

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

## **Au sujet des sauts d'un processus de Hunt**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 4 (1970), p. 71-72

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1970\\_\\_4\\_\\_71\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__71_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

AU SUJET DES SAUTS D'UN PROCESSUS DE HUNT  
 par C. DELLACHERIE

Soit  $(P_t)$  un semi-groupe de HUNT sur un espace localement compact à base dénombrable. Nous travaillons sur la réalisation canonique de ce semi-groupe, notée avec les symboles habituels. Lorsque  $(P_t)$  vérifie l'hypothèse (L), M. WEIL a montré dans [4] que les sauts du processus vérifient la propriété curieuse suivante : soient  $F$  un ensemble presque-borélien finement fermé et  $T$  son temps d'entrée; alors  $P^\mu\{X_{T-} \in F, X_T \notin X_{T-}\} = 0$  pour toute loi initiale  $\mu$ . C'est ce résultat que nous allons démontrer sans supposer l'hypothèse (L) vérifiée.

Rappelons le résultat fondamental suivant établi dans [1] (la terminologie adoptée est celle de [2]) :

- THEOREME.- 1) La famille de tribus canonique  $(\underline{F}_t)$  est dépourvue de temps de discontinuité (en particulier les t.d'a. accessibles sont prévisibles)  
 2) Soit  $T$  un t.d'a. de la famille  $(\underline{F}_t)$ . Alors  $T$  est prévisible si et seulement si  $P^\mu\{X_T \neq X_{T-}, T < \infty\} = 0$  pour tout loi initiale  $\mu$ .

Le théorème suivant a déjà été établi par MEYER dans [3] sous l'hypothèse (B) de HUNT. En réalité, il est vrai dans le cas général et il fait mieux comprendre la signification de l'hypothèse (B).

THEOREME.- Soit  $G$  un ensemble presque-borélien semi-polaire. On a alors pour toute loi initiale  $\mu$

$$P^\mu\{\exists t : X_t \neq X_{t-}, X_{t-} \in G\} = 0$$

DEMONSTRATION.- Posons

$$A = \{(t, \omega) : X_t(\omega) \in G\} \quad B = \{(t, \omega) : X_{t-}(\omega) \in G\}$$

L'ensemble  $A$  est bien-mesurable et c'est la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt d'après un théorème bien connu de HUNT. L'ensemble  $B$  est prévisible et l'ensemble  $A \Delta B$  est contenu dans une réunion dénombrable de

graphes de temps d'arrêt formée par la réunion de " temps de saut " du processus. L'ensemble B est donc aussi la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt; comme il est prévisible, il ne peut pas contenir de graphe de temps d'arrêt totalement inaccessible (cf [2]) et donc de " temps de saut " du processus. D'où le théorème.

Voici maintenant la généralisation du résultat de M. WEIL :

THEOREME.- Soient F un ensemble presque-borélien et T son temps d'entrée.  
Pour toute loi initiale  $\mu$  on a :

$$P^\mu \{X_{T-} \in F, X_T \neq X_{T-}, T < \infty\} = 0$$

DEMONSTRATION.- Il suffit de démontrer le théorème lorsque  $\mu$  est une mesure ponctuelle  $\varepsilon_x$ . Nous distinguerons alors deux cas :

1)  $x \notin F$  ou  $x$  est régulier pour F : il existe alors une suite d'ouverts  $(O_n)$ , de temps d'entrée  $T_n$ , telle que (cf [1])  $O_n \supset O_{n+1} \supset \dots \supset F$  et que  $T_n$  tende en croissant vers T P<sup>x</sup>-p.s. Comme les temps de saut sont totalement inaccessibles,  $\{X_T \neq X_{T-}, T < \infty\} \subset \bigcup_n \{T_n = T, T < \infty\}$  et donc

$$P^x \{X_{T-} \in F, X_T \neq X_{T-}, T < \infty\} \leq \sum_n P^x \{X_{T_n-} \in F, X_{T_n} \neq X_{T_n-}, T_n < \infty\} = 0$$

2)  $x \in F$  et est irrégulier pour F : en particulier  $\{x\}$  est semi-polaire. Soit  $H = F - \{x\}$ ; H est un ensemble presque-borélien, finement fermé. Si U est son temps d'entrée, on a donc d'après 1)

$$P^x \{X_{U-} \in H, X_U \neq X_{U-}, U < \infty\} = 0$$

Si pour un  $\omega \in \Omega$   $T(\omega) < U(\omega)$ , c'est que  $X_{T-}(\omega) = x$  et donc que  $X_{T-}(\omega) \neq x$  si  $\omega \in \{X_T \neq X_{T-}\}$ ; par ailleurs en approchant comme ci-dessus le temps d'entrée U par des temps d'entrée dans des ouverts, on en déduit que

$$P^x \{X_{T-} \in F, X_T \neq X_{T-}, T < U\} = 0$$

D'autre part il résulte du théorème précédent que

$$P^x \{X_{T-} \in F, X_T \neq X_{T-}, T = U < \infty\} = 0$$

d'où le théorème.

BIBLIOGRAPHIE.-

- [1] MEYER (P.A.) : Processus de Markov (Lecture Notes n°26, Springer, 1967)
- [2] : Guide de la théorie des processus (Séminaire de Probabilités Lecture Notes n°51, Springer, 1968)
- [3] : La frontière de Martin (Lecture Notes n°77, Springer, 1968)
- [4] WEIL (M.) : Conditionnement par rapport au passé strict (C.R. 1969)