

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

## Un lemme de théorie de la mesure

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 4 (1970), p. 76

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1970\\_\\_4\\_\\_76\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__76_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN LEMME DE LA THEORIE DE LA MESURE  
par C. DELLACHERIE

ERDOS, KESTELMANN et ROGERS (in Colloquium Mathematicum XI, 1963, p75-80)  
ont démontré le théorème curieux suivant :

THEOREME.- Soient  $E$  un espace métrisable compact et  $P$  une mesure de probabilité sur  $E$  qui ne charge pas les points. Si  $(A_n)$  est une suite de boréliens telle que  $\limsup P(A_n) \geq \epsilon > 0$ , alors il existe une sous-suite  $(A_{n_k})$  et un borélien  $S$  de mesure  $P(S) \geq \epsilon$  tels que tout point de  $S$  soit un point de condensation de  $\liminf A_{n_k}$ .

Pour démontrer ce théorème, ils utilisent le lemme suivant, dont ils donnent une démonstration astucieuse :

LEMME.- Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé et soit  $(A_n)$  une suite d'ensembles mesurables telle que  $\limsup P(A_n) \geq \epsilon > 0$ . Il existe une sous-suite  $(A_{n_k})$  et un ensemble mesurable  $D$  de mesure  $P(D) \geq \epsilon$  vérifiant la propriété suivante : si  $B$  est un ensemble mesurable inclus dans  $D$  et si  $P(B) > 0$ , alors  $P(A_{n_k} \cap B) \neq 0$  sauf pour un nombre fini d'indices.

Nous allons donner une version plus forte de ce lemme, ainsi qu'une démonstration qui a l'avantage d'être "démystificatrice".

LEMME.- Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé et soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables telle que  $0 \leq f_n \leq 1$  et que  $\limsup E(f_n) \geq \epsilon > 0$ . Il existe une sous-suite  $(f_{n_k})$  et un ensemble mesurable  $D$  de mesure  $P(D) \geq \epsilon$  vérifiant la propriété suivante : si  $B$  est un ensemble mesurable inclus dans  $D$  et si  $P(B) > 0$  alors  $\lim E(f_{n_k} \cdot I_B)$  existe et est  $> 0$ .

DEMONSTRATION.- Comme il s'agit d'une sous-suite, on peut supposer  $E(f_n) \geq \epsilon$  pour tout  $n$ . D'autre part la suite  $(f_n)$  est uniformément intégrable : il existe donc une sous-suite  $(f_{n_k})$  qui converge vers une v.a.  $f$  pour la topologie  $\sigma(L^1, L^\infty)$ . On a alors :  $E(f) \geq \epsilon$  et  $0 \leq f \leq 1$  ( l'intégrale de  $f$  et de  $1-f$  est  $\geq 0$  sur tout ensemble mesurable). Il suffit alors de prendre  $D = \{f > 0\}$ . En effet,  $P(D) \geq E(f) \geq \epsilon$  et si  $B \in \mathcal{F}$ ,  $\lim E(f_{n_k} I_B) = E(f \cdot I_B) > 0$  si  $B \subset D$  et  $P(B) > 0$ .