Bernard Maisonneuve
Philippe Morando

Temps locaux pour les ensembles régénératifs

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 4 (1970), p. 151-161
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__151_0>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

Laboratoire Associé au C.N.R.S.

Rue René Descartes

STRASBOURG

1969-70

- Séminaire de Probabilités -

TEMPS LOCAUX POUR LES ENSEMBLES RÉGÉNÉRATIFS.

par

B. MAISONNEUVE et Ph. MORANDO

Cet exposé constitue une rédaction détaillée de la note [2] et fait suite à l'exposé de P.A. MEYER intitulé : Ensembles régénératifs, d'après Hoffmann-Jørgensen. Après avoir repris brièvement les résultats de cet exposé, nous établissons l'existence d'un "temps local" pour un ensemble régénératif parfait d'intérieur vide. Il en résulte alors que l'ensemble régénératif coïncide (à peu près) avec l'image d'un subordinateur tué à un temps exponentiel.

I. NOTATIONS - RAPPELS.

Nous dirons d'une fonction continue à droite ω de $\bar{R}_+$ dans $\bar{R}_+$ est une fonction en dents de scie, si l'ensemble $M(\omega) = \{t : \omega(t) = 0\}$ est un fermé de R_+ , si de plus la fonction ω est linéaire de pente 1 dans tout intervalle contigu à $M(\omega)$ et si $\omega(+\infty) = +\infty$. La fonction constante égale à $+\infty$ sera également appelée fonction en dents de scie et notée ω_∞ .

Désignons par Ω l'ensemble de toutes les fonctions en dents de scie. Posons $A_t(\omega) = \omega(t)$ pour tout t de $\bar{R}_+$ et tout ω de Ω . Soit $\mathcal{F}_t^o$ la tribu engendrée sur Ω par les fonctions A_s , $s \leq t$ (nous noterons

$\mathfrak{F}^o$ la tribu $\mathfrak{F}^o_\infty$) . L'ensemble Ω est encore muni d'opérateurs de translation θ_t de la manière habituelle : $A_s(\theta_t\, \omega) = A_{s+t}(\omega)$ pour tous s et t de $\overline{R}_+$ et tout ω de Ω .

Notons que si $0 \in M(\omega)$ nous avons la relation :

$$A_t(\omega) = t - \sup \{s : s \leq t \text{ , } s \in M(\omega)\} \quad .$$

Remarquons que l'on peut associer de manière unique à tout fermé F de R_+ contenant 0 une fonction en dents de scie f telle que $F = \{f = 0\}$. Nous définirons donc un <u>fermé aléatoire canonique</u> (contenant 0) par la donnée d'une loi P sur $(\Omega \text{ , } \mathfrak{F}^o)$ telle que $A_o = 0$ p.s. . Nous dirons que le fermé aléatoire est <u>régénératif</u> si, pour tout temps d'arrêt T de la famille $\mathfrak{F}^o_{t+}$ tel que $T(\omega) \in M(\omega)$ p.s. sur l'ensemble $\{T < \infty\}$, tout $A \in \mathfrak{F}^o_{T+}$ contenu dans $\{T < \infty\}$ et tout $B \in \mathfrak{F}^o$ on a :

$$P(A \cap \theta_T^{-1} B) = P(A)\, P(B) \quad .$$

Nous nous limiterons ici aux seuls ensembles régénératifs donnant lieu à une notion de temps local intéressante : ceux pour lesquels $M(\omega)$ est p.s. un ensemble <u>parfait d'intérieur vide</u>. Voici alors un sommaire des résultats obtenus par Hoffmann-Jørgensen :

a) Posons pour tout $x \in \overline{R}_+$ $T_x = \inf \{t > 0 : A_t = x\}$. T_x est un temps d'arrêt de la famille $(\mathfrak{F}_{t+})$ ($\mathfrak{F}_t$ est la tribu engendrée par $\mathfrak{F}^o_t$ et les ensembles P-négligeables de $\mathfrak{F}^o$) . Il existe $c \in \,]0 \text{ , } \infty]$ tel que $x < c$ entraîne $T_x < \infty$ p.s. et $x \geq c$ entraîne $T_x = \infty$ p.s. .

b) Pour tout borélien B de $\overline{R}_+$, posons

$$\begin{aligned} P_t(x,B) &= P\{A_{T_x+t} \in B\} \quad \text{si } x \in [0,c[\\ &= I_B(x+t) \qquad \text{si } x \notin [0,c[\quad . \end{aligned}$$

Alors $(P_t)_{t\in\overline{R}_+}$ est un semi-groupe de Markov fellérien pour la topologie droite de $\overline{R}_+$. En particulier le semi-groupe (P_t) transforme les fonctions boréliennes en fonctions boréliennes et possède des versions fortement markoviennes à trajectoires continues à droite.

c) Le processus $(A_t)_{t\in\overline{R}_+}$ est pour la loi P un processus de Markov en dents de scie, issu de 0 et admettant (P_t) comme semi-groupe de transition. Il satisfait de plus la propriété de Markov forte par rapport à la famille $(\mathcal{F}_{t+})$.

II. CONSTRUCTION DU TEMPS LOCAL.

Nous allons commencer par construire une réalisation de semi-groupe (P_t) : posons pour tout $F \in \mathcal{F}^o$:

$$\begin{aligned} P^x(F) &= P\{\theta_{T_x}^{-1}(F)\} && \text{si } 0 < x < c \\ &= I_F(\omega_x) && \text{si } x \geq c \end{aligned}$$

où ω_x désigne la fonction $t \to x + t$.

Soit f une fonction borélienne bornée de $\overline{R}_+$. La relation $E^x(f \circ A_{s+t} \mid \mathcal{F}^o_s) = P_t(A_s, f)$ P^x p.s. résulte, pour $x < c$, de ce que (A_{T_x+t}) est un processus de Markov adapté à la famille de tribus $(\mathcal{F}_{T_x+t})$, et pour $x \geq c$, de ce que les deux membres sont égaux P^x p.s. à $f(x + s + t)$. Par suite, (A_t) est pour toute loi P^x un processus de Markov admettant (P_t) comme semi-groupe de transition et issu du point x. Comme de plus $P^{\bullet}(F)$ est une fonction borélienne pour tout F de $\mathcal{F}^o$, le système $(\Omega, \mathcal{F}^o, \mathcal{F}^o_t, A_t, P^x)$ constitue une réalisation continue à droite du semi-groupe (P_t).

Les notations suivantes seront fondamentales pour la suite : posons sur Ω et pour tout $x \in \overline{R}_+$

$$S = \inf(t > 0 : A_t = 0)$$

$$R_x = \inf(t > 0 : A_{T_x+t} = 0) = S \circ \theta_{T_x}$$

(on a $R_x = +\infty$ sur $\{T_x = \infty\}$) .

On a alors $E(e^{-R_x}) = E^x(e^{-S})$ et nous noterons $\phi(x)$ cette fonction sur $\overline{R}_+$.

Remarquons que $\phi(0) = 1$

$0 < \phi(x) < 1$ si $0 < x < c$

$\phi(x) = 0$ si $x \geq c$.

Proposition 1.:

a) ϕ est une fonction continue à droite sur $\overline{R}_+$.

b) ϕ est uniformément 1-excessive pour le semi-groupe (P_t) .

Démonstration :

a) Il suffit de démontrer que l'application $x \to R_x$ est P p.s. continue à droite. La continuité en tout point $x > 0$ résulte de celle de l'application $x \to T_x$ et de la relation $T_x + R_x = T_y + R_y$ vraie pour $x > 0$ et tout $y > x$ assez voisin de x .

Passons au cas $x = 0$: soit $\varepsilon > 0$ et $\delta(\varepsilon) = \sup\limits_{0\leq s\leq\varepsilon} A_s$. La variable $\delta(\varepsilon)$ est p.s. strictement positive, car $M(\omega)$ est p.s. un ensemble parfait d'intérieur vide contenant 0 . Or $R_y < \varepsilon$ dès que $y < \delta(\varepsilon)$, d'où la continuité p.s. de R_x au point 0 .

b) La démonstration de ce deuxième point est classique : la fonction ϕ est 1-surmédiane à cause de l'inégalité $t + S \circ \theta_t \geq S$ et de la propriété de Markov ; elle est 1-excessive car on a de plus $\lim\limits_{t\to 0} (t + S \circ \theta_t) = S$. Enfin, elle est uniformément 1-excessive, car, étant donnés $\varepsilon > 0$, et $\delta > 0$ choisi de façon que

$$P_t^1\,\phi(0) \leq \phi(0) \leq P_t^1\,\phi(0) + \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad t \leq \delta$$

nous avons aussi pour tout $t \leq \delta$:

$$P_t^1\,\phi \leq \phi = P_S^1\,\phi \leq P_S^1\,(P_t^1\,\phi + \varepsilon) \leq P_t^1\,\phi + \varepsilon$$

puisque la mesure $P_S^1(x\,,\,dy)$ est concentrée en $\{0\}$.

<u>Proposition 2</u> : $Z_t = e^{-t}\,\phi \circ A_t$ est une surmartingale par rapport aux tribus $\mathcal{F}_t^o$ positive continue à droite et régulière.

<u>Démonstration</u> : Le processus (Z_t) est une surmartingale car ϕ est 1-surmédiane. La continuité à droite de (Z_t) résulte de ce que ϕ est continue à droite et de ce que, si t_n décroît vers t , A_{t_n} admet pour limite A_t en finissant par rester supérieur à A_t .

Etablissons maintenant la régularité de la surmartingale (Z_t) : soit T_n une suite croissante de temps d'arrêt, dont la limite T est p.s. finie. Nous voulons montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} E(Z_{T_n}) = E(Z_T)$.

Pour cela il suffit de montrer que

$$\lim_n E(\phi \circ A_{T_n}) = E(\phi \circ A_T)$$

ou encore que

$$\lim_n E(U_p\,\phi \circ A_{T_n}) = E(U_p\,\phi \circ A_T) \quad , \text{ pour tout } p > 0 \ ,$$

puisque, ϕ étant uniformément 1-excessive, $q\,U_{q+1}\,\phi$ converge uniformément vers ϕ lorsque $q \to +\infty$.

La fonction $U_p\,\phi = \int_0^\infty e^{-pt}\,P_t\,\phi\,dt$ est continue à droite, car le semi-groupe (P_t) transforme les fonctions bornées continues à droite en fonctions bornées continues à droite. De la même façon que pour le processus $(\phi \circ A_s)$ on montre donc que $(U_p\,\phi \circ A_s)$ est un processus continu à droite.

On peut donc appliquer le théorème d'arrêt de Doob à la martingale $e^{-ps}\, U_p\, \phi \circ A_s + \int_0^s e^{-pu}\, \phi \circ A_u\, du$ et au temps d'arrêt T_n :

$$e^{-p\,T_n}\, U_p\, \phi \circ A_{T_n} = E\,[\int_{T_n}^{\infty} e^{-pu}\, \phi \circ A_u\, du \mid \mathcal{F}_{T_n}\,]$$

d'où

$$E\,[U_p\, \phi \circ A_{T_n}\,] = E\,[\int_{T_n}^{\infty} e^{-p(u-T_n)}\, \phi \circ A_u\, du] \quad .$$

Lorsque $n \to \infty$ le second membre converge alors vers $E\,[\int_T^{\infty} e^{-p(u-T)}\, \phi \circ A_u\, du]$, par application du théorème de Lebesgue, et ce dernier terme vaut $E[U_p\, \phi \circ A_T]$.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir l'existence du "temps local" de l'ensemble régénératif.

<u>Théorème 1</u> : Il existe une fonctionnelle additive continue parfaite (L_t) adaptée à $(\mathcal{F}_t^o)$, unique, telle que :

$$\phi(x) = E^x[\int_0^{\infty} e^{-s}\, dL_s] \quad .$$

<u>Démonstration</u> :

1) D'après le théorème de décomposition de Doob, le potentiel régulier et borné (Z_t) est, pour la loi P , engendré par un processus croissant continu (B'_t) adapté à la famille $(\mathcal{F}_t)$. La démonstration de T 37 de Meyer [3] ch. VII nous montre de plus que $\sup_t \mid B_t^{(h)} - B'_t \mid$ converge en probabilité vers 0 lorsque $h \to 0$, où l'on a posé pour $h > 0$

$$B_t^{(h)} = \int_0^t e^{-s}\, \frac{\phi - P_h\, \phi}{h} \circ A_s\, ds \quad .$$

Il existe alors une suite (h_n) tendant vers 0 telle que $\lim_{n\to\infty} \sup_t |B_t^{(h_n)} - B'_t| = 0$ en dehors d'un ensemble P-négligeable N .

Posons $B_t = \lim_{n\to\infty} B_t^{(h_n)}$ sur l'ensemble de convergence de cette suite et $B_t = 0$ ailleurs. La variable B_t est $\mathcal{F}_t^o$-mesurable, puisque $B_t^{(h_n)}$ l'est pour tout n.

2) Soit $C = \{\omega : \lim_{n\to\infty} \sup_t |B_t^{(h_n)} - B_t| = 0\}$.

Montrons que $P^x(C) = 1$ pour tout x :

• Si $x \geq c$, $A_s \geq x$ pour tout s P^x p.s. et comme $\phi(y) = P_h\,\phi(y) = 0$ pour $y \geq c$ on a $B_t^{(h)} = 0$ $\forall\, h > 0$, $t \geq 0$ P^x p.s. donc $B_t = 0$ partout et $P^x(C) = 1$.

• Si $x < c$: la relation $B_{t+s}^{(h_n)} = B_t^{(h_n)} + e^{-t} B_s^{(h_n)} \circ \theta_t$ (1)

vraie partout montre que $\theta_t^{-1}(C) \supset C$ pour tout $t < \infty$, et comme $\theta_\infty \omega = \omega_\infty$ cette inclusion vaut pour tout $t \in \bar{R}_+$. On a donc aussi $\theta_{T_x}^{-1}(C) \supset C$, et par suite $P^x(C) \geq P(C) = 1$. D'où $P^x(C) = 1$.

3) Sur l'ensemble C le processus (B_t), limite uniforme de la suite de processus croissants continus $(B_t^{h_n})$, a toutes ses trajectoires croissantes et continues. D'autre part sur l'ensemble C, la relation (1) donne par passage à la limite en n :

$$B_{t+s} = B_t + e^{-t} B_s \circ \theta_t \qquad \forall\, s \in \bar{R}_+ , \ \forall\, t \in R_+$$

et cette relation est encore vraie pour $t = +\infty$.

Les points 2) et 3) montrent donc que (B_t) est une fonctionnelle 1-additive continue parfaite.

4) Soit $L_t = \int_0^t e^s\, dB_s$. (L_t) est évidemment une fonctionnelle additive continue parfaite. La relation de décomposition $e^{-t}\,\phi \circ A_t = E[B_\infty - B_t \mid \mathcal{F}_t^o]$ s'écrit alors $e^{-t}\,\phi \circ A_t = E[\int_t^\infty e^{-s}\, dL_s \mid \mathcal{F}_t^o]$.

En arrêtant au temps d'arrêt T_x la martingale continue à droite $e^{-t}\,\phi \circ A_t + \int_0^t e^{-s}\, dL_s$, il vient :

$$e^{-T_x} \phi \circ A_{T_x} = E\,[\int_{T_x}^{\infty} e^{-s}\, dL_s \mid \mathcal{F}_{T_x}]$$

d'où pour $x < c$

$$\phi(x) = E\,[\int_0^{\infty} e^{-s}\, dL_{T_x+s}]$$

soit $$\phi(x) = E^x\,[\int_0^{\infty} e^{-s}\, dL_s]$$

et cette relation reste vraie pour $x \geq c$ $(B_t = L_t = 0 \quad P^x \text{ p.s.})$.

5) Unicité : Soit (L'_t) une fonctionnelle additive continue parfaite adaptée à $\mathcal{F}^o_t$ telle que $\phi(x) = E^x\,[\int_0^{\infty} e^{-s}\, dL'_s]$, $\forall x$.

Si $x \geq c$, cette relation impose $L'_s = 0$ P^x p.s., donc $L'_s = L_s$ $\forall s$ P^x p.s. .

Le processus (A_t) étant markovien pour la loi P , on a :

$$\phi \circ A_t = E\,[(\int_0^{\infty} e^{-s}\, dL'_s) \circ \theta_t \mid \mathcal{F}^o_t]$$

$$e^{-t} \phi \circ A_t = E\,[\int_t^{\infty} e^{-s}\, dL'_s \mid \mathcal{F}^o_t] \ .$$

Il résulte alors de l'unicité de la décomposition de Doob du potentiel (Z_t) à l'aide d'un processus croissant continu que (L_t) et (L'_t) sont P-indistinguables. Par suite de la propriété d'additivité parfaite de (L_t) et (L'_t) on a $L'_t \circ \theta_{T_x} = L_t \circ \theta_{T_x}$ $\forall t$ P p.s. , donc ces deux processus sont P^x-indistinguables pour tout $x < c$.

III. PROPRIÉTÉS DU TEMPS LOCAL.

La fonctionnelle (L_t) sera appelée temps local de l'ensemble régénératif par analogie avec le temps local d'un processus de Markov tel qu'il est défini par exemple dans Blumenthal et Getoor [1] . Les propriétés classiques du temps local peuvent être transposées à la fonctionnelle (L_t) et nous renvoyons à ce livre pour leurs démonstrations :

1) Pour presque tout ω , la fonction $L_{\bullet}(\omega)$ est constante sur tout intervalle contigu à $M(\omega)$ et croît strictement en tout point de $M(\omega)$.

2) Si l'on pose $S_t = \inf(s : L_s > t)$ ($+\infty$ si cet ensemble est vide), le processus (S_t) est équivalent à un subordinateur tué à un temps exponentiel (rappelons qu'un subordinateur est un processus continu à droite, à accroissements indépendants, positifs et stationnaires).

Cette dernière propriété peut-être établie rapidement à l'aide de la propriété de régénération ; on a en effet la relation $S_{s+t} = S_s + S_t \circ \theta_{S_s}$ sur $\{S_s < \infty\}$ et S_s est un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{F}_{t+})$ dont le graphe passe dans M , donc pour tous boréliens A et B de $\mathbb{R}_+$:

$$P(S_s \in A , S_{s+t} - S_s \in B) = P(S_s \in A)\, P(S_t \in B) .$$

Cette relation écrite pour $A = B = \mathbb{R}_+$ montre que $P(S_s < \infty) = e^{-\lambda s}$ $(0 \leq \lambda < \infty)$.

Les mesures de probabilité sur $\mathbb{R}_+$ $\nu_t = e^{\lambda t}\, P \circ S_t^{-1}$ forment un semi-groupe de convolution faiblement continu en 0 et permettent de définir un subordinateur. En le tuant à un temps exponentiel de paramètre λ et indépendant de lui, on obtient le résultat cherché.

Ce résultat constitue une réciproque du résultat, démontré par Meyer dans son exposé, suivant lequel l'image d'un subordinateur est un ensemble régénératif (non canonique).

On sait qu'un ensemble régénératif est ou bien p.s. borné, ou bien p.s. non borné . Comme L_∞ est une variable exponentielle de paramètre λ ($\{L_\infty > t\} = \{S_t < \infty\}$) , on a alors les équivalences suivantes :

<u>Proposition 3</u> :

M p.s. borné $\Leftrightarrow \lambda > 0 \Leftrightarrow L_\infty < \infty$ p.s.

M p.s. non borné $\Leftrightarrow \lambda = 0 \Leftrightarrow L_\infty = \infty$ p.s.

$\Leftrightarrow (S_t)$ est un subordinateur.

En particulier (S_t) est un subordinateur si $c < \infty$, puisqu'alors M est p.s. non borné.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLUMENTHAL et GETOOR. Markov Processes and Potential Theory. Academic Press. 1968.

[2] B. MAISONNEUVE et Ph. MORANDO. Temps locaux pour les ensembles régénératifs. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 269, p. 523-525, sept. 69.

[3] P.A. MEYER Probabilités et Potentiel. Herrmann. 1966.

[4] P.A. MEYER Processus de Markov. Lecture Notes in Mathematics. Springer. 1967.