SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DIDIER DACUNHA-CASTELLE

Principe de dualité pour des espaces de suites associés à une suite de variables aléatoires

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 4 (1970), p. 47-59
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__47_0>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

Laboratoire Associé au C.N.R.S.

Rue René Descartes

STRASBOURG

1968-69

- Séminaire de Probabilités -

PRINCIPE DE DUALITÉ POUR DES ESPACES DE SUITES ASSOCIÉS À UNE SUITE DE VARIABLES ALÉATOIRES.

Par D. DACUNHA-CASTELLE

Dans cet exposé, nous reprenons un exposé de Schwartz [4] (voir aussi [2] , [3]) , et une note de Kwanpien [1] . Kwanpien a utilisé pour traiter des applications radonifiantes une méthode bien connue (utilisée systématiquement dans l'étude des séries à coefficients aléatoires). Schwartz a dégagé de cette technique un principe de dualité, qui a peut-être des analogies avec certains résultats de la théorie des martingales. Nous indiquons pour terminer comment on peut appliquer ce résultat au cas des espaces d'Orlicz dont l'interprétation est naturelle, du point de vue probabiliste.

I. ESPACES DE TYPE (L) .

Soit (Ω , F , P) un espace probabilisé, et soit $L(\Omega)$ l'espace des classes de variables aléatoires (v.a.) réelles p.s. finies, munies de l'écart habituel de la convergence en P . Soit $X = (X_n)_{n\in N}$ une suite quelconque de v.a. réelles sur Ω et $b = (b_n)_{n\in N}$ une suite de nombres réels.

DEFINITION.

L_X est l'espace des suites (b_n) telles que les v.a. $\sum_0^k b_n X_n$ soient bornées en probabilité, ce qui se traduit par

pour tout $\epsilon > 0$, il existe M tel que $\sup_k P\{|\sum_0^k b_n X_n| \geqq M\} \leqq \epsilon$.

Remarquons que si les X_n sont indépendantes, cela équivaut à dire que $\sum_0^k b_n X_n$ converge p.s.

Soit B un espace de suites réelles (i.e. un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, avec une topologie d'e.v.t. plus fine que celle de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$). Supposons B métrisable et complet. On sait qu'alors la structure uniforme de B peut être définie par une distance d_B invariante par translation, et telle que $d_B(0 , \lambda x) \leq d_B(0 , x)$ si $|\lambda| \leq 1$.

LAMME 1.

Supposons que $B \subset L_X$ (au sens ensembliste). Pour tout $\epsilon > 0$ et tout $M > 0$, il existe $r > 0$ tel que

$$P \{ \sup_k | \sum_0^k b_n X_n | \geq M \} \leq \epsilon$$

pour tout $b \in B$ tel que $d_B(0 , b) \leq r$.

DEMONSTRATION.

La suite des applications linéaires continues J_k de B dans $L(\Omega)$ définies par $J_k(b) = \sum_0^k b_n X_n$, est simplement bornée, et d'après le théorème de Banach-Steinhaus ([5], p. 86) elle est équicontinue en 0.

DEFINITION.

Un e.v.t. B de suites réelles est dit de type (L) s'il est complet et métrisable, et s'il existe une suite X de v.a. indépendantes telle que $B = L_X$ (au sens ensembliste).

II. THEOREME DE DUALITE POUR LES ESPACES DE TYPE (L).

Soient B , C deux e.v.t. de suites ; supposons que B soit du type (L) . Une suite $\alpha = (\alpha_n)$ sera dite de type (B,C) s'il existe une suite $X = (X_n)$ de v.a. indépendantes, définies sur un espace Ω , telle que

1) $B = L_X$

2) la suite $\alpha X(\omega) = (\alpha_n X_n(\omega))$ appartient à C ω-p.s. . Le théorème de dualité suivant est dû à Schwartz [4] .

THEOREME.

Si B et C sont de type (L) , si α est de type (B , C), alors α est de type (C , B) .

Le théorème résulte du théorème suivant, plus intéressant du point de vue probabiliste.

THEOREME.

Soient C un espace de type (L) , B un e.v.t. de suites métrique complet et soit α une suite de type (C , B). Soit X une suite de v.a. (non nécessairement indépendantes) définie sur un espace $(\Omega , \underline{\underline{F}} , P)$, telle que $B \subset L_X$. Alors la suite $\alpha X(\omega) = (\alpha_n X_n(\omega))$ appartient ω-p.s. à C .

DEMONSTRATION.

Nous choisissons $(\Omega', \underline{\underline{F}}', P')$ et une suite Z de v.a. indépendantes sur Ω', telle que $C = L_Z$ et que $(\alpha_n Z_n(\omega')) \in B$, ω'-p.s. . Soit $\epsilon < \frac{1}{2}$ donné, et soit $M > 0$; choisissons $r > 0$ comme dans le lemme 1 . Choisissons ensuite le scalaire $\lambda > 0$ tel que si $A_r = \{ \omega' : d_B(0, \lambda \alpha Z(\omega')) \leq r \}$ on ait $P'(A_r) \geq 1 - \epsilon$. Posons alors

$$S(\omega, \omega') = \sup_k | \alpha_k Z_k(\omega') X_k(\omega) | \quad .$$

Si $\omega' \in A_r$, d'après le lemme 1 , nous avons

$$P \{ \omega : S(\omega, \omega') \leq \frac{M}{\lambda} \} \geq 1 - \epsilon$$

et donc

$$(P \times P') \{ (\omega, \omega') : S(\omega, \omega') \leq \frac{M}{\lambda}, \omega' \in A_r \} \geq 1 - 2\epsilon \quad .$$

Soit
$$K_\omega = \{ \omega' : S(\omega, \omega') > \frac{M}{\lambda} \} \cup A_r^c$$

$$N = \{ \omega : P'(K_\omega) \geq \sqrt{2\epsilon} \} \quad .$$

On voit, en réappliquant le théorème de Fubini, que

$$P(N) \leq \sqrt{2\epsilon} < 1 \quad .$$

Si $\omega \notin N$, on a $P'\{ \omega' : \sup_k | \sum_1^k (\alpha_n X_n(\omega)) Z_n(\omega') | \leq \frac{M}{\lambda} \} \geq 1 - \sqrt{2\epsilon} > 0$.

Mais la suite (Z_n) étant indépendante, on a pour toute suite (C_n) la propriété suivante

$$P'\{ \omega' : \sup_k \left| \sum_1^k e_n Z_n(\omega') \right| < \infty \} = 0 \text{ ou } 1 .$$

Ainsi si $\omega \in N^c$ la suite $(\alpha_n X_n(\omega))$ appartient à $L_Z = C$. Mais comme $P(N^c) \geq 1 - \sqrt{2\epsilon}$, où ϵ est arbitraire, la suite $(\alpha X(\omega))$ appartient ω-p.s. à C. Le théorème est établi.

III. ETUDE D'UNE CLASSE D'ESPACES DE TYPE (L).

a) Le cas hilbertien.

Si l'on prend pour Z une suite de v.a. de Bernouilli indépendantes alors $L_Z = \ell^2$. Prenons $B = \ell^\infty$, $C = \ell^2$ et pour α la suite $(1, 1, 1, \ldots)$, qui est de type (C, B), car αZ est bornée. Le théorème donne :

PROPOSITION.

Si (X_n) est une suite de v.a. sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$, telle que pour toute suite bornée (b_n) la suite $\sum_0^k b_n X_n$ est bornée en probabilité, alors la suite $(X_n(\omega))$ appartient p.s. à ℓ^2.

Prenons maintenant $B = C = \ell^2$, et pour α une suite α_n telle que $\sum \alpha_n^2 < \infty$. La suite $\alpha Z(\omega')$ appartient p.s. à B, donc α est de type (C, B). Le théorème donne :

PROPOSITION.

(X_n) ayant la même signification que ci-dessus, la suite $(\alpha_n X_n(\omega))$ appartient p.s. à ℓ^2, si $(\alpha_n) \in \ell^2$.

Cette proposition est en fait une version probabiliste du théorème de Sazonov-Minlos. On aurait pu y remplacer $B = \ell^2$ par l'espace de Banach r des suites (x_n) telles que Σx_n converge (non absolument) avec la norme $|x| = \sup_n |\sum_1^n x_k|$.

b) Les espaces associés aux suites de v.a. indépendantes, équidistribuées.

DEFINITION.

Un espace B est dit de type K s'il existe une suite $X = (X_n)$ de v.a. indépendantes, équidistribuées, symétriques, telles que $B = L_X$.

Rappelons les résultats et définitions suivants tirés de [6].

DEFINITIONS.

Deux fonctions f et g, $R - \{0\} \to R^+ - \{0\}$ sont dites multiplicativement équivalentes (ce que l'on note $f \overset{m}{\sim} g$), s'il existe des constantes telles que :

$$0 < b_1 f(a_1 x) < g(a_2 x) < b_2 f(a_2 x) \quad ; \quad x > 0 .$$

Dans la suite, nous étudierons les classes de fonctions suivantes

Classe (q) : $f \in (q)$ si $f(x) \overset{m}{\sim}$ fonction croissante ; $f(o) = 0$; et $f(x) = 1$ pour $|x| \geqq 1$.

Classe (o) : $f \in (o)$ si $f \in (q)$ et $f \overset{m}{\sim}$ fonction convexe.

Classe $K(2\,,\,p)$: $f \in (q)$ et

$$\frac{f(x)}{x^p} \overset{m}{\approx} \text{ fonction croissante },$$

$$\frac{f(x)}{x^2} \overset{m}{\approx} \text{ fonction décroissante } \qquad (\text{avec } x^0 = 1)\,.$$

Classe Δ_2 : $f \in \Delta_2$ si $f \in (q)$ et s'il existe k tel que $f(2x) \leq k\, f(x)$.

Enfin nous noterons ℓ_f l'espace des suites f-sommables, c'est-à-dire telles que $\sum_0^\infty f(c_n) < \infty$.

THEOREME A.

Si $f \in (q) \cap \Delta_2$ alors

i) ℓ_f est un espace vectoriel métrique complet, la distance d_f pouvant être définie par $d(0\,,\,c) = \inf \{ \epsilon : \sum_n f(\frac{c_n}{\epsilon}) < \epsilon \}$.

ii) Si $f \overset{m}{\sim} g$, alors $g \in \Delta_2$ et $\ell_f = \ell_g$ (comme E.V.T.) .

iii) d , l'espace des suites nulles à partir d'un certain rang, est dense dans ℓ_f .

iiii) ℓ_f est un E.V.T.L.C. si et seulement si $f \in (o)$; c'est alors un espace de Banach (dit d'Orlicz) muni de la norme

$$\|c\| = \inf \{ \epsilon\,,\, \epsilon > 0\,,\, \sum_n f(\frac{c_n}{\epsilon}) \leqq 1 \}\,.$$

THEOREME B.

Pour que B soit un espace de type K il faut et il suffit que $B = \ell_f$ avec $f \in K(2\,,\,0)$.

Si F est une loi de probabilité symétrique on notera L_F l'espace L_X , ou $X = (X_n)$ est une suite de v.a. indépendantes de loi F .

THEOREME C.

Si $f \in K(2, 0)$, il existe F telle que $L_F = \ell_f$ et que

$$f(x) \overset{m}{\sim} x^2 \int_0^{1/x} u^2 \, dF(u) + \int_{1/x}^{\infty} dF(u) \quad .$$

Le calcul élémentaire qui suit vise à calculer explicitement les suites de type (B, C) , lorsque B et C sont de type K .

THEOREME.

Pour que α soit de type (ℓ_f, ℓ_g) il faut et il suffit que $\alpha \in \ell_{f\Delta g}$; où $f \Delta g \in K(2, 0)$ est donnée par

$$(f \Delta g)(x) = \frac{1}{4} [f(x) + g(x) + \int_1^{1/c} f(cx)\, dG(x) + g(cx)\, dF(x)]$$

(c'est-à-dire qu'il existe une suite (Z_n) telle que

$$\alpha \text{ de type } (\ell_f, \ell_g) \Leftrightarrow \alpha \in L_Z \quad .$$

Remarques.

1) Si $\ell_g = \ell^2$, on a $f \Delta g = f$ pour tout f .

2) On peut remplacer dans la formule $\int_1^{1/c}$ par $\int_0^{\infty}$, car $f(x) = 1$, pour $x \geqq 1$ et $f(x) \leqq Mx^2$ pour M convenable.

3) Si ℓ_f et ℓ_g sont des espaces de Banach, il n'en est pas de même en général de $\ell_{f\Delta g}$ (voir exemple plus loin). Si cependant les lois F et G ont des espérances finies alors $\ell_{f\Delta g}$ est un espace de Banach.

4) Il n'est pas évident à priori que $f \Delta g \overset{m}{\sim} g \Delta f$.

5) Parmi les fonctions de $K(2 , 0)$ on trouve les fonctions ayant un ordre de croissance du type puissance-logarithmes itérés la puissance étant inférieure à 2 .

DEMONSTRATION.

Soit (X_n) de loi F , telle que $\ell_X = \ell_F = \ell_f$; avec
$f(x) = x^2 \int_0^{1/x} u^2\, dF(u) + \int_{1/x}^{\infty} dF(u)$ et $g \in K(2 , 0)$ $\ell_g = \ell_G$ avec
$g(x) = x^2 \int_0^{1/x} u^2\, dG(u) + \int_{1/x}^{\infty} dG(u)$.

On ne restreint pas la généralité en supposant de plus que $\int_0^1 dG(u) \int_0^1 dF(u) > 0$
Les calculs qui suivent visent simplement à trouver une condition symétrique en f et g pour caractériser les suites de type (f , g) . On utilisera systématiquement le 2°) du théorème de manière à procéder par équivalences.
On notera (0) la condition (α_n) est de type (f , g) .

En appliquant le théorème des deux séries (g est à valeurs $\geqq 0$) on voit que $(0) \Leftrightarrow (1) + (2)$.

(1) $$\sum_n \int_{1/\alpha_n}^{\infty} dF(u) = \sum_n F(1/\alpha_n) < \infty$$

(2) $$\sum_n \int_0^{1/\alpha_n} g(\alpha_n u)\, dF(u) < \infty \quad .$$

Comme $\int_{1/\alpha}^{\infty} g(\alpha x)\ dF(x) = F(1/\alpha)$

$$(2) + (1) \Leftrightarrow \sum_n \int_0^{\infty} g(\alpha_n x)\ dF(x) < \infty$$

$$\int_0^{1/\alpha} g(\alpha x)\ dF(x) \overset{m}{\sim} \int_{u=0}^{\infty} \int_{x=0}^{1/\alpha} (1 \wedge x^2\ \alpha^2\ u^2)\ dF(x)\ dG(u) \quad .$$

Pour $|u| \leq 1$, on a :

$$(\underline{3}) \qquad \int_{u=0}^{1} \int_{x=0}^{1/\alpha} x^2\ \alpha^2\ u^2\ dF(x)\ dG(u) \overset{(m)}{\sim} \alpha^2 \int_0^{1/\alpha} x^2\ dF(x) \quad .$$

Donc $(1) + (2) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(\alpha_n) < \infty \qquad (3') \quad .$

Posant $\varphi(\alpha) = \alpha^2 \int_1^{1/\alpha} u^2\ dG(u)$ on a

$$(4) \qquad \alpha^2 + \alpha^2 + \int_1^{1/\alpha} u^2\ dG(u) \overset{m}{\sim} \varphi(\alpha) \qquad \text{et}$$

$$(5) \qquad \int_{u=1}^{1/\alpha} \int_{x=0}^{1/\alpha u} x^2\ \alpha^2\ u^2\ dF(x)\ dG(u) \overset{m}{\sim} \varphi(\alpha) + \int_{x=1}^{1} \varphi(\alpha x)\ dF(x)$$

$$(6) \qquad \int_{u=1/\alpha}^{\infty} \int_{x=0}^{1/\alpha u} \alpha^2\ x^2\ u^2\ dG(u)\ dF(x) = \int_{x=0}^{1} \varphi(\alpha_x)\ dF(x) - \left(\int_0^1 x^2\ dF(x)\right) \varphi(\alpha) \quad .$$

Enfin $(7)\ \int_1^{\infty} \int_{x=1/\alpha u}^{1/\alpha} dF(u)\ dG(x) = \int_0^{1/\alpha} dF(x)\ G\left(\frac{1}{\alpha x}\right) \overset{m}{\sim} G\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \int_1^{1/\alpha} G\left(\frac{1}{\alpha x}\right) dF(x)$

$(5) + (6) \Rightarrow (8) : \sum_{n=1}^{\infty} g(\alpha_n) < \infty \quad .$

Tenant compte de (8) et regroupant (5) , (6) , (7) il est aisé de voir que (1) + (2) $\Leftrightarrow$ (3') + (8) + (9) avec

$$(9) \qquad \sum_n \int_1^{1/\alpha_n} g(\alpha_n x)\, dF(x) < \infty \quad .$$

En remarquant enfin que dans (5) , (6) , (7) , f et g jouent des rôles symétriques on obtient la forme cherchée de $f \Delta g$. Si maintenant $f(x) = x^2$. Prenant pour Z_n des variables de Bernouilli, on a :

$$(1) + (2) \Leftrightarrow \sum_n E\, g(\alpha_n Z_n) < \infty$$

$$\Leftrightarrow \sum_n g(\alpha_n) < \infty \quad .$$

Exemple :

$$f(x) = x^p \; , \qquad g(x) = x^q \quad ; \quad \text{alors}$$

$$dG(x) = (1 \wedge \frac{1}{x^{q+1}})\, dx$$

$$dF(x) = (1 \wedge \frac{1}{x^{p+1}})\, dx \quad .$$

Si $p \neq q$ $\qquad (f \Delta g)(x) \overset{m}{\sim} x^{p \wedge q}$

$p = q$ $\qquad (f \Delta g)(x) \overset{m}{\sim} x^p(1 + \log \frac{1}{x})$.

Remarque :

Si $f(x) \leqq x^p$, on a $f \Delta x^p = x^p$ si et seulement si la loi F a un moment d'ordre p fini, ce qui explique en particulier le résultat pour $x^p \Delta x^p$.

Remarque finale :

Nous n'avons pas donné ici l'interprétation en termes d'applications radonifiantes [3] de ces résultats.

Par des techniques élémentaires, on peut caractériser toutes les suites radonifiantes de ℓ_f dans ℓ_g où f et g sont des classes de fonctions de $K(2\,,\,0) \cup K^*(2\,,\,0)$; $K^*(2\,,\,0)$ étant la classe des fonctions inverses au sens de Young de celles de $K(2\,,\,0)$. En particulier on obtient ainsi tous les espaces ℓ_f associés à une fonction f de croissance puissance et logarithmes itérés.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] KWANPIEN — Notes aux C.R. Acad. Sc. Paris - Série A - T. 267, n° 19 , 4 nov. 1968 , p. 698-700.

[2] SCHWARTZ — Note aux C.R. Acad. Sc. Paris - Série A - T. 266, n° 1, 3 janv. 1968, p. 7-9 .

[3] SCHWARTZ — Note aux C.R. Acad. Sc. Paris - Série A - T. 265, n° 25, 18 déc. 1967, p. 832-834.

[4] SCHWARTZ — Séminaire de Calcul des Probabilités (communication orale) - Paris 12/68.

[5] SCHAEFFER — Espaces vectoriels topologiques - New-York , Mc Millan 1967.

[6] BRETAGNOLLE et DACUNHA-CASTELLE — Notes aux C.R. Acad. Sc. Paris - T. 265 - Oct. 1967.

[7] BRETAGNOLLE et DACUNHA-CASTELLE — Annales de l'Ecole Nationale Supérieure (à paraître).