carré intégrable.

Nous allons construire ici une martingale <u>uniformément intégrable</u> telle que <u>pour tout temps d'arrêt</u> T <u>non identiquement nul, on ait</u> $E[X^2_T] = +\infty$. Une telle martingale ne peut évidemment pas être localement de carré intégrable.

Soient $\Omega = R_+$, $\mathcal{F}^o$ la tribu borélienne de R_+, S l'application identité de Ω dans R_+ et $\mathcal{F}^o_t$ la tribu engendrée par $S\wedge t$. On prend pour probabilité P sur Ω la loi exponentielle

$$P\{S > x\} = e^{-x} \quad \text{pour tout } x \geq 0 \quad .$$

On considère la tribu $\mathfrak{F}$ engendrée par $\mathfrak{F}^o$ et les ensembles P-négligeables de Ω , et pour chaque t la tribu $\mathfrak{F}_t$ engendrée par $\mathfrak{F}^o_t$ et les ensembles P-négligeables de Ω . On a alors les résultats suivants (voir [1]) :

1) la famille $(\mathfrak{F}_t)$ est croissante, continue à droite, sans temps de discontinuité,

2) une variable aléatoire T est un temps d'arrêt de la famille $(\mathfrak{F}_t)$ si et seulement s'il existe $u \in R_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

a) $T \geq S$ p.s. sur l'ensemble $\{S \leq u\}$

b) b) $T = u$ p.s. sur l'ensemble $\{S > u\}$.

Pour tout temps d'arrêt T tel que $P\{T = 0\} < 1$, il existe donc un $u \in R_+ \setminus \{0\}$ tel que $S \wedge u \leq T$ p.s. .

Considérons maintenant la variable aléatoire

$$Z = I_{\{0<S\leq 1\}} \frac{1}{\sqrt{S}} e^{\frac{S}{2}} .$$

$$E[Z] = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\frac{x}{2}} e^{-x}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\,dx < +\infty .$$

La variable aléatoire Z est donc intégrable, et la martingale continue à droite

$$X_t = E[Z \mid \mathfrak{F}_t] = Z\, I_{\{S\leq t\}} + \frac{E[Z\, I_{\{S>t\}}]}{P\{S>t\}} I_{\{S>t\}}$$

est donc uniformément intégrable.

Pour tout $a \in]0 , 1]$ nous avons

$$X^2_{S\wedge a} \geq Z^2\, I_{\{S\leq S\wedge a\}} = \frac{1}{S} e^S\, I_{\{0<S\leq a\}}$$

et donc

$$E[X^2_{S\wedge a}] \geq \int_0^a \frac{1}{x} e^x e^{-x}\,dx = +\infty .$$

Soit maintenant T un temps d'arrêt tel que $P\{T = 0\} < 1$, et $a \in]0, 1]$ tel que $S \wedge a \leq T$ p.s. . On ne peut avoir l'inégalité $E[X_T^2] < +\infty$, car ceci entraînerait

$$E[X_{S\wedge a}^2] \leq E[X_T^2] < +\infty \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. DELLACHERIE : Un exemple de la théorie générale des processus. Séminaire de Probabilités IV, Université de Strasbourg. Lecture Notes in Mathematics Vol. 124, Springer, Heidelberg 1970.

[2] D. DOLÉANS-DADE & P.A. MEYER : Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Séminaire de Probabilités IV, Université de Strasbourg. Lecture Notes in Mathematics Vol. 124, Springer, Heidelberg 1970.