FRANCO CHERSI

Martingales et intégrabilité de $X \log^+ X$ d'après Gundy

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 4 (1970), p. 37-46
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__37_0>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
Rue René Descartes
STRASBOURG

1968-69

- Séminaire de Probabilités -

MARTINGALES ET INTÉGRABILITÉ DE $X \log^+ X$

d'après R.F. GUNDY
(exposé par F. CHERSI (*))

*

INTRODUCTION.

Ce qui suit expose la première partie du travail de R.F. GUNDY "On the Class L log L , Martingales, and Singular Integrals" (à paraître),(**) avec des modifications formelles seulement. Il faut cependant remarquer que le théorème 3 ci-dessous est une modification (due à G. LETTA) un peu plus forte que le résultat original.

La clé de toute la question est fournie par l'inégalité (1) , valable dans certains cas, qui donne la réciproque d'une inégalité classique de Doob. Cela permet d'établir que l'intégrabilité de $X \log^+ X$ est aussi nécessaire dans des cas, où sa suffisance était déjà connue (voir les exemples I et II ci-dessous). Il s'agit ici de variables aléatoires positives seulement, tandis que les cas généraux correspondants sont traités dans les travaux de BURKHOLDER ([1], Theorem 1) et STEIN ([6], à paraître à ce moment), respectivement.

Dans la deuxième partie, GUNDY applique ces méthodes à la théorie des intégrales singulières.

(*) De l'Université de Pisa, hôte à Strasbourg, subventionné par le Consiglio Nazionale delle Ricerche d'Italie.
(**) Studia Mathematica, XXXIII, 1969, p.109-118.

Dans la suite, l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$ sera souvent sous-entendu.

LEMME 1.

Pour toute variable aléatoire positive X on a l'égalité

$$\int_\Omega X \log^+ X \, dP = \int_1^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{B_\lambda} X dP$$

où $B_\lambda = \{X > \lambda\}$.

DÉMONSTRATION.

Sur $A = \{X < 1\}$ on a $\log^+ X = 0$, et $A \cap B_\lambda$ est vide pour tout $\lambda \geq 1$; il suffit donc de vérifier l'égalité des intégrales faites sur $\{X \geq 1\}$, ce qui est immédiat, grâce au théorème de Fubini (*) .

LEMME 2.

Soient X,Y deux v.a. positives et telles que l'on ait $X \leq Y$ p.s. ; soient a,b deux nombres strictement positifs. Supposons que l'on ait, pour tout $\lambda \geq a$, l'inégalité

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\{Y>\lambda\}} X dP \leq b \, P\{Y > \lambda\} \tag{1}$$

Si Y est intégrable, il en est de même de $X \log^+ X$.

(Cela est, partiellement, le réciproque d'un théorème de Doob : [3], page 317).

DÉMONSTRATION.

Posons $\alpha = \max(1,a)$; puisque $\{X > \lambda\}$ est contenu dans $\{Y > \lambda\}$,

(*) Le lemme est valable sur tout espace de mesure $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$, $\mu \geq 0$.

l'inégalité (1) donne

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{\{X>\lambda\}} X dP \leq b \int_{0}^{+\infty} P\{Y > \lambda\} d\lambda = b\, E[Y]$$

Le lemme 1 entraîne

$$E[X \log^{+} X] = \int_{1}^{\alpha} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{\{X>\lambda\}} X dP + \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{\{X>\lambda\}} X dP$$

et la première intégrale à droite est finie, parce que X est intégrable.

THÉOREME 1.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une martingale positive, uniformément intégrable (°). Supposons qu'il existe $a > 0$ et $b \geq 1$ tels que l'on ait p.s.

(2) $\quad X_{-\infty} \leq a \quad , \quad X_n \leq b X_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

L'intégrabilité de $\sup_{n\in\mathbb{Z}} X_n$ entraîne alors celle de $X_\infty \log^{+} X_\infty$.
(L'implication inverse est vraie même sans (2) : Doob [3] , page 317).

DÉMONSTRATION.

Posons $\sup_{n\in\mathbb{Z}} X_n = Y$ et, pour $\lambda \geq a$, $\Lambda_\lambda = \{Y > \lambda\}$; puisque X_n converge vers X_∞ p.s. , on a $X_\infty \leq Y$. Prouvons l'inégalité (1) pour ces variables aléatoires ; puisque Λ_λ tend vers Λ_a en croissant lorsque $\lambda \downarrow a$, il suffit de la démontrer pour tout $\lambda > a$.

Définissons le temps d'arrêt

$$T_\lambda(\omega) = \begin{cases} \inf \{n \in \mathbb{Z} : X_n(\omega) > \lambda\} & \\ + \infty & \text{s'il n'y a pas de tels } n \end{cases}$$

(°) On sait qu'on peut alors achever la martingale avec $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ et $X_{-\infty} = \lim_{n\to-\infty} X_n$; voir p.e. Meyer [5], pages 117-20.

Remarquons que, p.s. , T_λ ne prend pas la valeur $-\infty$, parce que $\lim_{n\to-\infty} X_n = X_{-\infty} \leq a < \lambda$. Par conséquent, la deuxième des conditions (2) entraîne $X_{T_\lambda} \leq b\lambda$ p.s. (et cela est vrai aussi dans le cas où $T_\lambda = +\infty$). On a d'ailleurs $\Lambda_\lambda = \{T_\lambda < \infty\}$ et alors, d'après le théorème d'arrêt,

$$\int_{\Lambda_\lambda} X_\infty dP = \int_{\{T_\lambda<\infty\}} X_{T_\lambda} dP \leq b\lambda P\{T_\lambda < \infty\} = b\lambda\, P(\Lambda_\lambda) .$$

<u>REMARQUE 1.</u>

Si l'on a affaire à une martingale $(X_n)_{n<0}$ (qui est toujours uniformément intégrable), ou bien à $(X_m)_{m\geq 1}$ uniformément intégrable, on se ramène à la situation envisagée ci-dessus en posant $X_n = X_{-1}$ pour $n \geq 0$ dans le premier cas, $X_m = X_1$ pour $m \leq 0$ dans l'autre.

<u>EXEMPLE I.</u>

Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. intégrables, indépendantes et de même loi. Posons $S_n = \Sigma_1^n{}_k Y_k$ et $X_{-n} = \frac{1}{n} S_n$ pour $n \geq 1$ (donc $X_{-1} = Y_1$) ; le processus $(X_{-n})_{n\geq 1}$ est une martingale (uniformément intégrable) par rapport aux tribus $\ldots \mathcal{F}_{-n} \subset \mathcal{F}_{-(n-1)} \subset \ldots \subset \mathcal{F}_{-1}$, où $\mathcal{F}_{-n} = \mathcal{T}\{S_p : p \geq n\}$ (on démontre en effet que les espérances $E[Y_i | \mathcal{F}_{-n}]$, $1 \leq i \leq n$, sont égales, d'où $\frac{1}{n} S_n = E[\frac{1}{n} S_n | \mathcal{F}_{-n}] = E[Y_1 | \mathcal{F}_{-n}]$; Doob [3] , pages 341-42). Si les v.a. Y_n sont aussi positives, il s'agit d'une martingale $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (remarque 1) uniformément intégrable, positive, qui vérifie les conditions (2) , avec

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n = E[Y_1] \quad \text{et} \quad b = 2 .$$

D'après le théorème 1 on conclut alors : <u>l'intégrabilité de</u> $\sup_n \frac{1}{n}(Y_1 + \ldots + Y_n)$ <u>entraîne celle de</u> $Y_1 \log^+ Y_1$.

Le deuxième exemple sera fourni par des martingales "L^∞-régulières" au sens de Chow [2] et Gundy [4] .

DÉFINITION.

Une martingale $(X_n)_{n\geq 1}$, relative aux tribus $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots \mathcal{F}_n \subset \ldots$, est dite "$L^\infty$-régulière" si l'on a :

$$X_n = X_1 + \sum_{2}^{n} V_k D_k \quad , \quad \text{où :}$$

a) X_1 est constante ;

b) chaque V_k est une v.a. $\mathcal{F}_{k-1}$ mesurable, intégrable ;

c) chaque D_k est $\mathcal{F}_k$-mesurable, intégrable, et $E[D_k | \mathcal{F}_{k-1}] = 0$, $E[D_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] = 1$ p.s. ;

d) il existe un nombre fini d tel que pour tout k l'on ait $\|D_k\|_\infty \leq d$.

Un espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}, P)$ est appelé "L^∞-régulier" si toutes les martingales sur cet espace sont L^∞-régulières, avec la même borne d.

THÉOREME 2.

(Gundy [4], pages 727-728). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, et soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de sous-tribus telle que :

i) $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$;

ii) pour tout n , $\mathcal{F}_n$ est engendrée par une partition $\mathcal{A}_n$ de Ω , et $\mathcal{A}_{n+1}$ est plus fine que $\mathcal{A}_n$; pour tout atome A_n de $\mathcal{A}_n$ et tout A_{n+1} de $\mathcal{A}_{n+1}$, avec $A_{n+1} \subset A_n$, on a

$$0 < \delta \leq \frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)} < 1$$

où δ est fixe (en particulier, chaque partition est finie).

L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}, P)$ est alors L^∞-régulier.

DÉMONSTRATION.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$; il s'agit de v.a. étagées, et $E[X_2|\mathcal{F}_1] = X_1$ est constante. En posant $Y_k = X_k - X_{k-1}$ $(k \geq 2)$, on a $X_n = X_1 + \sum_2^n Y_k$; il nous faut représenter Y_k comme produit $V_k D_k$, avec les propriétés b), c), d). Posons alors

$$V_k = (E[Y_k^2|\mathcal{F}_{k-1}])^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \text{b) est vérifiée .}$$

Soit A un atome de $\mathcal{G}_{k-1}$, divisé en atomes $B_j \in \mathcal{G}_k$ $(1 \leq j \leq m \leq \delta^{-1})$; $Y_k^2 I_A = \Sigma_j \alpha_j^2 I_{B_j}$ et $E[Y_k^2|\mathcal{F}_{k-1}]|_A = \dfrac{\Sigma_j \alpha_j^2 P(B_j)}{P(A)}$; donc $V_k|_A = c_A \geq 0$, nulle si et seulement si $Y_k|_A = 0$. Définissons D_k en posant :

$$D_k = \begin{cases} D_k' = \dfrac{Y_k}{V_k} & \text{sur } \{V_k > 0\} \\ \\ D_k'' \text{ (à déterminer)} & \text{sur } \{V_k = 0\} \end{cases} ;$$

D_k' vérifie c) . En outre, si $V_k > 0$ sur A , sur chaque atome B_j on a $D_k'^2 = \dfrac{\alpha_j^2}{\Sigma_\ell \alpha_\ell^2 p_\ell}$, où $p_\ell = \dfrac{P(B_\ell)}{P(A)} \geq \delta > 0$; il en résulte $\max_j \dfrac{\alpha_j^2}{\Sigma_\ell \alpha_\ell^2 p_\ell} \leq \delta^{-1}$: donc $|D_k'| \leq \delta^{-\frac{1}{2}}$ p.s. , et cela pour tout $k \geq 2$.

Sur $\{V_k = 0\} = \{Y_k = 0\}$, n'importe quel D_k'' vérifie l'égalité $Y_k = V_k D_k''$; définissons-le de façon qu'il ait les propriétés c), d).

Si $V_k = 0$ sur A , posons ici $D_k'' = \sum_{1}^{m}{}_j \gamma_j I_{B_j}$; les conditions c) s'écrivent alors

$$\begin{cases} \sum_1^m{}_j \gamma_j p_j = 0 \\ \sum_1^m{}_j \gamma_j^2 p_j = 1 \end{cases}$$

Dans $\mathbb{R}^m = \{(\gamma_1, \ldots \gamma_m)\}$ la deuxième équation représente une ellipse contenue dans la boule $|\gamma|^2 \leq \delta^{-1}$ (parce que $p_j \geq \delta$) : il y a des solutions du système, avec $|\gamma| \leq \delta^{-\frac{1}{2}}$. Donc D_k'' aussi vérifie c) et d), avec $d = \delta^{-\frac{1}{2}}$.

THÉOREME 3.

Pour toute martingale $(X_n)_{n\geq 1}$ L^∞-régulière et positive, il existe $b \geq 1$ tel que $X_n \leq b\, X_{n-1}$ p.s. pour tout $n > 1$.

LEMME 3 (*).

Sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ soient G une sous-tribu, et X une v.a. positive telle que $E[X|G] \geq \alpha > 0$ p.s. Soit ε un nombre tel que $0 < \varepsilon < \alpha$, et posons $\Lambda = \{X \geq \varepsilon\}$. On a alors $P[\Lambda|G] > 0$ p.s.

DÉMONSTRATION du lemme.

On a :

$\alpha \leq E[X|G] = E[XI_\Lambda|G] + E[XI_{\Lambda^c}|G] \leq E[XI_\Lambda|G] + \varepsilon$, d'où $E[XI_\Lambda|G] \geq \alpha - \varepsilon > 0.$

Soient $J = E[I_\Lambda|G]$ p.s. et $N = \{J = 0\}$: prouvons que $P(N) = 0$.

Puisque $N \in G$, on a

$$P(\Lambda \cap N) = \int_N J\, dP = 0 \quad , \quad \text{d'où}$$

$$0 = \int_{\Lambda\cap N} X\, dP = \int_N X\, I_\Lambda\, dP \;\geq\; (\alpha - \varepsilon)\, P(N)$$

donc $P(N) = 0$.

DÉMONSTRATION du théorème.

On a $X_n = X_{n-1} + V_n D_n$ $(n > 1)$; nous allons voir que $|V_n| \leq 2d\, X_{n-1}$ p.s. (où d est la borne des $|D_k|$) , et par conséquent

$$X_n \leq X_{n-1} + 2d^2 X_{n-1} = (1 + 2d^2)X_{n-1} .$$

Il suffit de prouver que l'on a $V_n \leq c\, X_{n-1}$ p.s. pour tout $c > 2d$,

---

(*) C'est une forme faible d'un lemme de Paley et Zygmund ; on trouve celui-ci dans Gundy [4], page 728.

car on passe puis à la limite le long d'une suite $c_m \downarrow 2d$, et l'on obtient l'inégalité pour $-V_n$ de la représentation $X_n = X_1 + \sum_{2}^{n}{}_k(-V_k)(-D_k)$.

Posons donc $B = \{V_n > c\, X_{n-1}\}$, qui appartient à $\mathfrak{F}_{n-1}$, et $\Lambda = \{-D_n \geq \frac{1}{c}\} = \{D_n^- \geq \frac{1}{c}\}$. Sur $\Lambda \cap B$ on aurait $-V_n D_n > X_{n-1}$, i.e. $V_n D_n < -X_{n-1}$, ce qui est impossible parce que $V_n D_n = X_n - X_{n-1}$; donc $B \cap \Lambda = \emptyset$. On a d'ailleurs $E[D_n^- | \mathfrak{F}_{n-1}] = \frac{1}{2} E[|D_n| \mathfrak{F}_{n-1}] \geq \frac{1}{2d} E[D_n^2 | \mathfrak{F}_{n-1}] = \frac{1}{2d}$ (parce que $E[D_n | \mathfrak{F}_{n-1}] = 0$ et $D_n^2 \leq d|D_n|$). Puisque $0 < \frac{1}{c} < \frac{1}{2d}$, on peut appliquer le lemme à D_n^- et l'on trouve $P[\Lambda | \mathfrak{F}_{n-1}] > 0$ p.s. Il en résulte que l'égalité

$$0 = P(B \cap \Lambda) = \int_B E[I_\Lambda | \mathfrak{F}_{n-1}]dP$$

entraîne $P(B) = 0$.

COROLLAIRE.

La martingale $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, que l'on obtient selon la remarque 1 , vérifie alors les conditions (2) , avec $a = X_1$.

EXEMPLE II.

Soit X une v.a. positive, intégrable (avec espérance non nulle), définie sur le cube unitaire de $\mathbb{R}^m$. Soit $(\mathfrak{F}_n)_{n\geq 1}$ la famille croissante de tribus, dans laquelle $\mathfrak{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ et les autres sont engendrées par des partitions dyadiques de plus en plus fines, de sorte que $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_n)_{n\geq 1}, P)$ (où P est la mesure de Lebesgue) est un espace L^∞-régulier ; $\mathfrak{F}_\infty$ est la tribu borélienne du cube. Posons

$$X_n = E[X | \mathfrak{F}_n] \quad \text{pour} \quad n \geq 1 \ , \ \text{et} \quad X_n = X_1 = E[X]$$

pour $n \leq 0$; $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est alors une martingale uniformément intégrable, positive, qui vérifie les conditions (2) (d'après le théorème 3 et son corollaire). En outre $X_\infty = X$ p.s.

Appelons X^* la fonction maximale relative à X (en tout point ω du cube, $X^*(\omega)$ est le sup des moyennes de X sur tous les rectangles qui contiennent ω ; voir p.e. Zygmund [7] , page 306). Sur chaque atome $A \in \mathcal{F}_n$, $X_n|_A = \frac{1}{P(A)} \int_A X \, dP$: donc $\sup_{n \in \mathbf{Z}} X_n \leq X^*$.

Le théorème 1 entraîne alors le résultat suivant : si X^* est intégrable, il en est de même de $X \log^+ X$.

Dans le cas $m = 1$ et pour des v.a. positives, cela fournit la réciproque d'une proposition classique (Zygmund, page 306).

*** ***

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.L. BURKHOLDER "Successive Conditional Expectations of an Integrable Function", Ann. Math. Statist., vol. 33, 1962, p. 887-893.

[2] Y.S. CHOW "Martingales in a σ-Finite Measure Space Indexed by Directed Sets", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 97, 1960, p. 254-285.

[3] J.L. DOOB "Stochastic Processes", Wiley, 1953.

[4] R.F. GUNDY "The Martingale Version of a Theorem of Marcinkiewicz and Zygmund", Ann. Math. Statist., vol. 38, 1967, p. 725-734.

[5] P.A. MEYER "Probabilités et Potentiel", Hermann, 1966.

[6] E.M. STEIN "Note on the Class L log L", Studia Math., vol. 32, 1969.

[7] A. ZYGMUND "Trigonometric Series" vol. II, Cambridge, 1959.

*** ***