SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

Une application aux fonctionnelles additives d'un théorème de Mokobodzki

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 3 (1969), p. 93-96
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1969__3__93_0>

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

1967-68

- Séminaire de Probabilités -

UNE APPLICATION AUX FONCTIONNELLES ADDITIVES D'UN THEORÈME DE MOKOBODZKI

par Claude DELLACHERIE

1. MOKOBODZKI vient de démontrer l'existence d'un ultrafiltre $\varkappa$ sur $\underset{\sim}{N}$, possédant la propriété suivante : soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé complet, et soit X_n une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, qui converge en probabilité vers une v.a. X. Alors pour presque tout $\omega \in \Omega$ on a $\lim_{\varkappa} X_n(\omega) = X(\omega)$.

La démonstration de MOKOBODZKI (qui figure dans un autre exposé du séminaire) utilise l'hypothèse du continu.*

Nous allons appliquer ce résultat à la construction de fonctionnelles additives de Markov possédant la propriété de "perfection".

2. Soit E un espace localement compact à base dénombrable, et soit (P_t) un semi-groupe markovien sur $(E, \underline{\underline{B}}_u(E))$ - nous supposons le semi-groupe markovien uniquement pour simplifier les notations, on sait bien comment ramener le cas sousmarkovien au cas markovien au moyen d'un pcint supplémentaire. Nous supposons que

<u>pour toute loi de probabilité</u> μ <u>sur</u> E, <u>il existe un processus de Markov admettant</u> μ <u>comme loi initiale</u>, (P_t) <u>comme semi-groupe de transition, et dont les trajectoires sont continues à droite</u>.

On peut alors construire la " réalisation à droite canonique du semi-groupe (P_t)" : Ω **désignant** l'ensemble de toutes les applications continues à droite de $\underset{\sim}{R}_+$ dans E, X_t l'application coordonnée d'indice t sur Ω, on munit Ω des tribus $\underline{\underline{F}}^\circ_t = \underline{\underline{T}}(X_s\ , s \leq t)$, $\underline{\underline{F}}^\circ = \underline{\underline{T}}(X_s\ , s \geq 0)$ et des mesures P^μ pour lesquelles le processus (X_t) est markovien, admet (P_t) comme semi-groupe de transition, μ comme mesure initiale. D'une

* L'article de MOKOBODZKI n'étant pas paru, l'exposé ne figure pas ici.

manière générale, nous utiliserons toutes les notations de MEYER [3] . Nous ferons en outre l'hypothèse suivante (qui entraîne la propriété de Markov forte)

<u>soit</u> f <u>une fonction</u> p-<u>excessive</u> $(p \geqq 0)$; <u>alors</u> f <u>est presque borélienne et "continue à droite sur les trajectoires" (i.e., quelle que soit la loi initiale</u> μ , <u>pour</u> P^{μ}-<u>presque tout</u> $\omega \in \Omega$ <u>l'application</u> $t \mapsto f \circ X_t(\omega)$ <u>est continue à droite</u>.)

Nous dirons qu'une partie de Ω est <u>négligeable</u> si elle est P^{μ}-négligeable pour toute loi initiale μ . De même, deux processus (A_t) et (B_t) définis sur Ω , à valeurs réelles, seront dits <u>indistinguables</u> si l'ensemble $\{\omega \mid \exists t : A_t(\omega) \neq B_t(\omega)\}$ est négligeable. L'expression <u>p.s.</u> ou <u>pour presque tout $\omega \in \Omega$</u> sans qualification signifie <u>sauf sur un ensemble négligeable.</u>

Rappelons la définition d'une <u>fonctionnelle</u> p-<u>additive continue</u> (p-fac). C'est un processus $A = (A_t)$ défini sur Ω , à valeurs réelles $\geqq 0$ ou $+\infty$, satisfaisant aux conditions suivantes :

a) pour tout t , A_t est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable ;

b) pour presque tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto A_t(\omega)$ est à valeurs finies, nulle pour $t = 0$, continue, croissante ;

c) quels que soient s,t , l'ensemble $\{\omega | A_{s+t}(\omega) \neq A_s(\omega) + e^{-ps}A_t(\theta_s\omega)\}$ (que nous désignerons par $H_{s,t}$) est négligeable.

Les ensembles négligeables appartenant à toutes les tribus $\underline{\underline{F}}_t$, nous pouvons supposer que b) est satisfaite identiquement, sans aucun inconvénient : il suffit de remplacer $A_t(\omega)$ par 0 pour tout t , si ω ne satisfait pas à b). Il n'en serait pas de même si a) était renforcée (mesurabilité par rapport aux tribus $\underline{\underline{F}}^{\circ}_{t+}$ par exemple). Ici, de toute façon, l'utilisation de l'ultrafiltre de MOKOBODZKI nous interdira de renforcer a) : nous supposerons donc, dans la suite, que nos fonctionnelles satisfont identiquement à b) sans ensemble exceptionnel.

On dit que la p-fac A est <u>parfaite</u> si l'ensemble $H = \bigcup_{s,t} H_{s,t}$ est négligeable. Notre objet est la démonstration du théorème suivant, qui a été établi par BLUMENTHAL et GETOOR dans le cas où le semi-groupe (P_t) satisfait à l'hypothèse de continuité absolue.

THEOREME.- <u>Toute</u> p-<u>fac est indistinguable d'une</u> p-<u>fac parfaite</u>.

Nous nous bornerons dans la démonstration (schématique) à traiter le cas où $p > 0$. La méthode à utiliser pour passer au cas $p = 0$ est indiquée dans les démonstrations antérieures (livre à paraître de BLUMENTHAL-GETOOR ; exposé de C. DOLEANS au séminaire de l'an dernier)

LEMME.- Soit A une p-fac $(p > 0)$. Il existe une fonction presque-borélienne ϕ, finement continue, bornée, strictement positive partout, telle que la p-fac B définie par

$$B_t = \int_0^\infty e^{-ps} \phi \circ X_s dA_s$$

admette un p-potentiel borné (i.e., $E^\bullet[B_\infty]$ est bornée).

Pour la démonstration, voir les références citées plus haut. Le retour de B à A par la formule $A_t = \int_0^t e^{-ps} \frac{1}{\phi} \circ X_s \, dB_s$ étant évident, il suffira de montrer que B est indistinguable d'une p-fac parfaite - autrement dit, de traiter le cas où la p-fac A admet un p-potentiel borné.

LEMME.- Soit A une p-fac admettant un p-potentiel borné f. Posons

$$f_n = n(f - e^{-p/n} P_{1/n} f)$$

$$A_t^n = \int_0^t e^{-ps} f_n \circ X_s \, ds$$

Alors $\sup_{s \geqq 0} | A_s - A_s^n | \to 0$ en norme dans $L^1(P^\mu)$, quelle que soit la loi initiale μ.

Nous admettrons ce lemme, établi dans les références citées. Prouvons le théorème. Désignons par $\varkappa$ l'ultrafiltre de MOKOBODZKI, par K l'ensemble des $\omega \in \Omega$, tels que

$$\sup_{s \geqq 0} |A_s(\omega) - A_s^n(\omega)| \text{ ne tende pas vers } 0 \text{ suivant } \varkappa$$

par L, l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que

$$t \mapsto A_t^n(\omega) \text{ ne converge pas uniformément suivant } \varkappa .$$

D'après le théorème de MOKOBODZKI, K est négligeable ; comme L est contenu dans K, L est négligeable. Posons

$$A'_t(\omega) = 0 \quad \text{si} \quad \omega \in L$$

$$A'_t(\omega) = \lim_\varkappa A_t^n(\omega) \quad \text{si} \quad \omega \notin L$$

Si $\omega \notin K$, on a $A_t(\omega) = A'_t(\omega)$ pour tout t, donc les deux processus A et A'

sont indistinguables : en particulier, A' satisfait à a) . Il est clair que A' satisfait à b). D'autre part, si $\omega \notin L$, la relation (identique)

$$A^n_t(\theta_s\omega) = A^n_{t+s}(\omega) - A^n_s(\omega)$$

montre que $\theta_s\omega \notin L$, et par conséquent $A'_t(\theta_s\omega) = \lim_n A^n_t(\theta_s\omega)$ pour tout t ; cela entraîne aussitôt que A' est une p-fac parfaite. Le théorème est établi.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. BLUMENTHAL et R. GETOOR.- Markov processes and potential theory. Academic Press, 1968.

[2] C. DOLEANS.- Fonctionnelles additives parfaites. Séminaire de Probabilités II Université de Strasbourg. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1968.

[3] P.A. MEYER.- Processus de Markov. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag.

* * *