Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Claude Dellacherie

Au sujet des sauts d'un processus de Hunt

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 4 (1970), p. 71-72
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__71_0>

UNIVERSITE DE STRASBOURG
SEMINAIRE DE PROBABILITES 1968/69

AU SUJET DES SAUTS D'UN PROCESSUS DE HUNT

par C. DELLACHERIE

Soit (P_t) un semi-groupe de HUNT sur un espace localement compact à base dénombrable. Nous travaillons sur la réalisation canonique de ce semi-groupe, notée avec les symboles habituels. Lorsque (P_t) vérifie l'hypothèse (L), M. WEIL a montré dans [4] que les sauts du processus vérifient la propriété curieuse suivante : soient F un ensemble presque-borélien finement fermé et T son temps d'entrée; alors $P^\mu\{X_{T-} \in F,\ X_{T-} \neq X_T\} = 0$ pour toute loi initiale μ. C'est ce résultat que nous allons démontrer sans supposer l'hypothèse (L) vérifiée.

Rappelons le résultat fondamental suivant établi dans [1] (la terminologie adoptée est celle de [2]) :

THEOREME.- 1) <u>La famille de tribus canonique</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>est dépourvue de temps de discontinuité</u> (<u>en particulier les t.d'a. accessibles sont prévisibles</u>)

2) <u>Soit</u> T <u>un t.d'a. de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$. <u>Alors</u> T <u>est prévisible si et seulement si</u> $P^\mu\{X_T \neq X_{T-},\ T < \infty\} = 0$ <u>pour tout loi initiale</u> μ.

Le théorème suivant a déjà été établi par MEYER dans [3] sous l'hypothèse (B) de HUNT. En réalité, il est vrai dans le cas général et il fait mieux comprendre la signification de l'hypothèse (B).

THEOREME.- <u>Soit</u> G <u>un ensemble presque-borélien semi-polaire. On a alors pour toute loi initiale</u> μ

$$P^\mu\{\exists t\ :\ X_t \neq X_{t-},\ X_{t-} \in G\} = 0$$

DEMONSTRATION.- Posons

$$A = \{(t,\omega)\ :\ X_t(\omega) \in G\} \qquad B = \{(t,\omega)\ :\ X_{t-}(\omega) \in G\}$$

L'ensemble A est bien-mesurable et c'est la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt d'après un théorème bien connu de HUNT. L'ensemble B est prévisible et l'ensemble $A \Delta B$ est contenu dans une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt formée par la réunion de " temps de saut" du processus. L'ensemble B est donc aussi la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt; comme il est prévisible, il ne peut pas contenir de graphe de temps d'arrêt totalement inaccessible (cf [2]) et donc de " temps de saut" du processus. D'où le théorème.

Voici maintenant la généralisation du résultat de M. WEIL :

THEOREME.- Soient F un ensemble presque-borélien et T son temps d'entrée. Pour toute loi initiale μ on a :

$$P^{\mu}\{X_{T-} \in F,\ X_T \neq X_{T-},\ T < \infty\} = 0$$

DEMONSTRATION.- Il suffit de démontrer le théorème lorsque μ est une mesure ponctuelle ε_x. Nous distinguerons alors deux cas :

1) $x \notin F$ ou x est régulier pour F : il existe alors une suite d'ouverts (O_n), de temps d'entrée T_n, telle que (cf [1]) $O_n \supset O_{n+1} \supset \dots \supset F$ et que T_n tende en croissant vers T P^x-p.s. Comme les temps de saut sont totalement inaccessibles, $\{X_T \neq X_{T-},\ T < \infty\} \subset \bigcup_n \{T_n = T,\ T < \infty\}$ et donc

$$P^x\{X_{T-} \in F,\ X_T \neq X_{T-},\ T < \infty\} \leq \sum_n P^x\{X_{T_n-} \in F,\ X_{T_n} \neq X_{T_n-},\ T_n < \infty\} = 0$$

2) $x \in F$ et est irrégulier pour F : en particulier $\{x\}$ est semi-polaire. Soit $H = F - \{x\}$; H est un ensemble presque-borélien, finement fermé. Si U est son temps d'entrée, on a donc d'après 1)

$$P^x\{X_{U-} \in H,\ X_U \neq X_{U-},\ U < \infty\} = 0$$

Si pour un $\omega \in \Omega$ $T(\omega) < U(\omega)$, c'est que $X_T(\omega) = x$ et donc que $X_{T-}(\omega) \neq x$ si $\omega \in \{X_T \neq X_{T-}\}$; par ailleurs en approchant comme ci-dessus le temps d'entrée U par des temps d'entrée dans des ouverts, on en déduit que

$$P^x\{X_{T-} \in F,\ X_T \neq X_{T-},\ T < U\} = 0$$

D'autre part il résulte du théorème précédent que

$$P^x\{X_{T-} \in F,\ X_T \neq X_{T-},\ T = U < \infty\} = 0$$

d'où le théorème.

BIBLIOGRAPHIE.-

[1] MEYER (P.A.) : Processus de Markov (Lecture Notes n°26, Springer, 1967)
[2] : Guide de la théorie des processus (Séminaire de Probabilités Lecture Notes n°51, Springer, 1968)
[3] : La frontière de Martin (Lecture Notes n°77, Springer, 1968)
[4] WEIL (M.) : Conditionnement par rapport au passé strict (C.R. 1969)