CLAUDE DELLACHERIE

Un lemme de théorie de la mesure

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 4 (1970), p. 76
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__76_0>

UNIVERSITE DE STRASBOURG
SEMINAIRE DE PROBABILITES 1968/69

UN LEMME DE LA THEORIE DE LA MESURE

par C. DELLACHERIE

ERDOS, KESTELMANN et ROGERS (in Colloquium Mathematicum XI, 1963, p75-80) ont démontré le théorème curieux suivant :

THEOREME.- *Soient* E *un espace métrisable compact et* P *une mesure de probabilité sur* E *qui ne charge pas les points. Si* (A_n) *est une suite de boréliens telle que* $\limsup P(A_n) \geq \varepsilon > 0$ *, alors il existe une sous-suite* (A_{n_k}) *et un borélien* S *de mesure* $P(S) \geq \varepsilon$ *tels que tout point de* S *soit un point de condensation de* $\liminf A_{n_k}$.

Pour démontrer ce théorème, ils utilisent le lemme suivant, dont ils donnent une démonstration astucieuse :

LEMME.- *Soit* $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ *un espace probabilisé et soit* (A_n) *une suite d'ensembles mesurables telle que* $\limsup P(A_n) \geq \varepsilon > 0$. *Il existe une sous-suite* (A_{n_k}) *et un ensemble mesurable* D *de mesure* $P(D) \geq \varepsilon$ *vérifiant la propriété suivante* : *si* B *est un ensemble mesurable inclus dans* D *et si* $P(B) > 0$, *alors* $P(A_{n_k} \cap B) \neq 0$ *sauf pour un nombre fini d'indices.*

Nous allons donner une version plus forte de ce lemme, ainsi qu'une démonstration qui a l'avantage d'être " démystificatrice".

LEMME.- *Soit* $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ *un espace probabilisé et soit* (f_n) *une suite de fonctions mesurables telle que* $0 \leq f_n \leq 1$ *et que* $\limsup E(f_n) \geq \varepsilon > 0$. *Il existe une sous-suite* (f_{n_k}) *et un ensemble mesurable* D *de mesure* $P(D) \geq \varepsilon$ *vérifiant la propriété suivante* : *si* B *est un ensemble mesurable inclus dans* D *et si* $P(B) > 0$ *alors* $\lim E(f_{n_k} . I_B)$ *existe et est* > 0.

DEMONSTRATION.- Comme il s'agit d'une sous-suite, on peut supposer $E(f_n) \geq \varepsilon$ pour tout n. D'autre part la suite (f_n) est uniformément intégrable : il existe donc une sous-suite (f_{n_k}) qui converge vers une v.a. f pour la topologie $\sigma(L^1,L^\infty)$. On a alors : $E(f) \geq \varepsilon$ et $0 \leq f \leq 1$ (l'intégrale de f et de $1-f$ est ≥ 0 sur tout ensemble mesurable). Il suffit alors de prendre $D = \{f > 0\}$.
En effet, $P(D) \geq E(f) \geq \varepsilon$ et si $B \in \underline{\underline{F}}$, $\lim E(f_{n_k} I_B) = E(f.I_B) > 0$ si $B \subset D$ et $P(B) > 0$.