

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

## Potentiels de Green et fonctionnelles additives

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 4 (1970), p. 73-75

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1970\\_\\_4\\_\\_73\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__73_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

UNIVERSITE DE STRASBOURG  
SEMINAIRE DE PROBABILITES

1968/69

POTENTIELS DE GREEN ET FONCTIONNELLES ADDITIVES

par C. DELLACHERIE

Nous nous plaçons sous les hypothèses de KUNITA-WATANABE, hypothèses qui sont rappelées dans [2] et la réalisation canonique du semi-groupe  $(P_t)$  est notée avec les symboles habituels. Soit  $\mu$  une mesure (de RADON) qui ne charge pas les ensembles polaires et dont le potentiel  $U\mu$  soit fini presque-partout. Nous allons montrer que  $U\mu$  est le potentiel d'une fonctionnelle additive "généralisée". Nous rappelons d'abord le théorème établi par MEYER dans [2] :

THEOREME 1.- Soit  $\mu$  une mesure ne chargeant pas les ensembles polaires. Il existe alors une mesure  $\nu$  équivalente à  $\mu$  dont le potentiel est borné.

Le potentiel  $U\nu$  de  $\nu$  est alors un potentiel de la classe (D). Il existe donc une fonctionnelle additive naturelle (au sens des processus de Markov : sans discontinuité commune avec le processus) unique  $(A_t)$  telle que :

$$U\nu^x = E^x[A_\infty] \quad \text{pour tout } x$$

Si  $f$  est une densité borélienne de  $\mu$  par rapport à  $\nu$ , on a alors (cf [2])

$$U\mu^x = U(f.\nu)^x = E^x\left[\int_0^\infty f \circ X_s \, dA_s\right] \quad \text{pour tout } x$$

Posons

$$B_t = \int_0^t f \circ X_s \, dA_s$$

Il est clair que le processus  $(B_t)$ , à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ , est adapté et que ses trajectoires sont croissantes. D'autre part on vérifie aisément que l'on a pour tout temps d'arrêt  $T$  :

a)  $B_{T+t} = B_T + B_t \circ \theta_T$  p.s. car la fonctionnelle  $(A_t)$  vérifie la propriété de markov forte.

b)  $I_{\{B_T \neq B_{T-}\}} \cdot I_{\{X_T \neq X_{T-}\}} = 0$  p.s. car la fonctionnelle  $(A_t)$  est naturelle.

Pour que le processus  $(B_t)$  soit une fonctionnelle additive naturelle, il faudrait encore qu'il vérifie :

c) la continuité à droite des trajectoires : d'après le théorème de LEBESGUE, on ne peut avoir  $B_t(\omega) \neq B_{t+}(\omega)$  que si  $B_{t+}(\omega) = +\infty$

d) en particulier  $B_{0+} = 0$  p.s.

Le théorème suivant précise le comportement de  $(B_t)$  par rapport aux conditions c) et d) quand le potentiel  $U\mu$  de  $\mu$  est fini presque-partout :

THEOREME 2.- Supposons que  $U\mu$  soit fini presque-partout et désignons par  $G$  l'ensemble polaire  $\{U\mu = +\infty\}$ . Alors

1) pour tout temps d'arrêt  $T$  p.s. strictement positif,  $B_\infty \circ \theta_T$  est p.s. fini.

2) on a les inclusions d'ensembles suivantes :

$$\{B_{0+} = +\infty\} \underset{\text{p.s.}}{=} \{B_\infty = \infty\} \underset{\text{p.s.}}{\subset} \{X_0 \in G\}$$

DEMONSTRATION.- Soit  $\eta$  une loi initiale et soit  $\xi = \eta P_T$ . Comme  $T$  est strictement positif, la mesure  $\xi$  ne charge pas l'ensemble polaire  $G$ . Donc

$$P^\eta \{B_\infty \circ \theta_T = \infty\} = P^\xi \{B_\infty = \infty\} = \int P^x \{B_\infty = \infty\} d\xi(x) = 0$$

puisque  $E^x[B_\infty] = U\mu^x$  est fini si  $x \notin G$ . D'autre part on a pour tout  $t \geq 0$

$$B_\infty = B_t + B_\infty \circ \theta_t \quad \text{p.s.}$$

Comme  $B_\infty \circ \theta_t$  est p.s. fini pour  $t > 0$ , il s'ensuit que

$$\{B_{0+} = \infty\} \underset{\text{p.s.}}{=} \{B_\infty = \infty\}$$

Enfin si  $x \notin G$ ,  $P^x \{B_\infty = \infty\} = 0$  puisque  $E^x[B_\infty] < \infty$ , et donc

$$\{B_\infty = \infty\} \underset{\text{p.s.}}{\subset} \{X_0 \in G\}$$

On peut donc dire que  $B(.,\omega)$  n'est pas continue à droite seulement si  $B(0+,\omega) = +\infty$  et que la fonctionnelle additive "généralisée"  $(B_t)$  ne peut exploser qu'au départ de l'ensemble polaire  $G$ . Nous allons donner deux exemples de cette situation.

EXEMPLES.- 1) considérons le processus de la translation uniforme, de vitesse unité, sur la demi-droite positive. Prenons pour  $\nu$  la restriction de la

mesure de LEBESGUE à  $[0,1]$  et soit  $\mu = (x^{-1} \cdot \nu)$ . Alors  $U\mu^x$  est fini si  $x \neq 0$  et vaut  $+\infty$  pour  $x = 0$ . D'autre part,

$$B_t = \int_0^t (X_s)^{-1} I_{\{X_s \leq 1\}} ds$$

et donc  $\{B_{0+} = \infty\} \stackrel{p.s.}{=} \{X_0 = 0\}$

2) Considérons le mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^3$ . Prenons pour  $\nu$  la restriction de la mesure de LEBESGUE à la boule unité et soit  $\mu = (\|x\|^{-2} \cdot \nu)$ . On vérifie facilement que  $U\mu^x$  est fini si  $x \neq 0$  et vaut  $+\infty$  pour  $x = 0$ . On a d'autre part

$$B_t = \int_0^t \|X_s\|^{-2} I_{\{\|X_s\| \leq 1\}} ds$$

D'après la loi du logarithme itéré (cf [1])

$$P^0 \left\{ \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{\|X_t\|^2}{2t \operatorname{Log}(\operatorname{Log} 1/t)} = 1 \right\} = 1$$

soit encore

$$\liminf_{t \rightarrow 0} \|X_t\|^{-2} 2t \operatorname{Log}(\operatorname{Log} 1/t) = 1 \quad P^0\text{-p.s.}$$

Pour  $P^0$ -presque-tout  $\omega$ , il existe donc un  $\varepsilon(\omega) > 0$  tel que l'on ait

$$\|X_t\|^{-2} > (4t \operatorname{Log}(\operatorname{Log} 1/t))^{-1} \quad \text{si } t < \varepsilon(\omega)$$

Comme la fonction  $t \rightarrow (4t \operatorname{Log}(\operatorname{Log} 1/t))^{-1}$  n'est pas intégrable au voisinage de 0, il en résulte que l'on a encore

$$\{B_{0+} = \infty\} \stackrel{p.s.}{=} \{X_0 = 0\}$$

REMARQUE.- Dans les deux exemples, les ensembles  $\{B_{0+} = \infty\}$  et  $\{X_0 \in G\}$  sont p.s. égaux. Il est naturel de se demander si cette égalité est toujours vérifiée : dans l'affirmative, cela entraînerait que le potentiel d'une vraie fonctionnelle additive naturelle est fini partout dès qu'il est fini presque-partout.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ITO (K.) et McKEAN (H.P.) : Diffusion Processes and their Sample Paths (Springer, Berlin, 1965)
- [2] MEYER (P.A.) : Un résultat de théorie du potentiel (Séminaire de Probabilités III, Lecture Notes in Mathematics n°88, Springer, Berlin, 1969)