

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PHILIPPE ARTZNER

Extension du théorème de Sazonov-Minlos d'après L. Schwartz

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 3 (1969), p. 1-23

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1969__3__1_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

Laboratoire Associé au C.N.R.S.

STRASBOURG

- Séminaire de Probabilités -

1967-68

EXTENSION DU THÉORÈME DE SAZONOV - MINLOS

d'après L. SCHWARTZ (*)

Ce qui suit développe certaines parties de trois notes de L. SCHWARTZ aux Comptes-Rendus (C.R.A.S. Paris, Série A, t. 265, 1967, n° 25, pp. 832-834 et t. 266, 1968, n° 1, pp. 7-9 et n° 2, pp. 50-52), permettant d'établir que certaines applications linéaires de $\mathcal{L}^{p'}$ dans \mathcal{L}^p ($1 \leq p < 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$), transforment certaines probabilités cylindriques en des probabilités de Radon.

On s'intéresse à un espace vectoriel topologique réel E , localement convexe et séparé, et à son dual topologique E' .

(*) Exposé de Ph. ARTZNER.

Première Partie : ALGÈBRE DES CYLINDRES, PROBABILITÉS CYLINDRIQUES.

§ 1. CYLINDRES, PROBABILITÉS CYLINDRIQUES.

On va définir une classe de parties de E et certaines fonctionnelles additives sur celle-ci.

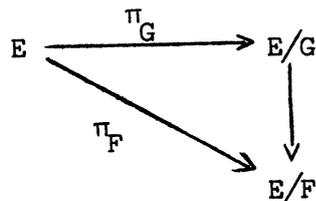
DÉFINITION 1.

On appelle cylindre de l' e.l.c. séparé E tout sous-ensemble $C = \pi_F^{-1}(A)$ de E , où F est sous-espace vectoriel fermé de E , de codimension finie, π_F la projection canonique de E sur E/F , et A une partie borélienne de E/F .

L'ensemble \mathcal{C}_F de tous les cylindres ainsi obtenus lorsque A décrit la tribu borélienne de E/F est une tribu, que π_F met en correspondance bijective avec la précédente. Mais la réunion \mathcal{C} des \mathcal{C}_F , lorsque F décrit l'ensemble des sous-espaces fermés de codimension finie de E , n'est pas en général une tribu. Montrons que \mathcal{C} est une algèbre de Boole : on utilise pour cela les relations :

$$\pi_F^{-1}(\cup A) = \cup \pi_F^{-1}(A) \quad , \quad \mathcal{C}_{F_1} \cup \mathcal{C}_{F_2} \subset \mathcal{C}_{F_1 \cap F_2} \quad .$$

La première est évidente et la seconde résulte de ce que si $F \supset G$, alors $\mathcal{C}_F \subset \mathcal{C}_G$ comme on le vérifie à l'aide du diagramme commutatif :



On notera $\sigma \mathcal{C}$ la tribu, dite cylindrique, engendrée par \mathcal{C} .

Exemples.

1. Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($1 \leq d < \infty$) est une application linéaire continue, et si B est une partie borélienne de \mathbb{R}^d , $C = f^{-1}(B)$ est un cylindre de E . On prend en effet $F = \text{Ker } f$ et $A = \pi_F(C) = \bar{f}^{-1}(B)$ où \bar{f} est déduite de f par passage au quotient. Lorsque $d = 1$ on dit que C est une bande de E . Il est clair qu'inversement tout cylindre de E s'obtient par ce procédé.

2. Désignons par S l'espace topologique produit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; c'est l'espace des suites de nombres réels, muni de la topologie de la convergence des coefficients. Notons $\pi_k : x \mapsto (x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ l'application "projection" de S sur l'espace \mathbb{R}^k .

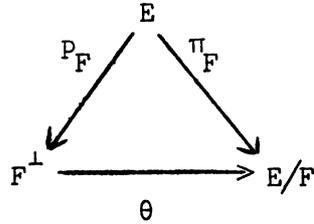
Soit alors $f = (f_1, \dots, f_d)$ une application linéaire continue de S dans \mathbb{R}^d . Puisque le dual topologique de S est l'espace $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ des suites nulles à partir d'un certain rang, il existe un entier k tel que pour tout x de S on ait :

$$f(x) = \left(\sum_{p=0}^{k-1} \alpha_{ip} x_p \right)_{1 \leq i \leq d} ,$$

les nombres α_{ip} ne dépendant pas de x . Ceci montre que tout cylindre de S est de la forme $\pi_k^{-1}(B)$ pour un certain k et une certaine partie borélienne B de \mathbb{R}^k . On sait ainsi que la tribu cylindrique est identique à la tribu produit sur S et donc à la tribu borélienne sur S , puisque cet espace est un produit dénombrable d'espaces topologiques à bases dénombrables d'ouverts.

3. Si E est un espace de Hilbert on note F^\perp le sous-espace orthogonal à F et p_F la projection orthogonale de E sur F^\perp . On obtient

un diagramme commutatif :



où θ est une application linéaire bijective. Il en résulte que les éléments de \mathcal{C}_F sont les parties de E de la forme $C = B + F$, où B est une partie borélienne de F^\perp , cette écriture étant unique pour $C \in \mathcal{C}_F$ donné.

4. Si $u : E_1 \rightarrow E_2$ est une application linéaire faiblement continue entre e.l.c. séparés (toute forme linéaire continue sur E_2 donne par composition avec u une forme linéaire continue sur E_1), l'image réciproque d'un cylindre de E_2 est un cylindre de E_1 et l'on a $u^{-1}(C) \in \mathcal{C}_{u^{-1}(F)}$ pour $C \in \mathcal{C}_F$, F sous-espace fermé de codimension finie de E_2 .

Rappelons que si X est un ensemble et \mathcal{C} une tribu sur X , on appelle probabilité abstraite sur (X, \mathcal{C}) la donnée d'une application μ de \mathcal{C} dans le segment $[0,1]$, telle que $\sum_n \mu(A_n) = 1$ pour toute partition dénombrable (A_n) de X par des éléments de \mathcal{C} .

DÉFINITION 2.

On appelle probabilité cylindrique sur l'e.l.c. séparé E la donnée d'une application μ de \mathcal{C} dans le segment $[0,1]$, telle que pour tout sous-espace fermé F de codimension finie, la restriction de μ à \mathcal{C}_F soit une probabilité abstraite sur (E, \mathcal{C}_F) .

Remarques.

1. Si $C_1 \in \mathcal{C}_{F_1}$ et $C_2 \in \mathcal{C}_{F_2}$, alors $C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}_{F_1 \cap F_2}$, et

donc $\mu(C_1 \cup C_2) = \mu(C_1) + \mu(C_2)$ si $C_1 \cap C_2 = \emptyset$; la fonctionnelle μ est additive sur \mathcal{C} .

Si $\mu : E_1 \rightarrow E_2$ est linéaire et faiblement continue on définit une probabilité cylindrique image $u(\mu)$ par la relation

$$u(\mu)(C) = \mu(u^{-1}(C)) \text{ pour } C \text{ cylindre de } E_2 .$$

En particulier, si $\xi \in E'$ est une forme linéaire continue sur E on considèrera la probabilité $\xi\mu$ sur \mathbb{R} , image de μ par l'application

$$x \mapsto \langle x, \xi \rangle \text{ de } E \text{ dans } \mathbb{R} .$$

§ 2. RELATIONS AVEC LES PROBABILITÉS DE RADON.

Rappelons que si X est un espace topologique séparé et \mathfrak{B} la tribu borélienne sur X , on appelle probabilité de Radon sur X toute probabilité abstraite m sur (X, \mathfrak{B}) , telle que pour tout borélien B de X on ait la relation de régularité intérieure :

$$m(B) = \sup \{m(K) ; K \text{ compact , } K \subset B\} .$$

Pour une telle probabilité de Radon on établit que si $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille de fermés de X et si $F = \bigcap_{\alpha} F_\alpha$, alors $\mu(F) = \inf_{\alpha_1 \dots \alpha_n \text{ dans } A} \{\mu(F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_n})\}$.

On montre que si X est un espace polonais (espace métrisable et complet, à base dénombrable d'ouverts), toute probabilité abstraite sur (X, \mathfrak{B}) est une probabilité de Radon sur X .

Toute probabilité de Radon m sur l'e.l.c. séparé E définit, par sa restriction à \mathcal{C} , une probabilité cylindrique m_c , qui est dite provenir de m . La réciproque n'est pas toujours vraie, sauf si $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; c'est le théorème de Kolmogoroff. On a le résultat :

PROPOSITION 1.

L'application $m \mapsto m_C$ est injective (m probabilité de Radon).

Par régularité intérieure, il suffit d'établir que si $m_C = m'_C$, alors m et m' coïncident sur la classe des compacts de E . D'après la propriété rappelée sur les probabilités d'ensembles fermés, ceci résultera du

LEMME 1.

Soit K un compact d'un espace localement convexe séparé E ;

K est l'intersection des cylindres fermés qui le contiennent.

On peut supposer, par translation, que l'origine n'appartient pas à K . Soit $x \notin K$; pour tout y de K il existe une forme linéaire continue f_y sur E telle que $1 < f(y) < 2$ et que $f(x) \notin [1,2]$. Lorsque y varie dans K , les bandes ouvertes $f_y^{-1}(]1,2[)$ recouvrent K , tandis que x n'appartient à aucune des bandes fermées $f_y^{-1}([1,2])$. On en déduit, par compacité de K , l'existence d'un entier d et d'une application linéaire continue $f = (f_1, \dots, f_d)$ de E dans \mathbb{R}^d telle que le cylindre ouvert

$\bigcup_{1 \leq i \leq d} f_i^{-1}(]1,2[)$ contienne K , et que le cylindre fermé $\bigcup_{1 \leq i \leq d} f_i^{-1}([1,2])$ ne contienne pas x , ce qui établit le lemme, et donc la proposition 1.

§ 3. TRANSFORMATION DE FOURIER DES PROBABILITÉS CYLINDRIQUES.

Remarquant le fait que somme toute une transformation de Fourier dans \mathbb{R}^d se détermine à l'aide de transformations de Fourier sur la droite, on peut étendre la définition de cette opération :

DÉFINITION 3.

On appelle transformée de Fourier d'une probabilité cylindrique μ sur l'e.l.c. séparé E , la fonction $\hat{\mu}$ définie sur le dual topologique E'

de E par la relation

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{it} \xi \mu(dt) = \widehat{(\xi \mu)} \quad (1)$$

où $\xi \mu$ est l'image de μ par l'application $x \mapsto \langle x, \xi \rangle$ de E dans \mathbb{R} .

Remarques.

1. Si μ est déduite d'une probabilité de Radon m sur E ,
on a

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_E e^{i \langle x, \xi \rangle} m(dx) \quad .$$

2. Si $\mu : E_1 \rightarrow E_2$ est linéaire et faiblement continue, on a

$$\widehat{(u(\mu))} = \hat{\mu} \circ {}^t u \quad \text{où } {}^t u : E_2' \rightarrow E_1' \text{ est}$$

la transposée de u .

PROPOSITION 2.

L'application $\mu \mapsto \hat{\mu}$ est une bijection de l'ensemble des probabilités cylindriques sur l'ensemble des fonctions sur E' de type positif, continues sur chaque sous-espace V de E' de dimension finie, égales à 1 à l'origine de E' .

Si V est un sous-espace de dimension finie de E' , son annulateur V^0 dans E (intersection des noyaux des éléments de V) est un sous-espace fermé de codimension finie, et E/V^0 est canoniquement isomorphe au dual V' de V . Partant d'une probabilité cylindrique μ sur E , on trouve une probabilité abstraite sur (E, \mathcal{C}_{V^0}) , donc sur E/V^0 , donc finalement une probabilité, de Radon, m_V sur V' , dont la transformée de Fourier est la restriction de $\hat{\mu}$ à V ; ceci établit les propriétés des transformées de Fourier des probabilités cylindriques, à partir des propriétés connues dans le cas d'espaces \mathbb{R}^d , d fini. De plus si $\mu_1 \neq \mu_2$, il existe un F tel que μ_1

et μ_2 différent sur un élément de \mathcal{C}_F ; or F est de la forme V^0 pour un certain V et l'on aura $m_1|_V \neq m_2|_V$. Par unicité de la transformation de Fourier en dimension finie on trouve que $\widehat{\mu}_1|_V \neq \widehat{\mu}_2|_V$.

Inversement la donnée d'une fonction φ sur E' satisfaisant aux propriétés indiquées dans l'énoncé, permet pour chaque F de construire par restriction de φ à l'annulateur V de F dans E' , d'après le théorème de Bochner en dimension finie, une probabilité m_F sur V' , d'où canoniquement une probabilité sur E/F , d'où une probabilité abstraite μ_F sur (E, \mathcal{C}_F) ; il reste à établir que si $F \supset G$, alors μ_F est la restriction de μ_G à \mathcal{C}_F .

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 (E, \mathcal{C}_F, \mu_F) & \xrightarrow{\pi_F} & E/F & \xrightarrow{u} & (V', m_F) & V = F^0 \subset E' \\
 \uparrow \text{identité} & & \uparrow p & & \uparrow q & \\
 (E, \mathcal{C}_G, \mu_G) & \xrightarrow{\pi_G} & E/G & \xrightarrow{v} & (W', m_G) & W = G^0 \subset E'
 \end{array}$$

u, v sont des isomorphismes canoniques ; p se déduit de l'identité par passage au quotient, q se déduit de p par les isomorphismes u et v , et c'est la transposée de l'injection de V dans W .

Pour établir que $\text{id}(\mu_G) = \mu_F$, il suffit d'établir que $q(m_G) = m_F$, et d'après le théorème d'inversion que $\widehat{m}_F = \widehat{m}_G \circ {}^t q$. Cette dernière égalité résulte de ce que $\widehat{m}_F = \varphi|_{F^0}$, $\widehat{m}_G = \varphi|_{G^0}$.

Remarque.

Il résulte des propositions 1 et 2 que deux probabilités de Radon sur un e.l.c. séparé, qui ont même transformée de Fourier (calculée à partir des probabilités cylindriques associées), sont égales.

§ 4. PROBABILITÉS CYLINDRIQUES GAUSSIENNES.

Si E est un espace de Hilbert on définit une probabilité cylindrique généralisant les gaussiennes en dimension finie.

On définit une probabilité abstraite μ_F sur (E, \mathcal{C}_F) de la façon suivante : tout élément C de \mathcal{C}_F s'écrit de façon unique $C = B + F$, B borélien de F^\perp . Si $\dim(F^\perp) = d$ on prend :

$\mu_F(C) =$ mesure B pour la mesure m_F sur F^\perp de densité $(2\pi)^{-d/2} e^{-1/2 \langle x, x \rangle}$ par rapport à la mesure sur F^\perp déduite de la mesure $dx_1 \dots dx_d$ sur \mathbb{R}^d , par n'importe quelle isométrie de \mathbb{R}^d sur F^\perp .

Il reste à établir que si $F \supset G$, alors μ_F est la restriction de μ_G à \mathcal{C}_F .

Soit π la projection orthogonale de G^\perp sur F^\perp ; d'après les propriétés des mesures de probabilité gaussiennes dans les espaces euclidiens \mathbb{R}^d , on sait que $\pi(m_G) = m_F$.

Soit $C = B + F$ un élément de \mathcal{C}_F ; on trouve :

$$\mu_F(C) = m_F(B) = m_G(\pi^{-1}(B)) = \mu_G(\pi^{-1}(B) + G) = \mu_G(C)$$

car on a les relations

$$B + F = B + (F \cap G^\perp) + G, \quad (F \cap G^\perp) + B = \pi^{-1}(B).$$

Remarque.

Montrons que la transformée de Fourier de μ est la fonction sur E (identifié à E') définie par

$$\hat{\mu}(\xi) = e^{-\frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle}.$$

En effet la mesure $\xi \mu$ sur \mathbb{R} est normale, centrée, et de variance $\langle \xi, \xi \rangle$; sa transformée de Fourier est la fonction $t \mapsto e^{-\frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle t^2}$.

Seconde Partie : CONCENTRATION DE PROBABILITÉS,
EXTENSION DU LEMME DE MINLOS.

On va définir différentes notions de concentration d'une probabilité cylindrique, que des inégalités dans les espaces de dimension finie permettront de relier.

§ 1. DEUX PROBABILITÉS EXTÉRIEURES.

La donnée d'une probabilité cylindrique μ sur E permet de définir deux fonctions d'ensemble : pour toute partie X de E on pose :

$$\mu^b(X) = \inf \mu(B) \text{ pour } B \text{ bande de } E, B \supset X$$

$$\mu^c(X) = \inf \mu(C) \text{ pour } C \text{ cylindre de } E, C \supset X .$$

On appelle $\mu^c(X)$ la probabilité extérieure cylindrique de X ; on a $\mu^c \leq \mu^b$. En analogie avec le cas des mesures abstraites on pose la

DÉFINITION 4.

Soit $0 \leq \eta < 1$; on dit que la probabilité cylindrique μ est scalairement (resp. cylindriquement) concentrée à η près sur une partie X de E , si $\mu^b(X) \geq 1 - \eta$ (resp. $\mu^c(X) \geq 1 - \eta$).

ainsi que la

DÉFINITION 5.

On dit que la probabilité cylindrique μ est scalairement (resp. cylindriquement) concentrée sur une famille \mathfrak{X} de parties de E , si

$$\sup_{X \in \mathfrak{X}} \mu^b(X) = 1 \quad (\text{resp.} \quad \sup_{X \in \mathfrak{X}} \mu^c(X) = 1) \quad .$$

Remarques.

1. Si μ est scalairement (resp. cylindriquement) concentrée sur la famille des parties bornées, alors pour tout voisinage U de l'origine dans E , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^b(U) = 1 \quad (\text{resp. } \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^c(U) = 1)$$

où μ_n désigne l'image de μ par l'homothétie $x \mapsto \frac{1}{n} x$ de E .

2. Lorsque E est un espace normé, il est nécessaire pour qu'une probabilité cylindrique μ provienne d'une probabilité abstraite (définie sur la tribu borélienne de E), que μ soit cylindriquement concentrée sur la famille des parties bornées.

On établit ainsi que la probabilité cylindrique gaussienne définie à la fin de la première partie ne provient pas d'une probabilité abstraite, ni à fortiori, d'une probabilité de Radon, lorsque l'espace de Hilbert est de dimension infinie. Pour cela on prouve que la probabilité cylindrique de la boule unité U est nulle.

Soit $(x_n)_{n > 0}$ une suite orthonormale de vecteurs de E ; soient F_d le sous-espace $\{x \mid \langle x, x_1 \rangle = \dots = \langle x, x_d \rangle = 0\}$ et C_d le cylindre de \mathcal{C}_{F_d} , ensemble des x tels que $\langle x, x_1 \rangle^2 + \dots + \langle x, x_d \rangle^2 \leq 1$. On a

$$\mu^c(U) \leq \mu_{F_d}(C_d) = (2\pi)^{-d/2} \int_{y \in \mathbb{R}^d, \langle y, y \rangle \leq 1} e^{-\frac{1}{2} \langle y, y \rangle} dy .$$

Ce dernier nombre est égal à

$$\frac{\int_0^1 \rho^{d-1} e^{-\frac{1}{2} \rho^2} d\rho}{\int_0^\infty \rho^{d-1} e^{-\frac{1}{2} \rho^2} d\rho}$$

qui se majore par :

$$\frac{\int_0^1 \rho^{d-1} e^{-\frac{1}{2} \rho^2} d\rho}{\int_1^\infty e^{-\frac{1}{2} \rho^2} d\rho}$$

dont la limite est nulle quand $d \rightarrow \infty$.

3. Le théorème de Prokhorov se traduit en disant qu'une probabilité cylindrique provient d'une probabilité de Radon, si et seulement si elle est cylindriquement concentrée sur la famille des parties compactes de E .

PROPOSITION 3.

Une probabilité cylindrique μ sur E , est scalairement concentrée sur un ensemble \mathfrak{X} de parties bornées et équilibrées de E , si et seulement si la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ de μ est continue sur le dual topologique E' de E , muni de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de \mathfrak{X} .

• supposons $\hat{\mu}$ continue : pour tout $\epsilon > 0$ on trouve $X \in \mathfrak{X}$ tel que si $\xi \in E'$ et $\xi(X) \subset [-1, +1]$ alors $|1 - \hat{\mu}(\xi)| \leq \epsilon$, et par conséquent aussi $|1 - \hat{\mu}(\alpha \xi)| \leq \epsilon$, si $0 \leq \alpha \leq 1$. Etablissons que pour un tel ξ , on a $\int_{\xi \mu}([-1, +1]) \geq 1 - 7\epsilon$, ce qui prouvera que $\mu^b(X) \geq 1 - 7\epsilon$. En utilisant la relation :

$$h_{\alpha}(\xi \mu) = \alpha \xi \mu \quad (h_{\alpha} \text{ homothétie de rapport } \alpha \text{ dans } \mathbb{R})$$

on trouve pour tout α :

$$\widehat{(\xi \mu)}(\alpha) = \widehat{(\xi \mu)}(\alpha.1) = \widehat{h_{\alpha}(\xi \mu)}(1) = \widehat{\alpha \xi \mu}(1) = \hat{\mu}(\alpha \xi) .$$

Par ailleurs on a l'inégalité classique

$$\int_{|t| \geq 1} \xi \mu(dt) \leq 7 \int_0^1 (1 - \operatorname{Re} \widehat{(\xi \mu)}(\alpha)) d\alpha ;$$

on en déduit bien que la première intégrale est majorée par 7ϵ .

•• supposons inversement μ scalairement concentrée sur \mathfrak{X} ; pour tout $\epsilon > 0$ existe $X \in \mathfrak{X}$ tel que pour tout $\xi \in E'$ on trouve que $\int_{\xi \mu}([-a, +a]) \geq 1 - \epsilon$ si $\overline{\xi(X)} = [-a, +a]$. Prenant $a > 0$ et tel que $\sup_{|t| \leq a} |1 - e^{it}| \leq \epsilon$, et $V(0) = \{\xi \in E' ; \xi(X) \subset [-a, +a]\}$ on a

$\xi \in V(0)$, $|1 - \hat{\mu}(\xi)| \leq 2\epsilon + \epsilon = 3\epsilon$, ce qui prouve la continuité de $\hat{\mu}$ à l'origine de E' . La continuité sur tout E' en résulte formellement à partir de l'inégalité

$$|\hat{\mu}(\xi + \eta) - \hat{\mu}(\xi)|^2 \leq 2(1 - \operatorname{Re} \hat{\mu}(\eta)) ,$$

conséquence du fait que $\hat{\mu}$ est de type positif.

Remarque.

Cette proposition établit à nouveau qu'une probabilité cylindrique gaussienne sur un espace hilbertien séparable E ne provient pas d'une probabilité abstraite. En effet celle-ci serait en fait de Radon et donc cylindriquement concentrée sur les compacts. Sa transformée de Fourier $x \mapsto e^{-\frac{1}{2} \langle x, x \rangle}$ serait alors continue sur E' , identifié à E , muni de la topologie \mathcal{C} de la convergence compacte. Mais ceci n'est pas : désignons par (e_n) une base orthonormée de E : la suite $\|e_n\|$ ne tend pas vers zéro alors que la suite (e_n) tend vers zéro pour \mathcal{C} comme le prouve le

LEMME 2.

Soient E un espace hilbertien séparable, (e_n) une base orthonormée de E ; pour tout compact K de E et tout $a > 0$, existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in K$ on ait l'inégalité $|\langle x, e_n \rangle| \leq a$.

Pour tout x de K existent en effet un entier n_x et une boule ouverte centrée en x tels que toutes les coordonnées d'indice $\geq n_x$ de tous les points de cette boule soient en valeur absolue majorées par a . Il suffit de considérer un sous-recouvrement fini du recouvrement ainsi obtenu de K et de prendre pour n_0 le plus grand des entiers n_x intervenant en nombre fini.

Par certaines applications, certaines probabilités cylindriques se transforment bien :

DÉFINITION 6.

On dit qu'une application linéaire faiblement continue u d'un

espace E dans un espace F est radonifiante, si l'image par u de toute probabilité cylindrique scalairement concentrée sur la famille des parties bornées de E, provient d'une probabilité de Radon sur F.

La troisième partie donne un exemple de telle application.

§ 2. LE LEMME FONDAMENTAL.

On a des exemples quantitatifs de concentrations grâce au

LEMME FONDAMENTAL.

Soit $1 \leq p < 2$. Il existe un nombre $C > 0$, tel que pour tout entier d , tout $\eta \in]0, 1[$, toute suite $(a_m)_{1 \leq m \leq d}$ de nombres positifs, toute probabilité μ scalairement concentrée à η près sur la boule unité

$$B_1 = \{ x \in \mathbb{R}^d ; \sum_1^d |x_m|^{p'} \leq 1 \} , \text{ soit concentrée à } \epsilon \text{ près sur la boule}$$

$$B_2 = \{ x \in \mathbb{R}^d ; \sum_1^d |a_m x_m|^p \leq 1 \} , \text{ où}$$

$$\epsilon = C(\eta + (U/\eta^p) (1 + \log(1/\eta)))$$

$$U = \sum_1^d a_m^p (1 + |\log(1/a_m)|) .$$

Pour majorer la probabilité du complémentaire de B_2 on va intégrer une fonction positive bornée que l'on sache minorer sur cet ensemble et qui se rattache à la transformation de Fourier.

Puisque les normes généralisent la norme ℓ^2 on considère la fonction de variable réelle $t \mapsto e^{-|t|^p}$: c'est la transformée de Fourier d'une loi stable de densité θ_p vérifiant l'inégalité $\theta_p(t) \leq \frac{C}{|t|^{p+1}}$, C_p indépendant de t (cf. W. FELLER, An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. II p. 549, Lemma 2). Alors la fonction sur $\mathbb{R}^d : x \mapsto \exp(-\sum_1^d |a_m x_m|^p)$ est la transformée de Fourier de la probabilité τ de densité égale à

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_d} \theta_p \left(\frac{y_1}{a_1} \right) \cdot \theta_p \left(\frac{y_2}{a_2} \right) \cdot \dots \cdot \theta_p \left(\frac{y_d}{a_d} \right) .$$

Par application de la formule de Plancherel-Parseval et de la formule d'inversion, on trouve que

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 - \exp(-\sum_1^d |a_m x_m|^p)) \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \hat{\mu}(y)) \tau(dy) .$$

La première intégrale se minore par $(1 - e^{-1}) \mu(\bigcap B_2)$; la seconde intégrale se décompose en $\int_{\|y\|_\infty \leq \eta}$ et $\int_{\|y\|_\infty > \eta}$, où $\|y\|_\infty = \sup(|y_1|, \dots, |y_d|)$.

Dans l'intégrale $\int_{\|y\|_\infty > \eta}$ on majore $|1 - \hat{\mu}|$ par 2 . On est amené

à chercher la mesure pour τ du complémentaire d'un cube ; elle se majore par la somme des mesures des bandes $\{y \mid |y_m| > \eta\}$, et ces dernières se ramènent à des intégrales à une variable :

$$\left| \int_{\|y\|_\infty > \eta} (1 - \hat{\mu}(y)) \tau(dy) \right| \leq 2 \sum_1^d \tau\{|y_m| > \eta\} = 2 \sum_1^d \int_{|u| > \eta} \theta_p\left(\frac{u}{a_m}\right) \frac{du}{a_m} .$$

On trouve donc le majorant $\frac{4}{p} \cdot \frac{C_p}{\eta^p} \sum_1^d a_m^p$.

Pour évaluer l'intégrale $\int_{\|y\|_\infty \leq \eta}$ on va majorer $1 - \hat{\mu}$ à l'aide

de l'hypothèse de concentration qui permet d'appliquer le

LEMME 3.

Pour tout entier d , tout p' ≥ 1 , tout η > 0 , toute probabilité

μ sur ℝ^d , scalairement concentrée à η près sur la boule unité

B₁ = {x ∈ ℝ^d ; Σ₁^d |x_m|^{p'} ≤ 1} , a une transformée de Fourier μ̂ telle que
pour tout y de ℝ^d :

$$|1 - \hat{\mu}(y)| \leq 2\pi(\eta + \|y\|_p) .$$

Considérons, pour $y \neq 0$, l'application de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} définie par :

$$x \mapsto \frac{1}{\|y\|_p} \langle x, y \rangle \quad \text{et l'image } \mu_y \text{ de } \mu$$

par cette application. On a l'égalité

$$1 - \hat{\mu}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{2i\pi \langle x, y \rangle}) \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{2i\pi t \|y\|_p}) \mu_y(dt) .$$

On est ramené à un problème de transformée de Fourier sur \mathbb{R} , avec une mesure μ_y concentrée à η près sur l'image de B_1 , c'est-à-dire sur $[-1, +1]$, d'après la définition des normes duales.

Puisque pour tout réel A on a $|1 - e^{iA}| \leq \inf(2, |A|)$, on trouve bien la majoration indiquée.

Pour faciliter les calculs on va remplacer le terme $\|y\|_p$ apparu dans le lemme précédent par un terme en $\|y\|_p^P$:

appliquons l'inégalité

$$a^{1/p} b^{1/p'} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{p'} \quad \text{valable pour } p > 1, a \geq 0$$

et $b \geq 0$, à $a = \frac{\|y\|_p^P}{\eta^P}$ et $b = \eta^{P'}$; on trouve

$$\|y\|_p \leq \frac{1}{p} \frac{\|y\|_p^P}{\eta^P} + \frac{1}{p'} \eta^{P'} ;$$

le second membre se majore par $\frac{\|y\|_p^P}{\eta^P} + \eta$ puisque $\eta < 1$, et que $0 < \frac{1}{p'} < \frac{1}{2}$.

Cette majoration est encore valable si $p = 1$.

On a donc à majorer l'intégrale :

$$2\pi \int_{\|y\|_\infty \leq \eta} \left(2\eta + \frac{\|y\|_p^P}{\eta^P}\right) \tau(dy) ;$$

le terme en η donne une contribution inférieure à $4\pi\eta$; pour le suivant on est amené à considérer d intégrales simples :

$$\frac{2\pi}{\eta^p} \sum_1^d \int_{|u| \leq \eta} u^p \theta_p \left(\frac{u}{a_m} \right) \frac{du}{a_m} = \frac{2\pi}{\eta^p} \sum_1^d a_m^p \int_{|v| \leq \frac{\eta}{a_m}} v^p \theta_p(v) dv \quad .$$

Lorsque $\eta \leq a_m$ chaque intégrale se majore par 2 ; sinon on utilise l'évaluation de θ à l'infini, trouvant finalement la majoration valable dans les deux cas : $\frac{4\pi}{\eta^p} \sup(C_p, 1) \sum_1^d a_m^p (1 + |\log \frac{\eta}{a_m}|)$. Puisque $\theta_p(t)$ est équivalent à $\frac{1}{t^{p+1}}$ pour $|t|$ grand on ne compte pas pouvoir l'améliorer et faire disparaître le terme logarithmique. On majore le terme trouvé en remplaçant $1 + |\log \frac{\eta}{a_m}|$ par $(1 + \log \frac{1}{\eta})(1 + |\log \frac{1}{a_m}|)$; au total on a majoré $(1 - e^{-1}) \mu(\int B_2)$ par l'expression

$$4\pi\eta + \frac{4 \sup(C_p, 1)}{\eta^p} \sum_1^d a_m^p \left[1 + (1 + \log \frac{1}{\eta})(1 + |\log \frac{1}{a_m}|) \right]$$

donc $\mu(\int B_2)$ par l'expression indiquée dans l'énoncé du lemme fondamental, avec $\frac{2}{3} C = 8 \sup(\pi, C_p)$.

* *
*

Troisième Partie : UN EXEMPLE D'APPLICATION RADONIFIANTE.

Le théorème de Sazonov-Minlos assure que pour une suite bornée (α_n) de nombres réels, l'application $(x_n) \mapsto (\alpha_n x_n)$ de ℓ^2 dans ℓ^2 est radonifiante si et seulement si $\sum \alpha_n^2$ est fini. L'extension du théorème concerne l'application analogue de $\ell^{p'}$ dans ℓ^p sous les conditions $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 \leq p < 2$.

Soient donc $1 \leq p < 2$, et pour toute suite $\alpha = (\alpha_n)$ de nombres réels, $a_n = |\alpha_n|$ et

$$U(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^p (1 + |\log \frac{1}{a_n}|)$$

(si a_n est nul on prend zéro pour le terme correspondant de la série).

LEMME 4.

Pour toute suite α telle que $U(\alpha)$ soit fini il existe λ_0 dans $]0,1[$ tel que dans l'intervalle $]0, \lambda_0[$ la fonction φ définie par

$$\varphi(\lambda) = U(\lambda \alpha)$$

soit finie et strictement croissante. Par ailleurs $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \varphi(\lambda) = 0$.

En effet il existe un entier k tel que pour $n > k$ on ait $a_n \leq 1$; il existe λ_0 dans $]0,1[$ tel que $\lambda_0 a_0, \lambda_0 a_1, \dots, \lambda_0 a_k$ soient inférieurs à 1. Puisque la fonction $t \mapsto t^p (1 + \log \frac{1}{t})$ est strictement croissante dans $]0,1[$ et a une limite nulle à l'origine, on obtient le lemme d'après le théorème de convergence dominée.

L'énoncé du théorème est le suivant :

THEOREME.

Soit $1 \leq p < 2$. Soit (α_n) une suite de nombres réels telle que le nombre :

$$U(\alpha) = \sum |\alpha_n|^p (1 + |\log \frac{1}{|\alpha_n|}|)$$

soit fini. Alors l'application u de $\ell^{p'}$ dans ℓ^p définie par :

$$x \mapsto u(x) = (\alpha_n x_n)_n$$

est radonifiante.

Remarque.

La démonstration montrera que si $p = 1$, on peut munir $\ell^{p'} = \ell^\infty$ soit de la topologie d'espace normé, soit de la topologie $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$. Il est facile de vérifier que pour ces deux topologies les bornés sont les mêmes, en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus.

Etudions l'application u : on trouve que $\|u(x)\|_1 = \sum |\alpha_n x_n|$, se majore par $\|\alpha\|_p \cdot \|x\|_{p'}$, de façon évidente si $p = 1$, et par application de l'inégalité de Hölder si $p > 1$. C'est donc à une application continue de l'espace normé $\ell^{p'}$ dans l'espace normé ℓ^1 , lequel s'injecte continûment dans l'espace normé ℓ^p , que l'on a affaire.

Montrons que l'application u égale sa transposée. Soit $\xi \in \ell^{p'}$; son transformé par ${}^t u$, si $p > 1$, est un élément ℓ^p , ayant pour k -ième coordonnée le nombre

$$\langle {}^t u(\xi), e_k \rangle \quad \text{où } e_k = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kième place}}}{1}, 0, \dots)$$

soit encore $\langle \xi, u(e_k) \rangle$ qui égale le produit de α_k par la k -ième coordonnée de ξ . Lorsque $p = 1$ on vérifie de même que les valeurs de ${}^t u(\xi)$ sur les vecteurs e_k , forment une suite sommable $(\alpha_k \xi_k)$ et que pour tout x de ℓ^∞ on a $\langle {}^t u(\xi), x \rangle = \sum \alpha_k \xi_k x_k$.

L'application du lemme fondamental conduit ici à la

PROPOSITION 4.

Quels que soient p , (α_k) vérifiant les hypothèses du théorème et
quelle que soit la probabilité cylindrique μ scalairement concentrée sur les
bornées de $\ell^{p'}$, on a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u(\mu)(A_{r,n}) = 0 \quad ,$$

où $A_{r,n} = \{y \in \mathcal{L}^P ; \sum_1^n |y_k|^P \geq r^P\}$.

Toutes les limites considérées existent car on a affaire à des suites monotones et bornées. Si nous effectuons l'homothétie de rapport λ dans $\mathcal{L}^{P'}$ et considérons la probabilité image λ^μ , nous obtenons la même double limite puisque $\lambda \cdot A_{r,n} = A_{\lambda r,n}$. Soit $\eta = 1 - \mu^\lambda \{x ; \|x\|_P \leq 1\}$; l'ensemble $u^{-1}(A_{r,n})$ est un cylindre de $\mathcal{L}^{P'}$ dont l'image par application $x \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est l'ensemble $F = \{t \in \mathbb{R}^n , \sum_1^n \frac{\alpha_k}{r} |t_k|^P \geq 1\}$, tandis que l'image de μ est scalairement concentrée à η près sur l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} , \sum_1^n |t_k|^{P'} \leq 1\}$ et donc concentrée sur \int_F à moins de $C(\eta + \frac{1}{\eta^P} U(\frac{\alpha}{r})(1 + \log \frac{1}{\eta}))$ près. Le double passage à la limite implique que la quantité considérée dans l'énoncé de la proposition 4 est inférieure à C_η . La première remarque suivant la définition 5, et le début de cette démonstration prouvent alors qu'en fait cette quantité est nulle.

Pour la démonstration du théorème on considère l'injection i de l'espace normé \mathcal{L}^P dans l'espace topologique produit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = S$, qui est continue. Ces espaces étant polonais toute partie borélienne de \mathcal{L}^P est aussi une partie borélienne de S (on peut le voir directement en sachant que la tribu borélienne de S est sa tribu cylindrique et que toute boule $\{y \in \mathcal{L}^P ; \|y\|_P \leq a\}$ de \mathcal{L}^P est une intersection dénombrable de cylindres $\int B_{a,n}$ de S , où $B_{a,n} = \{z \in S ; \sum_1^n |z_k|^P \geq a^P\}$) . Puisque $i^{-1}(B_{a,n}) = A_{a,n}$, la proposition 4 se traduit immédiatement avec $\xi = i(u(\mu))$.

Prenant donc une probabilité cylindrique μ comme dans l'énoncé du théorème, on sait que la probabilité image ξ provient d'une probabilité de Radon q sur S : $\xi = q_c$. Nous allons d'abord montrer que q est portée par la partie borélienne \mathcal{L}^P de S : $q(\mathcal{L}^P) = 1$, et donc qu'il existe une probabilité

de Radon m sur \mathcal{L}^p telle que $i(m) = q$. D'après les propriétés séquentielles des mesures abstraites nous avons :

$$q(\mathcal{L}^p) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{r,n}$$

où $\alpha_{r,n} = q(\bigcup B_{r,n}) = u(\mu)(\bigcup A_{r,n})$, puisque l'on a $\mathcal{L}^p = \bigcup_r \bigcap_n (\bigcup B_{r,n})$. De la traduction de la proposition 4 découle l'assertion.

Il reste à montrer que $u(\mu)$ provient de m , pour établir que u est radonifiante. Etablissons que les transformées de Fourier φ et Ψ de $u(\mu)$ et de m_c sont égales. Celles de ξ et de $i(m_c)$ sont égales, donc $\varphi \circ \tau_i = \Psi \circ \tau_i$, ce qui signifie que φ et Ψ sont égales sur le dual $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Dans le cas $p > 1$, on conclut que $\varphi = \Psi$ sur $\mathcal{L}^{p'}$ en utilisant le fait que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est une partie dense de cet espace normé, et que φ et Ψ sont continues sur cet espace normé en vertu de la proposition 3 et de ce que $u(\mu)$ est l'image d'une probabilité cylindrique scalairement concentrée sur les bornées de $\mathcal{L}^{p'}$, donc scalairement concentrée sur les bornées de \mathcal{L}^p .

Dans le cas $p = 1$, on va montrer que φ et Ψ passent à la limite sur certaines suites particulières. Pour tout $a \in \mathcal{L}^\infty$, dual de \mathcal{L}^1 , on note $a^{(k)}$ la suite tronquée, définie par

$$a_n^{(k)} = a_n \text{ si } n \leq k, \quad a_n^{(k)} = 0 \text{ si } k < n.$$

On a donc $a = \lim_k a^{(k)}$ pour la topologie $\sigma(\mathcal{L}^\infty, \mathcal{L}^1)$, et $\Psi(a) = \lim_k \Psi(a^{(k)})$, d'après le théorème de convergence dominée appliqué à la suite de fonctions sur $\mathcal{L}^1 : x \mapsto \langle x, a^{(k)} \rangle$, et à la probabilité de Radon m sur \mathcal{L}^1 .

Pour étudier φ nous donnons une interprétation de la probabilité cylindrique μ sur $\mathcal{L}^\infty = E$, en termes de variables aléatoires. Pour chaque suite (b_1, \dots, b_n) d'éléments de E' , l'image b_1, \dots, b_n de μ par l'application $x \mapsto \langle x, b_1 \rangle, \dots, \langle x, b_n \rangle$ de E dans \mathbb{R}^n , est élément

d'un système de marges compatibles. D'après le théorème de Kolmogorov, il existe sur l'espace $\Omega = \mathbb{R}^{E'}$, muni de la tribu produit, une probabilité abstraite P unique, telle que b_1, \dots, b_n soit toujours l'image de P par l'application $(x_b)_{b \in E'} \mapsto (x_{b_1}, \dots, x_{b_n})$. En particulier, à chaque $b \in E'$ est associée la variable aléatoire X_b sur $\Omega : (x_t)_{t \in E'} \mapsto x_b$, dont la loi est μ_b . La correspondance $b \mapsto X_b$ est linéaire, entre l'espace E' et l'espace \mathfrak{M} des variables aléatoires sur Ω .

Nous allons montrer que la restriction de X au sous-espace \mathcal{L}^1 de E' , a des propriétés de continuité séquentielle : pour tout $b \in \mathcal{L}^1$, la variable aléatoire X_b est limite en probabilité des variables $X_{b(k)}$. Soient en effet $\epsilon > 0$, $\eta > 0$; il existe r tel que pour tout $y \in \mathcal{L}^1$ on ait

$$\mu\{x \in \mathcal{L}^\infty ; |\langle x, y \rangle| > r \|y\|_1\} \leq \epsilon,$$

puisque μ est scalairement concentrée sur les bornées de \mathcal{L}^∞ . Soit alors n tel que $\sum_n |b_m| < \frac{1}{r} \cdot \eta$; alors pour tout $k \geq n$ on a :

$$\mu\{x \in \mathcal{L}^\infty ; |\sum_{k+1}^\infty x_m b_m| > \eta\} \leq \epsilon$$

ce qui équivaut à :

$$P\{|X_b - X_{b(k)}| > \eta\} \leq \epsilon.$$

Etudions en termes de variables aléatoires, l'effet de l'application u . Soit Y la composée de ${}^t u : \mathcal{L}^\infty \rightarrow E'$, et de $X : E' \rightarrow \mathfrak{M}$. Je dis que pour tout $a \in \mathcal{L}^\infty$, la loi de Y_a égale ${}_a u(\mu)$; on a en effet :

$${}_a u(\mu) = {}^t u(a)^\mu = \text{loi de } X({}^t u(a)) = \text{loi de } Y_a.$$

Puisque l'image de \mathcal{L}^∞ par ${}^t u$ est en fait contenue dans \mathcal{L}^1 , ce qui précède montre que pour tout $a \in \mathcal{L}^\infty$, Y_a est la limite en probabilité des variables $Y_a(k)$, pour $k \rightarrow \infty$.

Utilisons la transformation de Fourier : puisque $\varphi(a)$ est l'intégrale de la fonction $t \rightarrow e^{it}$ pour la mesure ${}_a u(\mu)$ sur \mathbb{R} , c'est aussi l'espérance

mathématique de la variable aléatoire e^{iY_a} sur Ω .

Lorsque $k \rightarrow \infty$, les variables $e^{iY_{a^{(k)}}}$ sont uniformément bornées et convergent en probabilité vers e^{iY_a} ; elles convergent donc en moyenne et l'on a établi ainsi que $\varphi(a)$ est la limite des $\varphi(a^{(k)})$, ce qui établit l'égalité de φ et Ψ sur \mathcal{L}^∞ , et donc l'égalité de $u(\mu)$ et de m_c , ce qui prouve que u est une application radonifiante.

* *
*