

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

GABRIEL MOKOBODZKI

## **Quelques propriétés remarquables des opérateurs presque positifs**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 4 (1970), p. 195-207

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1970\\_\\_4\\_\\_195\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__195_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

Laboratoire Associé au C.N.R.S.

Rue René Descartes

STRASBOURG

1968-69

- Séminaire de Probabilités -

QUELQUES PROPRIÉTÉS REMARQUABLES DES OPÉRATEURS PRESQUE POSITIFS

par Gabriel MOKOBODZKI

\*

Cet exposé fait suite à celui intitulé "Densité relative de deux potentiels comparables" dont on utilisera les définitions et les résultats.

Soient  $(X, \mathfrak{B})$  un espace mesurable,  $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$  une famille résolvente sous-markovienne de noyaux positifs sur  $(X, \mathfrak{B})$ . On suppose que  $V = \sup_\lambda V_\lambda$  est un noyau borné. On désigne par  $C$  et  $S$  respectivement le cône des fonctions surmédianes et le cône des fonctions excessives pour la famille résolvente  $(V_\lambda)$ , enfin  $F$  désigne l'ensemble de toutes les applications de  $X$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$ .

DEFINITION 1.

On dira qu'un opérateur  $D$  de  $C$  dans  $F$  est presque positif s'il vérifie la condition suivante :

$$(P.P.) \quad [v_1, v_2 \in C, v_1 \geq v_2, v_1(x) = v_2(x)] \Rightarrow [D v_1(x) \leq D v_2(x)] .$$

Cette définition est empruntée à WALDENFELS [4], avec une légère modification.

Exemple.

Si  $N$  est un noyau, et  $\lambda > 0$ ,  $D = \lambda(I - N)$  est un opérateur presque positif. En particulier, les opérateurs  $D_\lambda = \lambda(I - \lambda V_\lambda)$  sont presque positifs. Il résulte des propriétés suivantes que les opérateurs  $\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} D_\lambda$ ,

.

$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} D_\lambda$  sont presque positifs.

Propriétés immédiates.

a) Soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre sur la famille des opérateurs presque positifs définis sur  $C$ .

L'opérateur  $D = \lim_{\mathcal{U}} D_\lambda$  défini par  $D_0 v(x) = \lim_{\mathcal{U}} D v(x)$   
 $\forall x \in X, v \in C$  est presque positif.

b) Si  $D$  est presque positif et si  $\varphi$  est une application croissante de  $\overline{\mathbb{R}}$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , l'opérateur  $\varphi \circ D$  est presque positif.

c) Si  $D_1$  et  $D_2$  sont presque positifs,  
 $\sup(D_1, D_2) : v \mapsto \sup [D_1(v), D_2(v)]$   
 et  $\inf(D_1, D_2) : v \mapsto \inf [D_1(v), D_2(v)]$  sont des opérateurs presque positifs.

d) Si  $D_1, D_2$  sont presque positifs et si  $D_1 v(x) > -\infty$   
 $\forall v \in C$  et  $x \in X$ , alors  $D_1 + D_2$  est presque positif.

e) Si  $D$  est presque positif,  $D(\inf(v_1, v_2)) \geq \inf(D(v_1), D(v_2))$ .

Considérons la famille  $\mathcal{E}$  des opérateurs presque positifs sur  $C$  satisfaisant aux conditions suivantes

a)  $D(w_1 + w_2) \geq D(w_1) \geq 0 \quad \forall (w_1, w_2) \in C$ .

b)  $D(w) \geq 0 \quad \forall w \in C$  et  $D(w + \epsilon V_1) \leq Dw + \epsilon DV_1$

$\forall w \in C$  et  $\epsilon > 0$

c) Pour toute fonction  $\varphi \geq 0$  de la forme  $\varphi = g_1 - g_2$  où  $g_1$  et  $g_2$  sont excessives bornées, on a

$$DV\varphi = \varphi$$

La famille  $\mathcal{E}$  n'est pas vide, car elle contient les opérateurs  $\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} D_\lambda$

et  $\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} D_\lambda$ .

On se propose d'abord d'établir le résultat suivant (théorème 5 ci-dessous).

Soit  $D \in \mathcal{E}$ , et soit  $\varphi \geq 0$ , mesurable et bornée. Alors

$DV\varphi = \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} D_\lambda V\varphi$  V-presque partout. Si, en outre  $\varphi$  est mesurable pour la tribu engendrée par les fonctions excessives, on a  $DV\varphi = \varphi$  V-presque partout.

Si l'on remarque que les opérateurs définis par

$$\overline{D}w(x) = \sup_{D \in \mathcal{E}} Dw(x)$$

$$\underline{D}w(x) = \inf_{D \in \mathcal{E}} Dw(x)$$

appartiennent encore à  $\mathcal{E}$ , on voit que les ensembles V-négligeables considérés ne dépendent que de  $\varphi$ , et peuvent être choisis indépendamment de  $D$ .

Nous n'utiliserons pas immédiatement toutes les hypothèses précédentes. Nous supposerons seulement dans la suite que  $D$  est un opérateur presque positif sur  $C$  satisfaisant aux conditions a), b) et à la condition c') suivante

c')  $DV1$  est fini V-presque partout.

Cette condition résulte de c), car si  $\varphi$  est la régularisée excessive de la fonction surmédiane 1, on a  $DV1 = DV\varphi = \varphi$  si c) est satisfaite. Par exemple, l'opérateur  $\sup_{\lambda} D_\lambda$  satisfait à a), b), c').

Nous désignerons par  $D_0$ , dans toute la suite, l'opérateur  $\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} D_\lambda$  sur  $C$ .

### THEOREME 2.

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n) \subset C$  deux suites telles que

a)  $u_n < v_1$  pour tout  $n$

b) la suite  $(u_n - v_n)$  converge simplement V-presque partout

vers 0.

Dans ces conditions, pour toute fonction excessive  $w$ , la suite  $R(u_n - v_n + w)$  converge simplement partout vers  $w$ .

DEMONSTRATION

Montrons d'abord que la suite  $R(u_n - v_n)$  tend simplement partout vers 0.

Pour tout  $\epsilon > 0$ , on a

$$R(u_n - v_n) \leq R(u_n - v_n - \epsilon) + \epsilon$$

et si  $A_n = \{u_n - v_n \geq \epsilon\}$ , on a  $R(u_n - v_n - \epsilon) \leq V 1_{A_n}$

(Prop. 12 de l'exposé précédent). Comme  $\lim (u_n - v_n) = 0$   $V$ -presque partout, l'ensemble  $E = \bigcap_{p \geq 1} \left( \bigcup_{m \geq p} A_m \right)$  est  $V$ -négligeable,  $\lim V 1_{A_n} = 0$  et  $\lim R(u_n - v_n - \epsilon) = 0$ . Ce résultat étant vrai pour tout  $\epsilon > 0$ , on a bien  $\lim R(u_n - v_n) = 0$ .

Soit maintenant  $w$  excessive ; on a toujours

$$R(u_n - v_n + w) \leq R(u_n - v_n) + w$$

d'où  $\limsup_{n \rightarrow \infty} R(u_n - v_n + w) \leq w$ .

Rappelons que si  $v$  est surmédiane,  $\hat{v} = \sup_{\lambda} \lambda V_{\lambda}$  est excessive et que  $v = \hat{v}$   $V$ -presque partout. On a alors

$$\liminf (u_n - v_n + w) \leq \liminf R(u_n - v_n + w) \leq w$$

La fonction  $s = \liminf R(u_n - v_n + w)$  est surmédiane et  $s = w$   $V$ -presque partout ; on a donc  $\hat{s} = w$ . D'autre part  $\hat{s} \leq s$  et  $s \leq w$ , donc  $s = w$  partout, d'où enfin  $\lim_{n \rightarrow \infty} R(u_n - v_n + w) = w$  partout.

LEMME 3.

Soient  $w \in C$ ,  $(u_n)$  une suite de fonctions excessives telles que  $u_n = V\varphi_n$  ( $\varphi_n \geq 0$ ) et  $u_n < w$  pour tout  $n$ . Pour l'ordre défini par le cône  $S$  des fonctions excessives, la borne supérieure  $u$  de la suite  $(u_n)$  est donnée

par

$$u = V \left( \sup_n D_o u_n \right)$$

et on a  $D_o u = \sup_n D_o u_n$  V-presque partout.

DEMONSTRATION

Si  $v \in S$  et  $v > u_n$  pour tout  $n$  on a  $D_o v \geq \sup_n D_o u_n$ , donc  $v > V D_o v > V \left( \sup_n D_o u_n \right) \supseteq V D_o u_n = u_n$  pour tout  $n$  d'après le théorème 15 et le corollaire 16 de l'exposé précédent. On a donc bien  $V \left( \sup_n D_o u_n \right) = u$ .

On a aussi  $D_o u \geq D_o u_n$  pour tout  $n$ , d'où

$$V(D_o u - \sup_n D_o u_n) = 0$$

Rappelons que  $D$  satisfait à a), b) et c') :

THEOREME 4.

Soient deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n) \subset C$  telles que

a)  $u_n < V1$  et

b) pour toute fonction excessive  $w$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} R(u_n - v_n + w) = w$

Dans ces conditions

$$\limsup_n D u_n \geq \liminf_n D v_n \quad V\text{-presque partout.}$$

DEMONSTRATION

Posons  $D_o v = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(v - \lambda V_\lambda v)$  pour tout  $v \in C$ . Choisissons

$\epsilon > 0$ , et pour tout  $n$ , posons  $A_n^\epsilon = \{R(u_n - v_n + \epsilon V1) = u_n - v_n + \epsilon V1\}$ .

D'après le théorème 20 de l'exposé précédent, on a

$$D_o(R(u_n - v_n + \epsilon V1)) = 0 \quad V\text{-presque partout dans l'ensemble mesurable } \int A_n^\epsilon.$$

Posons  $B = \bigcup_n A_n^\epsilon$  et montrons que  $\int B$  est V-négligeable.

Pour l'ordre défini par le cône  $S$ , soit  $u$  la borne supérieure de la famille  $(R(u_n - v_n + \epsilon V_1))$ . D'après le lemme 3, on a (comme  $R(u_n + \epsilon V_1 - v_n) < u_n + \epsilon V_1 < (1 + \epsilon)V_1$  :

$$D_o u = \sup_n D_o(R(u_n - v_n + \epsilon V_1)) \quad V\text{-presque partout}$$

donc  $D_o u = 0$   $V$ -presque partout dans  $\int B$ .

Par hypothèse  $\lim_n R(u_n - v_n + \epsilon V_1) = \epsilon V_1$ , par suite on a aussi  $\epsilon V_1 < u$  et

$0 \leq D_o(\epsilon V_1) \leq D_o u \leq 0$   $V$ -presque partout dans  $\int B$ . On a  $D_o(\epsilon V_1) = \epsilon \cdot (\sup \lambda V_\lambda 1) = \epsilon$   $V$ -presque partout. On en conclut que  $\int B$  est  $V$ -négligeable.

Pour tout  $x \in A_n^\epsilon$ , on a

$$u_n + \epsilon V_1 \leq R(u_n - v_n + \epsilon V_1) + v_n$$

et

$$(u_n + \epsilon V_1)(x) = R(u_n - v_n + \epsilon V_1)(x) + v_n(x)$$

L'opérateur  $D$  étant presque positif et satisfaisant à la condition a), on

en déduit que  $D(u_n + \epsilon V_1)(x) \geq Dv_n(x)$  pour  $x \in A_n^\epsilon$ . Posons alors  $E_\epsilon = \bigcap_{p \geq m} (U A_m^\epsilon)$ ; cet ensemble est mesurable,  $\int E_\epsilon$  est  $V$ -négligeable et pour tout  $x \in E_\epsilon$

$\limsup D(u_n + \epsilon V_1)(x) \geq \liminf Dv_n(x)$ . En prenant  $E = \bigcap_n E_{1/n}$ , en tenant compte

de l'inégalité  $D(u_n + \epsilon V_1) \leq D(u_n) + \epsilon DV_1$  et du fait que  $DV_1$  est fini

$V$ -presque partout, on a

$$\limsup D(u_n)(x) \geq \liminf Dv_n(x) \quad \forall x \in E.$$

Ce qui prouve le théorème.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le premier résultat annoncé au début de l'exposé.

#### THEOREME 5.

Soit  $D$  un opérateur presque positif sur  $C$  appartenant à  $\xi$ , c'est-à-dire :

- a)  $D(v_1 + v_2) \geq D(v_1) \geq 0 \quad \forall v_1, v_2 \in C$
- b)  $D(u + \epsilon V_1) \leq D(u) + \epsilon D(V_1) \quad \forall \epsilon > 0, \forall u \in C$

c) Pour toutes fonctions excessives  $g_1, g_2$  bornées, telles que  $g_1 \geq g_2$ , on a  $D V(g_1 - g_2) = g_1 - g_2$ .

Dans ces conditions, pour tout  $u \in C$ ,  $u \leq V1$ , on a V-presque partout

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n(u - V_n u) \leq Du \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} n(u - V_n u)$$

DEMONSTRATION

L'outil essentiel sera le théorème 4. Considérons la suite  $u_n = nV_n u$ . On a  $u_n = nV(u - nV_n u)$  et comme  $u \leq V1$ , on a  $u - nV_n u \leq V1 - nV_n V1 = V_n 1$ , et par suite  $u_n \leq V1$  pour tout  $n$ .

Considérons maintenant la suite constante  $v_n = u$ , et appliquons les théorèmes 2 et 4 ; on obtient

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} Du_n \geq Du \quad \text{V-presque partout}$$

et d'après c) 
$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n(u - V_n u) \geq Du \quad \text{V-presque partout}$$

Si l'on échange les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  pour appliquer le théorème 4, ce qui est possible dans ce cas particulier on obtient, V-presque partout

$$Du \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} Du_n \quad \text{et d'après c)}$$

$$Du \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} n(u - nV_n u) \quad \text{V-presque partout}$$

ce qui démontre le théorème.

COROLLAIRE 6.

Pour tout  $u \in S$  tel que  $u \leq kV1$ , la fonction  $Du$  est V-mesurable et l'on a

$$u = VD u$$

pour tout opérateur presque positif  $D \in \mathcal{E}$ .



Nous retournons maintenant au cas plus général d'un opérateur presque positif  $D$  satisfaisant à a), b) et c').

THEOREME 7.

Pour  $w \in C$  et  $\varphi \geq 0$  bornée, si  $Dw(x) > D(V\varphi)(x)$   $V$ -presque partout, alors  $w \geq V\varphi$ .

DEMONSTRATION.

Si l'on n'a pas  $V\varphi \leq w$ , alors  $R(V\varphi - w) \neq 0$  et si  $A = \{R(V\varphi - w) = V\varphi - w\}$  et  $k = \sup \varphi$ , on a  $R(V\varphi - w) \leq k \cdot V1_A$  (th. 12 de l'exposé précédent). L'ensemble  $A$  n'est pas  $V$ -négligeable, il existe donc  $x \in A$  tel que  $Dw(x) > DV\varphi(x)$ . Mais ceci est contradictoire ; en effet, on a

$$V\varphi - R(V\varphi - w) \leq w$$

et

$$[V\varphi - R(V\varphi - w)](x) = w(x)$$

ce qui impliquerait  $DV\varphi(x) \geq Dw(x)$ .

THEOREME 8

On suppose de plus que  $D(0) = 0$  et que  $D$  est positivement homogène sur  $C$ . Alors pour toute fonction surmédiane  $w$ ,  $Dw$  est finie  $V$ -presque partout.

DEMONSTRATION

La suite  $u_n = 0$ , et la suite  $v_n = \frac{1}{n} w$  satisfont aux conditions des théorèmes 2 et 4, par suite

$$0 = D(0) \geq \inf_n \left( \frac{1}{n} Dw \right) \quad V\text{-presque partout, ce qui}$$

prouve le théorème.

COROLLAIRE 9

Pour toute fonction surmédiane  $w$ ,

$$s = \sup_{\lambda > 0} \lambda(w - \lambda V_\lambda w) \text{ est finie } V\text{-presque partout.}$$

DEMONSTRATION

L'opérateur  $v \mapsto \sup_{\lambda} \lambda(v - \lambda V_\lambda v)$  est sous-additif, positivement homogène et  $\lambda(V1 - \lambda V_\lambda 1) = \lambda V_\lambda 1$ , de sorte que l'on peut appliquer le théorème précédent.

THEOREME 10

Désignons par  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  respectivement les ensembles de fonctions mesurables positives bornées  $\varphi$  telles que  $DV\varphi \geq \varphi$   $V$ -presque partout et  $DV\varphi \leq \varphi$   $V$ -presque partout.

Alors pour toute suite bornée  $(\varphi_n) \subset \Gamma_1$  et pour toute suite bornée  $(\psi_n) \subset \Gamma_2$ ,

$$\begin{aligned} \limsup \varphi_n &\in \Gamma_1 \\ \text{et} \quad \liminf \psi_n &\in \Gamma_2 \end{aligned}$$

DEMONSTRATION.

Raisonnons seulement pour  $\Gamma_1$ , car on procède de la même manière pour  $\Gamma_2$ .

On remarque immédiatement que  $\Gamma_1$  contient les enveloppes supérieures des suites contenues dans  $\Gamma_1$ . Il suffit donc de montrer que pour une suite décroissante  $(\varphi_n) \subset \Gamma_1$ ,  $\inf \varphi_n \in \Gamma_1$ . Posons  $v_n = V\varphi_n$  et  $u_p = \inf_n V\varphi_n$ ,  $\forall_p$ . On se trouve dans les conditions d'application du théorème 4, par suite

$$\limsup Du_p = D(\inf V\varphi_n) \geq \liminf DV\varphi_n \geq \inf \varphi_n \quad V\text{-presque partout, par suite } (\inf \varphi_n) \in \Gamma_1.$$

Remarque 11

Soit  $B^+$  le cône des fonctions mesurables positives bornées, et soit  $N$  un opérateur croissant de  $B^+$  dans  $B^+$  tel que pour toute suite bornée croissante  $(\varphi_n) \subset B^+$ , on ait  $N(\sup \varphi_n) = \sup_n N(\varphi_n)$   $V$ -presque partout et pour toute suite décroissante  $(\varphi_n) \subset B^+$ .

$$N(\inf_n \varphi_n) = \inf_n N(\varphi_n) \quad V\text{-presque partout}$$

On aurait un théorème analogue au théorème 10 pour les ensembles  $\Gamma'_1 = \{\varphi \in B^+ ; DV\varphi \geq N\varphi, V\text{-p.p.}\}$  et  $\Gamma'_2 = \{\varphi \in B^+ ; DV\varphi \leq N\varphi, V\text{-p.p.}\}$ .

Remarque 12 .

Les théorèmes précédents n'exigent pas que pour  $w \in C$ , la fonction  $Dw$  soit mesurable sur  $X$ .

Nous achevons de montrer le résultat annoncé au début de l'exposé.

COROLLAIRE 13.

Soit un opérateur  $D \in \mathcal{E}$ . Si  $\varphi \geq 0$  est bornée, mesurable pour la tribu  $\mathcal{B}'$  engendrée par les fonctions excessives, on a  $DV\varphi = \varphi$   $V$ -presque partout.

DEMONSTRATION

Soit  $H = C - C$  l'espace vectoriel réticulé des différences de fonctions surmédianes. Pour toute  $\varphi \in H^+$  on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} nV_n\varphi = \varphi$   $V$ -presque partout ; d'après le théorème 5, on a  $DV\varphi = D_0 V\varphi = \varphi$   $V$ -presque partout (cf le corollaire 17 de l'exposé précédent). Le théorème 10 entraîne alors, par un raisonnement de classes monotones, que l'ensemble  $\Gamma$  des fonctions  $\varphi \geq 0$  telles que  $DV\varphi = \varphi$   $V$ -presque partout contient toutes les fonctions  $\mathcal{B}'$ -mesurables bornées.

Le théorème suivant comprend comme cas particulier le "théorème maximal de HARDY-LITTLEWOOD" sur la droite. Il précise beaucoup le corollaire 9 .

THEOREME 14

Soit  $D$  un opérateur presque positif sur  $C$  vérifiant les propriétés suivantes

- a)  $D(v_1+v_2) \geq D(v_1) \geq 0 \quad \forall v_1, v_2 \in C$
- b)  $D(u+\epsilon V1) \leq Du + \epsilon DV1 \quad \forall u \in C \text{ et } \forall \epsilon > 0 .$
- c) Pour tout  $k \geq 0$  ,  $D(Vk) = kDV1 = k$  , V.p.p.
- d) Pour toute fonction  $\varphi \geq 0$  , bornée, mesurable pour la

tribu  $\mathcal{B}'$  engendrée par les fonctions excessives, on a  $DV\varphi \geq \varphi$   $V$ -presque partout.

Dans ces conditions, pour toute  $w \in C$  , telle que  $Dw$  soit  $\mathcal{B}'$ -mesurable et tout  $k > 0$  , on a

$$w \geq k \quad V1_{\{Dw \geq k\}}$$

DEMONSTRATION

Soit  $\varphi = k \cdot 1_{\{Dw < k\}}$  . On a par hypothèse  $DV\varphi \geq \varphi$   $V$ -presque partout, par suite  $D(w+V\varphi) \geq \sup(Dw, DV\varphi) \geq k$   $V$ -presque partout. D'après le théorème 7, pour tout  $k' < k$  , on a  $w+V\varphi \geq k'V1$ , donc aussi  $w+V\varphi \geq kV1$  ce qui donne encore  $w \geq kV(1 - 1_{\{Dw < k\}})$

ou  $w \geq kV1_{\{Dw \geq k\}}$  .

COROLLAIRE 15

Si  $Dw = \sup_{\lambda > 0} \lambda(w - \lambda V_\lambda w)$  , alors pour toute fonction surmédiane  $w$  , on a

$$w \geq k \quad V1_{\{Dw \geq k\}}$$

DEMONSTRATION

Les conditions a) , b) , c) du théorème 14 sont immédiatement vérifiables.

Pour la condition d), on a

$$DV\varphi \geq D_{\circ} V\varphi = \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V_{\lambda} \varphi \geq \varphi \quad V\text{-presque partout d'après}$$

le corollaire 13 appliqué à  $D_{\circ}$  .

Remarque 16

Si au lieu de prendre la fonction surmédiane 1, on prend  $u \in C$  ,  $u(x) > 0 \quad \forall x \in X$  , et  $u$  finie, on a, si  $Vu$  est finie,

$w \geq kV1_{\{Dw \geq kDVu\}} \cdot u$  , pour tout  $w \in C$  , en conservant les notations du corollaire 15 .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] COURREGÉ Philippe      Sur la forme intégrô-différentielle des opérateurs de  $C_K^\infty$  dans  $C$  satisfaisant au principe du maximum.  
Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY (Théorie du Potentiel) 1965-1966 n°2. Secrétariat Mathématique. 11, rue Pierre Curie. Paris Ve .
- [2] MOKOBODZKI Gabriel      Densité relative de deux potentiels comparables obtenue sans filtres rapides.  
Séminaire CHOQUET (Analyse fonctionnelle). 1968-1969 n°1. Secrétariat Mathématique.Paris.
- [3] MOKOBODZKI Gabriel      Densité relative de deux potentiels comparables.  
Séminaire de Probabilités. 1968-1969. Strasbourg
- [4] von WALDENFELS (W.)      Fast positive Operatoren.  
Berichte der Kernforschungs-anlage.Jülich 1964.