

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

GABRIEL MOKOBODZKI

## Densité relative de deux potentiels comparables

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 4 (1970), p. 170-194

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1970\\_\\_4\\_\\_170\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__170_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

Laboratoire Associé au C.N.R.S.

Rue René Descartes

STRASBOURG

1968-69

- Séminaire de Probabilités -

DENSITÉ RELATIVE DE DEUX POTENTIELS COMPARABLES

par Gabriel MOKOBODZKI

I. ÉNONCÉ DU PROBLÈME

Soient  $(X, \underline{B})$  un espace mesurable,  $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$  une famille résolutive sousmarkovienne  $(\lambda V_\lambda 1 \leq 1)$  de noyaux positifs sur  $(X, \underline{B})$ . On suppose que  $V = \sup_\lambda V_\lambda$  est un noyau borné.

Toutes les fonctions de la forme  $Vf$ , où  $f$  est mesurable positive, sont des fonctions excessives. Réciproquement, soit  $u$  une fonction excessive, telle que  $(V1-u)$  soit excessive ; existe-t-il une fonction mesurable  $f$ ,  $0 \leq f \leq 1$ , telle que  $Vf = u$  ? Lorsqu'on suppose la continuité absolue des mesures  $\epsilon_x V$  ( $x \in X$ ) par rapport à une même mesure  $\mu$ , c'est-à-dire l'hypothèse (L) de Meyer, la réponse affirma-

tive à cette question est fournie par un théorème dû à Motoo. Nous allons dans ce travail résoudre ce problème sans l'hypothèse (L), c'est-à-dire dans la situation la plus générale. Il faut remarquer que ni le caractère borné de  $V$ , ni le caractère sous-markovien de la résolvante, ne sont des hypothèses essentielles : on se ramène facilement au cas sous-markovien en remplaçant la famille  $(V_\lambda)$  par la famille  $(\frac{1}{g} V_\lambda(g \cdot))$ , où  $g$  est finie, surmédiane et strictement positive (quand une telle fonction existe).

Nous commencerons par des résultats complémentaires de théorie du potentiel.

\*

## II. LE CONE DES POTENTIELS D'UN NOYAU ELEMENTAIRE.

\*

Soient toujours  $(X, \underline{B})$  un espace mesurable,  $N$  un noyau positif sous-markovien, tel que le noyau

$$G_N = (I - N)^{-1} = \sum_{p \geq 0} N^p$$

soit borné. Dans ce cadre, on appelle fonction excessive une fonction mesurable positive  $u$  telle que  $Nu \leq u$ . Si  $u$  est bornée,  $u$  est aussi un potentiel, car  $u = G_N(I - N)u$ .

Désignons par  $S$  le cône convexe des fonctions excessives bornées, et par  $\leq$  l'ordre défini par  $S$ . La réduite d'une fonction mesurable bornée  $u$  se définit par

$$Ru = \inf \{v : v \in S, v \geq u\}.$$

Il n'est pas évident que  $Ru$  soit mesurable quand  $u$  l'est. Rappelons la définition de Meyer.

LEMME 1 . Pour toute  $u$  mesurable bornée,  $Ru$  est mesurable et excessive.

DEMONSTRATION.

Considérons la suite  $(u_n)$  définie par récurrence de la manière suivante :

$$u_0 = u, \quad u_p = \sup(u_{p-1}, Nu_{p-1})$$

Comme  $N1 \leq 1$ , la suite  $(u_p)$  est croissante et bornée, et  $v = \sup u_p$  vérifie  $u \leq v$ ,  $Nv \leq v$ . D'autre part pour toute  $w \in S$  majorant  $u$  on a  $w \geq u_p$ , donc  $w \geq v$ . Finalement, comme  $G_N$  est borné, on a  $\lim_{p \rightarrow \infty} N^p v = 0$ , donc  $v \geq \lim_{p \rightarrow \infty} N^p v = 0$ ;  $v$  est donc excessive, et on a  $Ru = v$ .

Ce procédé de construction de la réduite nous donnera sans grand effort le lemme suivant :

LEMME 2 . Si  $u = G_N f$ , alors  $Ru = G_N \phi$ , avec  $0 \leq \phi \leq f^+$ .

DEMONSTRATION.

Considérons l'opérateur

$$H : u \mapsto \sup(u, Nu) .$$

Si l'on pose  $f = (I-N)u$ , on obtient

$$\begin{aligned}(I-N)Hu &= (I-N)[\sup(Gf, NGf)] \\ &= (I-N)[\sup(Gf, Gf-f)] \\ &= (I-N)[Gf+f^-] = f+(I-N)f^- \\ &= f^+ - Nf^-\end{aligned}$$

Considérons l'opérateur  $T : f \mapsto f^+ - N(f^-)$  : on peut alors écrire  $Hu = GT(I-N)u$ , et pour tout entier  $p$

$$H^p u = GT^p(I-N)u$$

Montrons que pour toute  $f$  mesurable bornée,  $\lim_{p \rightarrow \infty} T^p f = \phi$  existe,

et que  $0 \leq \phi \leq f^+$ ; le lemme en résultera aussitôt, car nous aurons

$$Ru = \lim_{p \rightarrow \infty} H^p u = G_N(\lim_{p \rightarrow \infty} T^p(I-N)u) = G_N \phi.$$

Or on a  $(Tf)^+ \leq f^+$ , et  $(Tf)^- \leq N(f^-)$ , de sorte que la suite  $(T^p f)^+$  est décroissante, et que pour tout  $p$   $(T^p f)^- \leq N^p(f^-)$ . Comme  $G(f^-)$  est bornée, on a  $\lim_{p \rightarrow \infty} N^p(f^-) = 0$ . Il en résulte aussitôt que  $T^p f$  converge vers une limite comprise entre 0 et  $f^+$ .

Les énoncés qui suivent sont des conséquences faciles ou des reformulations du lemme 2.

### THEOREME 3 .

Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux fonctions excessives bornées. Alors

$R(u_1 - u_2)$  et  $u_1 - R(u_1 - u_2)$  sont excessives (autrement dit  
 $R(u_1 - u_2) \leq u_1$ ).

DEMONSTRATION.

Posons  $(I-N)u_1 = f_1$ ,  $(I-N)u_2 = f_2$ ; les fonctions  $f_1, f_2$  sont positives, et  $u_1 = G_N f_1$ ,  $u_2 = G_N f_2$ . D'après le lemme précédent  $R(u_1 - u_2) = G_N \phi$  avec  $0 \leq \phi \leq (f_1 - f_2)^+ \leq f_1$ . Par suite  $u_1 - R(u_1 - u_2) = G_N(f_1 - \phi)$  qui est une fonction excessive.

COROLLAIRE 4 .

Soient  $u$  mesurable bornée,  $Ru$  sa réduite. Alors

$$\{(I-N)Ru > 0\} \subset \{u = Ru\}.$$

DEMONSTRATION.

Considérons la suite

$$u_0 = u, \quad u_{p+1} = \sup(u_p, Nu_p).$$

Soit  $x$  tel que  $Ru(x) > u(x)$ . Il existe un indice  $p$  tel que  $u_{p+1}(x) > u_p(x)$ . Or si  $u_p = G_N f_p$  on a  $u_{p+1} = u_p + f_p^-$ , donc  $f_p^-(x) > 0$ , et  $f_p^+(x) = 0$ . Par construction,  $Ru_p = Ru = G_N \phi$ , avec  $0 \leq \phi \leq f_p^+$ , d'où  $\phi(x) = 0$  et  $(I-N)Ru(x) = 0$ .

DEFINITION 5 .

On dira qu'une fonction mesurable  $u$  est portée par  $A \in \mathcal{B}$ , relativement à un cône  $S$ , si pour toute  $v \in S$

$$(v(x) \geq u(x) \text{ pour tout } x \in A) \Rightarrow (v \geq u) .$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, les mots "relativement à S" seront omis. Avec cette formulation, on voit que si  $A \in B$

$$(A \text{ porte } u) \Rightarrow (A \text{ porte } Ru) .$$

En effet  $(v \geq Ru \text{ sur } A) \Rightarrow (v \geq u \text{ sur } A) \Rightarrow (v \geq u) \Rightarrow (v \geq Ru)$  si  $v \in S$ .

Le corollaire précédent se comprend beaucoup mieux si on le formule ainsi :

COROLLAIRE 6 .

Pour toute u mesurable bornée, u et Ru sont portées par l'ensemble  $\{u = Ru\}$  .

DEMONSTRATION.

Rappelons que le noyau  $G_N$  satisfait au principe de domination : si f et g sont mesurables bornées  $\geq 0$

$$(G_N g(x) \geq G_N f(x) \quad \forall x \in \{f > 0\}) \Rightarrow (G_N g \geq G_N f)$$

ou encore (toute fonction excessive bornée étant un potentiel) :

$G_N f$  est portée par l'ensemble  $\{f > 0\}$  . Comme  $\{(I-N)Ru > 0\} \subset \{u = Ru\}$  , Ru est portée par  $\{u = Ru\}$  . Si  $v \in S$  majore u sur  $\{u = Ru\}$  , v majore Ru sur cet ensemble, et donc  $v \geq Ru \geq u$  partout.

Remarque 1 .

Il est intéressant de voir comment on peut utiliser le corollaire 4 pour montrer que  $G_N$  satisfait au principe de domination : soient  $f$  et  $g$  mesurables  $\geq 0$ , et supposons que

$$G_N g(x) \geq G_N f(x) \quad \text{pour } x \in \{f > 0\}$$

montrons que  $G_N g \geq G_N f$  .

Prenons  $\epsilon > 0$  et posons  $\phi_\epsilon = f - g - \epsilon$ , et  $R(G_N \phi_\epsilon) = G_N \psi_\epsilon$  .

On a  $G_N \phi_\epsilon(x) < 0$ , donc  $R(G_N \phi_\epsilon)(x) \neq G_N \phi_\epsilon(x)$ , pour tout  $x \in \{f > 0\}$ ,

et par conséquent  $\psi_\epsilon(x) = 0$  pour  $x \in \{f > 0\}$ . D'autre part,

$\psi_\epsilon \leq (f - g - \epsilon)^+$  : donc  $\psi_\epsilon = 0$ , et  $G_N \phi_\epsilon \leq 0$ , d'où enfin  $G_N g \geq G_N f$  .

Remarque 2.

On peut aussi montrer à l'aide du corollaire 4 que le cône  $S$  possède la propriété d'additivité des réduites (le raisonnement s'étend aux "cônes de potentiels" définis plus loin).

a) Pour tous  $u, v_1, v_2 \in S$  tels que  $u \leq v_1 + v_2$ , il existe une décomposition de  $u$  en  $u = u_1 + u_2$ , avec  $u_1 \in S$ ,  $u_2 \in S$ ,  $u_1 \leq v_1$ ,  $u_2 \leq v_2$  .

Il suffit de prendre  $u_1 = R(u - v_2)$  et  $u_2 = u - u_1$  (vérification facile).

b) Rappelons la notation, pour  $u \in S$ ,  $A \in \underline{B}$

$$R_u^A = R(u \cdot 1_A) = \inf\{v \in S : v \geq u \text{ sur } A\} .$$



De manière générale,  $R_{u_1+u_2}^A \leq R_{u_1}^A + R_{u_2}^A$  ; donc il existe d'après

a)  $v_1$  et  $v_2 \in S$  tels que

$$v_1+v_2 = R_{u_1+u_2}^A, \quad v_1 \leq R_{u_1}^A, \quad v_2 \leq R_{u_2}^A$$

On en tire facilement que  $v_1 = R_{u_1}^A$ ,  $v_2 = R_{u_2}^A$ .

Dans le cadre de cette étude, on est conduit à la définition suivante.

#### DEFINITION 7 .

On dira qu'un cône convexe  $S$  de fonctions mesurables positives finies sur  $(X, \underline{B})$  est un cône de potentiels s'il vérifie les propriétés suivantes

1°) Pour toute suite croissante  $(f_n) \subset S$ , majorée par un élément de  $S$ ,  $\sup_n f_n \in S$ .

2°) Pour tous  $u_1, u_2 \in S$ .

$$R(u_1-u_2) \in S \quad \text{et} \quad (u_1-R(u_1-u_2)) \in S$$

3°) Pour toute suite  $(u_n) \subset S$ , décroissante au sens de l'ordre ordinaire, spécifiquement majorée (c'est-à-dire majorée pour l'ordre défini par  $S$ ) par un élément de  $S$ , on a  $\inf_n u_n \in S$ .

On dira que  $S$  est enveloppant (pour les fonctions bornées) si on a  $R\phi \in S$  pour toute fonction  $\phi$  mesurable et bornée.

On n'exige pas que  $S$  soit stable par enveloppe inférieure.

PROPOSITION 8 .

Soit  $(C_n)$  une suite décroissante de cônes de potentiels,  
et soit  $C_\infty = \bigcap_n C_n$  . Pour  $n \leq +\infty$ , soit  ${}^nR$  l'opérateur de réduite relative  
relativement au cône  $C_n$  . Alors

1) Si  $u \in C_\infty - C_\infty$  ,  ${}^nRu$  croît avec  $n$  , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} {}^nRu =$

${}^\infty Ru$  , et  $\{u = {}^\infty Ru\} = \bigcap_n \{u = {}^nRu\}$  .

2)  $C_\infty$  est un cône de potentiels. Si tous les cônes  $C_n$  sont  
enveloppants, et si  $C_\infty$  contient une fonction majorant 1 ,  $C_\infty$  est  
aussi enveloppant, et on a  ${}^\infty Ru = \sup_n {}^nRu$  pour toute fonction mesurable  
bornée  $u$  .

3) Si tous les cônes  $C_n$  sont réticulés (pour leurs ordres  
propres)  $C_\infty$  est aussi réticulé .

DEMONSTRATION

Nous nous appuierons sur le lemme évident suivant :

soit  $(f_n)$  une suite décroissante, majorée par  $g \in C_\infty$  , telle que  
 $f_n \in C_n$  pour tout  $n$  . Alors on a  $\sup_n f_n \in C_\infty$  .

Soient  $u_1$  et  $u_2 \in C_\infty$  , et  $u = u_1 - u_2$  ; pour tout  $n < \infty$  ,  $C_n$   
 est un cône de potentiels, donc

$${}^nR(u_1 - u_2) \in C_n \quad \text{et} \quad v_n = u_1 - {}^nR(u_1 - u_2) \in C_n$$

La suite  ${}^nR(u_1 - u_2)$  est croissante, majorée par  $u_1 + u_2$ . On a donc  $\sup_n {}^nR(u_1 - u_2) \in C_\infty$  d'après le lemme, et cette fonction est évidemment égale à  ${}^\infty R(u_1 - u_2)$ . L'assertion 1) en découle, car  $u \leq {}^nRu \leq {}^\infty Ru$ .

Pour tout  $n$ , la suite  $(v_p)_{p \geq n}$  est contenue dans  $C_n$ , et  $u_1 - v_p = {}^pR(u_1 - u_2) \in C_n$ . D'après la propriété 3 des cônes de potentiels, on a  $v_\infty = \inf_p v_p \in C_n$ , donc  $v_\infty \in C_\infty$ . La vérification des autres propriétés des cônes de potentiels est immédiate.

3) Supposons tous les cônes  $C_n$  réticulés, et pour  $u_1, u_2 \in C_\infty$  soient

$$w_n = u_1 \vee u_2 \quad \text{et} \quad v_n = u_1 \wedge u_2$$

les enveloppes supérieure et inférieure de  $u_1$  et  $u_2$  dans  $C_n$ . La suite  $w_n$  est croissante, la suite  $v_n$  est décroissante. Par construction les fonctions  $w_\infty = \sup w_n$  et  $v_\infty = \inf v_n$  sont dans  $C_\infty$ . Soit  $w \in C_\infty$ , tel que  $(w - u_1) \in C_\infty$  et  $(w - u_2) \in C_\infty$ ; les cônes  $C_n$  étant réticulés on a  $(w - w_n) \in C_n$  pour tout  $n$ , donc aussi  $w - w_\infty = \inf_n (w - w_n)$ .

#### THEOREME 9 .

Soit  $C$  un cône de potentiels sur  $(X, \underline{B})$  et soit  $S \subset C$  un sous-cône convexe de  $C$ . Si  $S$  est un sous-cône héréditaire à gauche de  $C$ , et si l'enveloppe supérieure d'une suite croissante majorée d'éléments de  $S$  appartient à  $S$ , alors  $S$  est un cône de potentiels.

DEMONSTRATION:

Dire que  $S$  est héréditaire à gauche signifie que si  $u \in S$ ,  $u_1, u_2 \in C$  sont tels que  $u_1 + u_2 = u$ , alors  $u_1, u_2 \in S$ . Désignons respectivement par  $C_R$  et  $S_R$  les opérateurs de réduite par rapport aux cônes  $C$  et  $S$ . Pour  $u_1, u_2 \in S$ , on a

$$S_R(u_1 - u_2) \geq C_R(u_1 - u_2)$$

$$u_1 = C_R(u_1 - u_2) + (u_1 - C_R(u_1 - u_2)).$$

Ces deux fonctions appartiennent à  $C$ , leur somme est dans  $S$ , elles appartiennent donc à  $S$ . Il en résulte que  $S_R(u_1 - u_2) = C_R(u_1 - u_2)$ , et que  $S$  est un cône de potentiels (la propriété 3 des cônes de potentiels se vérifie immédiatement).

Cette technique de passage à la limite pour des cônes de potentiels est très fructueuse. En voici des applications

Exemple I. (Voir appendice).

Exemple II. Les notations seront celles de toute la seconde partie de l'exposé :

on se donne sur l'espace mesurable  $(X, \underline{B})$  une résolvante sousmarkovienne  $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$  telle que  $V = \sup_{\lambda} V_\lambda$  soit un noyau borné.

On désigne par  $B$  l'ensemble des fonctions réelles  $\underline{B}$ -mesurables bornées par  $B^+$  la partie positive de  $B$ . On introduit les notations suivantes :

- $C_\lambda = \{f \in B^+ ; \lambda V_\lambda f \leq f\}$
- $C_\infty = \bigcap_\lambda C_\lambda$  : c'est le cône des fonctions surmédianes bornées
- $S = \{f \in C_\infty ; f = \sup_\lambda \lambda V_\lambda f\}$  : c'est le cône des fonctions excessives pour la résolvante.
- ${}^\lambda R u = \inf\{v ; v \in C_\lambda, v \geq u\}$  , pour  $u \in B$  et  $\lambda \in ]0, +\infty]$
- $R u = \inf\{v ; v \in S, v \geq u\}$  , pour  $u \in B$
- $(f_1 \prec_\lambda f_2) \Leftrightarrow ((f_2 - f_1) \in C_\lambda)$  , pour  $f_1, f_2 \in B$  ,  $\lambda \in ]0, +\infty]$
- $(f_1 \prec f_2) \Leftrightarrow ((f_2 - f_1) \in S)$

D'après l'équation résolvante, on a  $(I + \lambda V) = (I - \lambda V_\lambda)^{-1} = G_{\lambda V_\lambda}$  donc le noyau  $\lambda V_\lambda$  a un potentiel borné. Les cônes  $C_\lambda$  sont donc des cônes de potentiels réticulés, enveloppants, stables par enveloppe inférieure dénombrable. Montrons que  $(\lambda < \mu) \Rightarrow (C_\mu \subset C_\lambda)$  . En effet l'équation résolvante

$$V_\lambda - V_\mu = (\mu - \lambda) V_\lambda V_\mu$$

donne

$$\mu V_\mu - \lambda V_\lambda = (\mu - \lambda) V_\lambda [I - \mu V_\lambda]$$

de sorte que pour  $\lambda < \mu$  et  $f \in C_\mu$  on a

$$\mu V_\mu f \leq f \text{ et } \lambda V_\lambda f \leq \mu V_\mu f, \text{ donc } f \in C_\lambda .$$

Le cône  $C_\infty$  des fonctions surmédianes est donc l'intersection d'une suite décroissante de cônes de potentiels réticulés et enveloppants : c'est donc aussi un cône de potentiels réticulé et enveloppant.

D'autre part, le cône  $S$  des fonctions excessives est héréditaire à gauche dans  $C$ , fermé pour les limites de suites croissantes : c'est donc un cône de potentiels réticulé (mais il n'est pas stable par enveloppe inférieure en général, contrairement à  $C$ ).

\*

### III. CALCUL DES DENSITÉS

\*

#### Régularisation des fonctions surmédianes et applications.

Nous utilisons dans toute la suite les notations de l'exemple II précédent.

#### DEFINITION 10 .

On dira qu'un exemple  $A \in \underline{B}$  est V-négligeable si  $V(1_A) = 0$ . On dira qu'une propriété a lieu V-presque partout (V.p.p.) si elle a lieu sauf sur un ensemble V-négligeable.

La réunion d'une suite de parties V-négligeables est V-négligeable.

Le résultat suivant est bien connu : cf. Meyer [1] .

LEMME

Soit  $u$  une fonction surmédiane, et soit  $\hat{u} = \sup_{\lambda} \lambda V_{\lambda} u$  sa régularisée excessive. Alors  $u = \hat{u}$  V-presque-partout.

Pour toute fonction  $f \in B$ , posons

$$Tf = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup \lambda V_{\lambda} f$$

L'opérateur  $T$  est sous-linéaire. On remarquera que  $Tf \in B$  (la  $\lim \sup$  peut se calculer pour  $\lambda$  rationnel). Considérons le cône

$$\Gamma = \{f \in B ; Tf \leq f \text{ V-presque partout}\}$$

PROPOSITION 11.

- 1) Le cône convexe  $\Gamma$  contient l'espace vectoriel réticulé  $H = C_{\infty} - C_{\infty}$ .
- 2) Pour toute suite  $(f_n)$  d'éléments de  $\Gamma$ , bornée inférieurement, on a  $\inf_n f_n \in \Gamma$ .
- 3)  $\Gamma$  est fermé dans  $B$  pour la convergence uniforme.

DEMONSTRATION.

1) Il est clair que si  $u \in B$  est telle que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V_{\lambda} u = u$  V-pp (en particulier si  $u \in C_{\infty}$ , ou  $u \in H$ ), et si  $v \in \Gamma$ , on a  $u+v \in \Gamma$ ,  $T(u+v) = Tu + Tv$  V-pp. Il en résulte aussitôt que  $H \subset \Gamma$ .

2) Tous les opérateurs  $V_{\lambda}$  sont positifs, donc croissants sur  $B$  ordonné par  $B^+$ , par suite  $T$  est aussi croissant. Soit  $(f_n)$  une suite (finie ou infinie) d'éléments de  $\Gamma$ , et soit  $f = \inf_n f_n$ .

On a  $V$ -pp.

$$Tf \leq \inf_n Tf_n \leq \inf_n f_n = f$$

donc  $f \in \Gamma$ .

3) Les noyaux  $\lambda V_\lambda$  étant sousmarkoviens, la fonction 1 est surmédiane, et donc  $0 \leq T1 = \lim \lambda V_\lambda 1 \leq 1$ . Les relations  $f \in B$ ,  $g \in B$ ,  $f - \epsilon \leq g \leq f + \epsilon$  entraînent donc  $Tf - \epsilon \leq Tg + \epsilon$   $V$ -pp., ou  $|Tf - Tg| \leq \epsilon$ . La propriété 3 en résulte aussitôt.

Pour comprendre l'intérêt du cône convexe  $\Gamma$ , disons qu'il remplace dans ce cadre d'espace mesurable  $(X, \underline{B})$  le cône des fonctions semi-continues supérieurement sur un espace topologique.

La proposition qui suit est l'outil essentiel de ce travail.

#### PROPOSITION 12.

Soient  $w \in C$  et  $u = V1 - w$ . La fonction  $Ru$  est excessive,  
et  $Ru$  est portée par l'ensemble  $\{u = Ru\}$  au sens suivant :

$$Ru \leq V(1_{\{u=Ru\}})$$

#### DEMONSTRATION.

Nous avons vu plus haut (exemple II) que  $I + \lambda V = G_{\lambda V_\lambda}$ , et l'équation résolvante donne  $u = (I + \lambda V)(u - \lambda V_\lambda u)$ . Nous pouvons donc poser

$$\lambda_{Ru} = \left(\frac{1}{\lambda} I + V\right) \phi_\lambda$$



avec  $0 \leq \phi_\lambda \leq \lambda(u - \lambda V_\lambda u)^+ \quad (\text{Lemme 2})$

$$\{\phi_\lambda > 0\} \subset \{u = {}^\lambda R u\} = A_\lambda \quad (\text{Corollaire 4})$$

Comme  $u = V1 - w$ , on a  $\lambda(u - \lambda V_\lambda u) \leq 1$ , donc  $\phi_\lambda \leq 1_{A_\lambda}$ , et donc pour tout  $\lambda > 0$

$${}^\lambda R u + h_\lambda = \left( \frac{1}{\lambda} I + V \right) 1_{A_\lambda} \quad (h_\lambda \in C_\lambda)$$

Faisons tendre  $\lambda$  vers  $+\infty$ , par valeurs entières, et posons  $\liminf h_\lambda = h$ ;  $h$  est surmédiane,  ${}^\lambda R u$  tend en croissant vers  ${}^\infty R u = R u$ ,  $A_\lambda$  tend en décroissant vers  $\{u = R u\}$  (prop. 8), et il vient donc bien que  $R u \leq V(1_{A_\lambda})$ .

### DEFINITION 13

On appellera opérateur de dérivation de la famille résol-  
vante  $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$  l'opérateur  $D$  défini sur  $B$  par

$$Df = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup \lambda(f - \lambda V_\lambda f)$$

### Propriétés de l'opérateur de dérivation

- 1) Si  $w$  est surmédiane, on a  $Dw \geq 0$ .
- 2) Si  $(v_1 - v_2)$  est surmédiane, on a  $Dv_1 \geq Dv_2$ .
- 3) Si  $\lambda > 0$ ,  $D(\lambda w) = \lambda Dw$ .
- 4) Si  $v_1, v_2 \in B$ , on a  $D(v_1 + v_2) \leq Dv_1 + Dv_2$  (si le second membre a un sens)

5) Si  $w = V\phi$ , d'après l'équation résolvante,  $DV\phi = \limsup \lambda V_\lambda \phi = T\phi$ .

6) Pour toute  $\phi \in B$ ,  $D\phi$  est mesurable. En effet, l'application  $\lambda \mapsto \lambda(\phi - \lambda V_\lambda \phi)$  est continue pour la convergence uniforme dans  $B$ , et la limite peut donc être calculée le long des rationnels.

La suite de théorèmes qu'on va lire maintenant conduit aux résultats suivants : pour toute fonction surmédiane  $w$ , on a

$$VDw \leq w$$

et pour toute fonction excessive  $u$  telle que  $u \leq V\phi$  ( $\phi \geq 0$ ), on a

$$VDu = u.$$

#### THEOREME 14 .

Soit  $u = u_1 - u_2$ , où  $u_1$  est surmédiane, et où  $u_2 = V\phi$ ,  $0 \leq \phi \leq 1$ . La relation  $Du \geq 0$  V-p.p. entraîne que  $u$  est surmédiane.

La démonstration s'appuie sur le lemme suivant :

#### LEMME.

Avec les notations précédentes, soit  $h \geq 0$ ,  $h \in \Gamma$  (c'est-à-dire  $h \in B$ ,  $\limsup \lambda V_\lambda h = Th \leq h$  V-p.p.). Si  $u(x) \geq Vh(x)$  sur l'ensemble  $\{h > 0\}$ , alors  $u \geq Vh$ .

# DEMONSTRATION

Si l'on n'a pas  $u \geq V_h$ , il existe  $y \in X$ ,  $\lambda > 0$ , tels que  $(V_h - u - \lambda V_1)(y) > 0$ . La fonction  $t = V_h - u - \lambda V_1$  s'écrit aussi

$$t = V(h + \phi) - u_1 - \lambda V_1 = V(k) - [V(k - (h + \phi)) + u_1 + \lambda V_1]$$

où  $k = \sup(h + \phi)$ , de sorte que  $R_t$  est excessive,  $\neq 0$ , et que

$$R_t \leq V(h + \phi) \quad R_t \leq k V(1_{\{t=R_t\}})$$

On a partout  $V_h - \lambda V_1 - R_t \leq u$ , et  $(V_h - \lambda V_1 - R_t)(x) = u(x)$  pour tout  $x \in A = \{t = R_t\}$ . On en tire, pour  $x \in A$

$$Du(x) \leq D(V_h - \lambda V_1)(x) = T(h - \lambda)(x) = Th(x) - T\lambda(x).$$

L'ensemble  $A$  n'est pas  $V$ -négligeable puisque  $R_t \neq 0$  et les ensembles  $\{T\lambda < \lambda\}$ ,  $\{Th > h\}$ ,  $\{V_1 = 0\}$ ,  $\{Du < 0\}$  sont  $V$ -négligeables. Il existe donc  $x_0 \in A$  tel que

- a)  $Du(x_0) \geq 0$
- b)  $T\lambda(x_0) = \lambda$
- c)  $Th(x_0) \leq h(x_0)$
- d)  $V_1(x_0) > 0$

Comme  $R_t = t$  en  $x_0$ , on a  $t(x_0) = R_t(x_0) \geq 0$ , donc  $(V_h - u - \lambda V_1)(x_0) \geq 0$ , donc  $V_h(x_0) > u(x_0)$  d'après d); comme  $u$  majore  $V_h$  sur  $\{h > 0\}$  par hypothèse, on a donc  $h(x_0) = 0$ , donc  $Th(x_0) = 0$  d'après c), et  $Th(x_0) - T\lambda(x_0) = -\lambda$  d'après b), donc  $Du(x_0) \leq -\lambda$ , en contra-

diction avec a). Le lemme est prouvé.

# DEMONSTRATION DU THEOREME.

On reprend la démonstration de Meyer [1] . On a  $\lambda V_\lambda u = V(\lambda(u - \lambda V_\lambda u))$  , posons donc  $\theta_\lambda = \lambda(u - \lambda V_\lambda u)$  . Les fonctions  $\theta_\lambda^+, \theta_\lambda^-$  sont dans  $\Gamma$  , on a  $D(u + V\theta_\lambda^-) \geq Du \geq 0$  , et

$$(u + V\theta_\lambda^-)(x) \geq V\theta_\lambda^+(x) \text{ pour tout } x \in \{\theta_\lambda^+ > 0\} .$$

On peut donc appliquer le lemme précédent, qui nous donne

$$u + \theta_\lambda^- \geq V\theta_\lambda^+ , \text{ ou encore } u \geq \lambda V_\lambda u .$$

# THEOREME 15.

Pour toute fonction surmédiane finie u , on a  $VDu \leq_\infty u$  .

# DEMONSTRATION.

Soit d'abord  $h \in \Gamma$  ,  $0 \leq h \leq Du$  . On a  $Du \leq D(u - Vh) + DVh$  , d'où  $D(u - Vh) \geq Du - DVh = Du - Th$  ; mais  $Th \leq h$  V-presque partout, d'où  $D(u - Vh) \geq Du - h \geq 0$  V-p.p., et le théorème précédent nous donne

$$\text{si } h \in \Gamma , 0 \leq h \leq Du , \text{ on a } u \geq_\infty Vh .$$

Nous allons en déduire que  $u \geq_\infty V(\inf(n, Du))$  pour tout n , et ceci entraînera le théorème.

Considérons  $x \in X$  ; nous allons approcher  $\inf(n, Du)$  dans l'espace  $L^1(\epsilon_x V)$  . Posons  $D_\lambda u = \lambda(u - \lambda V_\lambda u)$  pour  $\lambda$  rationnel ; nous avons  $Du = \lim_{u \rightarrow \infty} \sup_{\lambda \geq \mu} D_\lambda u$  , d'où la même relation pour les

d'où la même relation pour les  $\inf(n, Du)$ ,  $\inf(n, D_\lambda)$  ; nous pouvons trouver (la mesure  $\epsilon_x V$  étant bornée) des fonctions de la forme  $n \wedge (D_{\lambda_1} u \vee D_{\lambda_2} u \dots \vee D_{\lambda_k} u)$  qui approchent  $n \wedge Du$  dans  $L^1(\epsilon_x V)$ . Par extraction, nous pouvons construire une suite  $(f_p)$  de fonctions de ce type qui converge simplement vers  $n \wedge Du$  en dehors d'un ensemble  $\epsilon_x V$ -négligeable. Toutes les fonctions  $f_p$  appartenant à  $\Gamma$ , il en est de même des fonctions  $h_p = \inf_{m \geq p} f_m$ , qui convergent en croissant vers  $\inf(n, Du) \epsilon_x V$ -p.p.

Nous avons d'autre part,  $\limsup f_m \leq n \wedge Du$  partout, d'après la forme de ces fonctions, et donc aussi  $h_p \leq Du$  partout. Par conséquent,  $(u - Vh_p)$  est surmédiane. De l'équation résolvante  $V = V_\lambda + \lambda V_\lambda V$ , on tire  $\epsilon_x V \geq \epsilon_x (\lambda V_\lambda) V$ , donc les  $h_p$  convergent vers  $n \wedge Du(\epsilon_x \lambda V_\lambda V)$ -p.p., et

$$\langle \epsilon_x \lambda V_\lambda V, \inf(n, Du) \rangle \geq \sup_p \langle \epsilon_x \lambda V_\lambda V, h_p \rangle$$

d'autre part,  $u - Vh_p$  étant surmédiane

$$\langle \epsilon_x \lambda V_\lambda, u - Vh_p \rangle \leq \langle \epsilon_x, u - Vh_p \rangle$$

Faisons tendre  $p$  vers  $+\infty$  dans cette formule, il vient

$$\langle \epsilon_x \lambda V_\lambda, u - V(\inf(n, Du)) \rangle \leq \langle \epsilon_x, u - V(\inf(n, Du)) \rangle$$

donc  $u - V(\inf(n, Du))$  est surmédiane, et le théorème est prouvé.

COROLLAIRE 16

Soit  $\phi$  une fonction mesurable positive telle que  $V\phi$  soit fini. Alors  $V\phi = VDV\phi$ .

DEMONSTRATION

Nous savons que  $VDV\phi \leq V\phi$ , il suffit de montrer l'inégalité inverse. Commençons par supposer  $\phi \in B^+$ .

On a  $V\phi = (V + \frac{1}{\lambda} I)\lambda V_\lambda \phi$ ; dans le cône convexe  $C_\lambda$ , on a donc

$$V\phi \leq (V + \frac{1}{\lambda} I) \left[ \sup_{\mu \geq \lambda} \mu V_\mu \phi \right]$$

Notons  $u_\lambda$  le second membre; l'application  $\lambda \mapsto u_\lambda$  est décroissante, et  $VDV\phi = \inf_\lambda u_\lambda$ . Ecrivons  $u_\lambda = V\phi + h_\lambda$  ( $h_\lambda \in C_\lambda$ ), faisons tendre  $\lambda$  vers  $+\infty$  par valeurs entières, posons  $h = \liminf h_\lambda \in C_\infty$ , il vient  $VDV\phi = h + V\phi$ , d'où  $VDV\phi \geq V\phi$ .

Passons au cas général: nous avons  $V(\phi \wedge n) = V(DV(\phi \wedge n)) < VDV\phi$ , d'après ce qui précède, donc  $V\phi \leq VDV\phi$ .

COROLLAIRE 17.

Pour toute fonction mesurable positive  $\phi$ , telle que  $V\phi$  soit finie,  $\lambda V_\lambda \phi$  converge simplement V-p.p. vers  $DV\phi (= T\phi)$  si  $\phi \in B^+$ .

DEMONSTRATION

Commençons par le cas où  $\phi \in B^+$ : supposons  $0 \leq \phi \leq 1$ , et

posons  $\phi' = 1 - \phi$ . On a  $\limsup \lambda V_\lambda \phi = T\phi$  et

$$\liminf \lambda V_\lambda \phi = T1 - T\phi'$$

donc  $V(\overline{\lim} - \underline{\lim}) = V(T\phi - T1 + T\phi') = V\phi - V1 + V\phi' = 0$ .

Passons au cas général : nous savons d'après le corollaire 17 que

$$V(\limsup \lambda V_\lambda \phi) = V(DV\phi) = V\phi$$

il nous suffit donc de démontrer que  $V(\liminf \lambda V_\lambda \phi) \geq V\phi$ , car il en résulte aussitôt que  $V(\overline{\lim} - \underline{\lim}) = 0$ . Or soit  $\phi_n = \inf(\phi, n)$ . On a

$$V(\liminf \lambda V_\lambda \phi) \geq V(\lim \lambda V_\lambda \phi_n) = V\phi_n$$

d'après le cas particulier, d'où le résultat cherché lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

#### COROLLAIRE 18

Soit  $\phi \geq 0$  mesurable telle que  $V\phi$  soit partout fini,  
et soient  $u_1, u_2$  des fonctions excessives telles que  $u_1 + u_2 = V\phi$ .  
Alors on a  $u_1 = DVu_1, u_2 = DVu_2$ .

#### DEMONSTRATION.

On a  $DVu_1 \leq u_1, DVu_2 \leq u_2$ , mais d'autre part  $DV\phi \leq Du_1 + Du_2$   
 et donc

$$u_1 + u_2 = \phi = DV\phi \leq V(Du_1 + Du_2)$$

donc  $u_1 = DVu_1, u_2 = DVu_2$ .

COROLLAIRE 19

Pour toute fonction surmédiane  $u$  ,  $\lambda(u - \lambda V_\lambda u)$  converge  
simplement V-p.p. (vers  $Du$ ) lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

DEMONSTRATION.

D'après le théorème 15, pour toute fonction surmédiane  $u$ , l'ensemble  $\{Du = +\infty\}$  est V-négligeable. D'autre part, pour toute  $\phi \in B^+$  telle que  $V\phi \leq u$  on a  $DV\phi \leq Du$ , donc  $V\phi = VD V\phi \leq V Du$  :  $V Du$  est donc la borne supérieure des potentiels de fonctions  $Vh \leq u$ , et la relation  $Vh \leq u - V Du$  entraîne  $h=0$  V-p.p. Par conséquent  $D(u - V Du) = 0$  V-p.p. Autrement dit, le corollaire est établi pour  $u - V Du$ , et il suffit de le prouver pour  $V Du$ . Or il est vrai que si  $v$  est un potentiel de fonction  $V\phi$ ,  $\lambda(v - \lambda V_\lambda v) = \lambda V_\lambda \phi$  converge simplement lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$  (corollaire 17).

Pour terminer, donnons une extension du corollaire 4.

THEOREME 20.

Soient  $u_1, u_2$  des fonctions excessives telles que  $u_1 \leq V1$ ,  
et soit  $u = u_1 - u_2$ . Alors  $DRu = 0$  V-presque partout dans l'ensemble  
 $\{Ru > u\}$ .

DEMONSTRATION.

Posons  $v_1 = Ru + u_2 + 1$ ,  $v_2 = u + u_2 + 1$ . Les fonctions  $v_1, v_2$  sont surmédianes et  $\{v_1 = v_2\} = \{u = Ru\}$ . Pour tout  $x \notin \{Ru = u\}$ ,



il existe  $\lambda, \mu > 0$ ,  $\lambda < \mu$ , tels que

$$\mu v_2(y) - \lambda v_1(y) \geq 1 \text{ pour tout } y \in \{Ru=u\}$$

(il suffit pour cela que  $\mu - \lambda \geq 1$ ) et que

$$\mu v_2(x) - \lambda v_1(x) < 0 \text{ (dès que } \mu/\lambda \text{ est assez voisin de } 1) .$$

Posons d'une manière générale  $h_{\lambda, \mu} = \inf (1, (\mu v_2 - \lambda v_1)^+)$ . Il résulte de ce qui précède que  $1_{\{Ru=u\}}$  est l'enveloppe inférieure des fonctions  $h_{n, n+1}$ ; chacune de ces fonctions appartenant à  $\Gamma$ , on a aussi  $1_{\{Ru=u\}} \in \Gamma$ . Comme  $Ru < V(1_{\{Ru=u\}})$  (prop. 12), on a  $DRu \leq DV(1_{\{Ru=u\}}) = T(1_{\{Ru=u\}}) \leq 1_{\{Ru=u\}}$  V-p.p. . Le théorème est établi.

#### COROLLAIRE 21.

On suppose de plus que l'enveloppe inférieure de deux fonctions excessives est une fonction excessive. Avec les hypothèses du théorème précédent, on a  $DRu = 0$  dans l'ensemble  $\{Ru > u\}$ .

#### DEMONSTRATION.

Dans le raisonnement précédent, remplaçons  $v_1$  et  $v_2$  par

$$w_1 = Ru + u_2 + T1, \quad w_2 = u + u_2 + T1.$$

Pour tout  $x \notin \{Ru=u\}$ , on a comme plus haut, pour  $\lambda, \mu$  bien choisis

$$\mu w_2(y) - \lambda w_1(y) \geq 1 \text{ pour } y \in \{Ru=u\} \cap \{T1=1\}$$

$$\mu w_2(x) - \lambda w_1(x) \leq 0$$

Posons encore  $h_{\lambda, \mu} = (\mu w_2 - \lambda w_1)^+$ , et  $\phi = \inf_n h_{n, n+1}$ ; nous avons ici

$$1_{\{Ru=u\} \cap \{Tl=1\}} \leq \phi$$

d'autre part, comme  $\{Tl < 1\}$  est V-négligeable,  $Ru \leq V(1_{\{Ru=u\} \cap \{Tl=1\}})$ .

Enfin, on a  $Th_{\lambda, \mu} = h_{\lambda, \mu}$ , car  $h_{\lambda, \mu}$  est une différence de fonctions excessives d'après l'hypothèse, donc  $T\phi \leq \phi$  partout.

La relation  $Ru \leq V\phi$  entraîne alors  $DRu \leq DV\phi = T\phi \leq \phi$ , donc  $DRu = 0$  dans  $\{\phi = 0\}$ , qui contient  $\{Ru > u\}$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] P.A. MEYER. Probabilités et potentiel. Hermann, Paris.
- [2] G. MOKOBODZKI . Densité relative de deux potentiels comparables sans ultrafiltres rapides. Séminaire d'Analyse.  
(G. CHOQUET), 1968-69, exposé n°1 .

\*\*\* \*\*