SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Un résultat de théorie du potentiel

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 3 (1969), p. 144-151
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1969__3__144_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1967/68

UN RÉSULTAT DE THÉORIE DU POTENTIEL

(P.A.Meyer)

Notre objet est la démonstration du théorème suivant, nécessaire* au travail de M.WEIL sur le comportement des fonctions co-excessives. Nous rappellerons en temps utile (§1) en quoi consistent les hypothèses de KUNITA-WATANABE.

THÉORÈME 1.- Sous les hypothèses K-W, soit μ une mesure qui ne charge pas les ensembles polaires . Il existe alors une mesure ν équivalente à μ dont le potentiel de Green $G\nu$ est borné.

Malgré l'aspect innocent de ce théorème (qui est tout à fait banal en théorie classique du potentiel), nous ne savons pas le démontrer sans mettre en jeu toute la grosse artillerie des processus de Markov. On peut espérer que quelqu'un en trouvera un jour une démonstration plus simple !

§ 1. RAPPELS SUR LES HYPOTHÈSES K-W . RÉDUCTIONS PRÉLIMINAIRES

1. E est un espace localement compact à base dénombrable. (P_t) est un semi-groupe sous-markovien standard sur E, et on suppose pour simplifier que les noyaux P_t transforment les fonctions boréliennes en fonctions boréliennes. On désigne par (U_p) la résolvante de (P_t), et on suppose que le noyau $U=U_0$ transforme les éléments de $\underline{\underline{C}}_c^+$ (fonctions positives continues à support compact) en fonctions (boréliennes) bornées.

Rappelons qu'on appelle conoyau sur E (par abus de langage) un noyau sur E pour lequel on adopte des notations inverses des notations usuelles (un conoyau opère à gauche sur les mesures, à droite sur les fonctions). On désigne par $(\hat{U}_p)$ une résolvante sur E, non nécessairement sous-markovienne, constituée par des conoyaux " fortement fellériens" : pour tout p, y compris p=0, la transformée $f\hat{U}_p$ d'une fonction f borélienne bornée à support compact est continue bornée. De plus, on suppose que si $f\in\underline{\underline{C}}_c^+$, $pf\hat{U}_p$ converge simplement vers f en restant bornée lorsque $p\to\infty$.

*En fait, ce théorème ne sert plus dans la rédaction définitive de l'article de WEIL (à paraître au Z. für W.).

Les fonctions excessives par rapport à la résolvante $(\hat{U}_p)$ seront appelées fonctions coexcessives. Le préfixe co- pourra être utilisé de manière analogue en d'autres circonstances.

Enfin, on désigne par η une mesure de Radon sur E, et on suppose que les deux résolvantes (U_p) et $(\hat{U}_p)$ sont en dualité par rapport à η : nous énoncerons cette propriété sous la forme la plus forte (équivalente à des formes plus faibles qui ne nous intéresseront pas ici) : pour tout $p>0$, il existe une fonction borélienne positive $g_p(x,y)$ sur $E\times E$, telle que $g_p(.,y)$ soit p-excessive pour tout $y\in E$, que $g_p(x,.)$ soit p-coexcessive (donc s.c.i.) pour tout $x\in E$, et que l'on ait

$$U_p(x,dy) = g_p(x,y)\eta(dy) \quad , \quad \hat{U}_p(dx,y) = \eta(dx)g_p(x,y) \quad .$$

Nous écrirons $g(x,y)$ au lieu de $g_0(x,y)$, et nous noterons g_y l'application $g(.,y)$. Si μ est une mesure positive, le potentiel de Green de la mesure μ est par définition la fonction excessive $G\mu = \int g(.,y)\mu(dy)$. On définit de même le copotentiel de Green $\mu\hat{G}= \int\mu(dx)g(x,.)$.

Rappelons maintenant les résultats de KUNITA-WATANABE que nous utiliserons le plus. Tout d'abord, si une fonction excessive finie pp u admet deux représentations de Green $u=G\mu=G\mu'$, on a $\mu=\mu'$. Ensuite :

THÉORÈME A.- Soit u une fonction excessive finie pp, et soit A un ensemble borélien relativement compact dans E . La réduite $P_A u$ est alors le potentiel de Green d'une mesure positive μ unique, portée par $\bar{A}$. Il en est de même pour un ensemble borélien A quelconque si u (partout finie) est un potentiel de la classe (D).

(La seconde assertion est vraie en fait pour des "potentiels" plus généraux que les potentiels de la classe (D)).

De plus, les hypothèses K-W entraînent que le semi-groupe standard (P_t) satisfait à l'hypothèse (B) de HUNT. De manière précise, on a la propriété analytique que $P_A G\mu = G\mu$ si μ est portée par l'intérieur de A, et la propriété stochastique suivante :

THÉORÈME B.- Soient (X_t) un processus markovien standard admettant (P_t) comme semi-groupe de transition, et A un ensemble borélien semi-polaire. Alors $P\{\exists t>0 : X_t \in A, X_t \neq X_{t-}\} = 0$.

Un mot enfin sur les processus que nous utiliserons : nous les construirons sur l'ensemble Ω de toutes les applications ω de $\mathbb{R}_+$ dans $E\cup\{\partial\}$, continues à droite, admettant une durée de vie $\zeta(\omega)$, admettant des limites à gauche sur l'intervalle $]0,\zeta(\omega)[$. Comme d'habitude, nous désignerons par X_t les **variables aléatoires du processus** ($X_t(\omega)=\omega(t)$), et nous utiliserons sans autre commentaire les autres notations usuelles.

2. Pour démontrer le th.1, nous allons nous ramener à traiter séparément les deux cas suivants :

a) μ ne charge pas les ensembles semi-polaires

b) μ ne charge pas les ensembles polaires, mais est portée par un ensemble borélien semi-polaire.

Il suffit évidemment de montrer que μ peut se mettre sous la forme $\mu=\mu'+\mu''$, où μ' possède la propriété a), et μ'' la propriété b). Cela résulte du lemme général suivant (bien connu) appliqué à l'ensemble des boréliens semi-polaires.

LEMME 1.- Soient E un espace localement compact à base dénombrable*, $\underline{\underline{N}}$ un ensemble de parties boréliennes de E, possédant la propriété suivante : pour toute suite (A_n) d'éléments de $\underline{\underline{N}}$, on a $\bigcup_n A_n \in \underline{\underline{N}}$. Alors toute mesure μ sur E admet une décomposition unique de la forme $\mu=\mu'+\mu''$, où μ' ne charge aucun élément de $\underline{\underline{N}}$, et où μ'' est portée par un élément de $\underline{\underline{N}}$.

DÉMONSTRATION.- Nous utiliserons le sous-lemme suivant : si I est un ensemble de mesures positives, filtrant croissant et majoré, il existe une partie dénombrable J de I admettant la même borne supérieure que I. En effet, choisissons un recouvrement dénombrable $\underline{\underline{U}}$ de E par des ouverts relativement compacts, et une partie dénombrable J de I telle que $\sup_{\eta\in J} \eta(U) = \sup_{\eta\in I} \eta(U)$ pour $U\in$. Alors la mesure positive $\lambda = \sup I - \sup J$ est telle que $\lambda(U)=0$ pour tout $U\in\underline{\underline{U}}$, donc $\lambda=0$.

Appliquons cela à l'ordonné filtrant I des mesures $\nu\leq\mu$ qui sont portées par un élément de $\underline{\underline{N}}$: il en résulte aussitôt que la mesure $\mu'' = \sup I$ est encore portée par un élément de $\underline{\underline{N}}$, et $\mu-\mu'' = \mu'$ ne charge évidemment aucun élément de $\underline{\underline{N}}$.

* S'étend aux mesures abstraites σ-finies.

§ 2. LE CAS OÙ μ NE CHARGE PAS LES SEMI-POLAIRES

1. La discussion de ce cas repose sur le théorème suivant. Des modifications évidentes permettent de supposer A presque-borélien, au lieu de borélien.

THÉORÈME 2.- Soient A un ensemble borélien, et H l'ensemble des $y \in A$ tels que $P_A g_y \neq g_y$. Alors H est borélien, et tout compact de H est semi-polaire.

(D'après un théorème récent de DELLACHERIE, H est donc semi-polaire)

DÉMONSTRATION.- Choisissons une fonction continue f, strictement positive en tout point, telle que $f\hat{U}$ soit bornée (il est aisé de construire f comme somme de fonctions continues à support compact). Soit $Z=\{y : P_A g_y \neq g_y\}$; deux fonctions excessives égales presque partout étant égales partout, et $\langle f, g_y \rangle_\eta = f\hat{U}(y)$ étant fini pour tout y, la relation $P_A g_y \neq g_y$ équivaut à $\langle f, P_A g_y \rangle_\eta <$ $\langle f, g_y \rangle_\eta$, ou à $((f.\eta)P_A)\hat{G}^y < (f.\eta)\hat{G}^y$. Ces deux fonctions sont des copotentiels ; elles sont donc semi-continues inférieurement, et il en résulte que Z est borélien. Par conséquent $H=A\cap Z$ est borélien.

Soit K un compact de H : pour tout $y \in K$ on a $\langle f, P_H g_y \rangle_\eta <$ $\langle f, g_y \rangle_\eta$, et a fortiori $\langle f, P_K g_y \rangle_\eta < \langle f, g_y \rangle_\eta$, donc aussi $\langle f, P_K G\lambda \rangle_\eta$ $< \langle f, G\lambda \rangle_\eta$ pour toute mesure $\lambda \neq 0$ portée par K, et finalement $P_K G\lambda \neq G\lambda$.

Soit C un ensemble finement parfait contenu dans K : on a $P_C P_C 1 = P_C 1$, donc $P_K P_C 1 = P_C 1$. Mais, d'après le théorème A du §1, on peut écrire $P_C 1 = G\lambda$, où λ est une mesure portée par $\overline{C}$, donc par K. La relation précédente s'écrit alors $P_K G\lambda = G\lambda$, et entraîne $\lambda=0$, donc $P_C 1 = 0$, et $C=\emptyset$. Autrement dit, K ne contient aucun ensemble finement parfait , et cela entraîne que K est semi-polaire ([ ], chap.XV, T67).

Voici une importante conséquence du théorème 2 :

THÉORÈME 3.- Soient μ une mesure qui ne charge pas les ensembles semi-polaires. A un ensemble borélien portant μ. Alors $P_A G\mu = G\mu$.

DÉMONSTRATION.- Comme μ est portée par A, et ne charge aucun compact de H, on a $P_A G\mu = \int_A P_A g_y\ \mu(dy) = \int_{A\setminus H} P_A g_y\ \mu(dy) = \int_{A\setminus H} g_y dy$ $= G\mu$.

2. Nous pouvons achever la démonstration de la première étape du th.1. Soit μ une mesure qui ne charge pas les ensembles semi-polaires, et soit (A_n) une partition de E en une suite d'ensembles boréliens relativement compacts ; posons $\mu_n = I_{A_n}.\mu$. Je dis que le potentiel $G\mu_n$ est fini presque partout (donc quasi-partout : [ ], chap.XV, T27). En effet, soit f une fonction continue strictement positive en tout point, telle que $f\hat{U}$ soit bornée ; μ_n étant une mesure à support compact, on a $+\infty > \langle f\hat{U},\mu_n\rangle$ $= \langle f,G\mu_n\rangle$. Posons alors $A_{nm} = \{x\in A_n : m \leqq G\mu_n < m+1\}$, et $\mu_{nm} = I_{A_{nm}}.\mu_n$. Comme μ_n ne charge pas l'ensemble polaire $\{G\mu_n = +\infty\}$, on a $\mu_n =$ $\sum_m \mu_{nm}$. Comme $G\mu_{nm}$ est bornée par m+1 sur A_{nm} (donc aussi sur son adhérence fine), $P_{A_{nm}} G\mu_{nm} \leqq m+1$ partout ; d'autre part, μ_{nm} ne chargeant pas les ensembles semi-polaires, le th.3 entraîne que $P_{A_{nm}} G\mu_{nm} = G\mu_{nm}$. Il ne reste plus qu'à poser $\theta =$ $\sum \frac{1}{2^{n+m}(m+1)}\mu_{nm}$ pour obtenir une mesure θ équivalente à μ, et dont le potentiel est borné.

§3. LE CAS OÙ μ EST PORTÉE PAR UN ENSEMBLE SEMI-POLAIRE

1. Rappelons qu'un ensemble borélien A est dit <u>totalement effilé</u> si la fonction $P_A^1 1$ est bornée sur A par une constante <1. Tout ensemble semi-polaire étant réunion d'une suite d'ensembles totalement effilés (cf [ ], chap.XV, T29). Il suffira de traiter le cas où μ est <u>portée par un ensemble totalement effilé A</u>. Nous désignerons par T_n les temps d'arrêt définis par récurrence par $T_0=0$, $T_{n+1} = T_n + T_A\circ\theta_{T_n}$: l'ensemble $\{(t,\omega) : X_t(\omega)\in A\}$ est alors la réunion des graphes des temps d'arrêt T_n.

Nous commencerons par un théorème général dû à BLUMENTHAL et GETOOR (sous la forme présente), et qui n'a rien à voir avec μ ni avec A .

THÉORÈME 4.- <u>Soit (C_t) une fonctionnelle additive dont le potentiel $U_C 1$ est fini, et qui possède la propriété suivante</u>

<u>pour toute loi</u> λ, $P^\lambda\{\exists t : X_t \neq X_{t-} \text{ et } C_t \neq C_{t-}\} = 0$.

<u>Soit</u> ν <u>l'unique mesure telle que</u> $U_C 1 = G\nu$. <u>Alors</u> $U_C f = G(f.\nu)$ <u>pour toute fonction positive borélienne</u> f.

DÉMONSTRATION.- Montrons d'abord que $P_G U_C f = U_C f$ si f est nulle hors de G ouvert. En effet, $P_G U_C f = E^\bullet[\int_{T_G+}^{\infty} f\circ X_s dC_s]$, T_G étant exclu de l'intervalle d'intégration, tandis que $U_C f = E^\bullet[\int_{T_G-}^{\infty} \ldots]$, T_G étant cette fois inclus, du fait que $f\circ X_s = 0$ pour $s < T_G$. Tout revient donc à montrer que $E^\bullet[f\circ X_{T_G}(C_{T_G} - C_{T_G-})] = 0$. Or, de deux choses l'une : ou bien $X_{T_G} = X_{T_G-}$, et alors X_{T_G} appartient à la frontière de G, et $f\circ X_{T_G} = 0$; ou bien $X_{T_G} \neq X_{T_G-}$, et alors c'est $C_{T_G} - C_{T_G-}$ qui est nul : le produit est donc toujours nul, et le résultat cherché est établi.

Nous dirons qu'un ensemble borélien H est C-<u>négligeable</u> si $U_C(I_H)=0$. Soit λ une mesure équivalente à η, telle que $<\lambda, U_C 1> < \infty$; la fonction excessive $U_C(I_H)$ est nulle si et seulement si $<\lambda, U_C I_H> = 0$. Autrement dit, H est C-négligeable si et seulement si H est négligeable pour la mesure λU_C. On en déduit aussitôt que les ouverts V dont la frontière est à la fois C-négligeable et ν-négligeable forment une base $\underline{\underline{B}}$ de la topologie de E.

Il nous suffira maintenant de montrer que $U_C v = G(v.\nu)$ lorsque v est l'indicatrice d'un ouvert $v \in \underline{\underline{B}}$. Soit W l'intérieur de V^c, et soit w l'indicatrice de W. La frontière de V et W étant C-négligeable, nous avons $U_C 1 = U_C v + U_C w$. D'après le th.A du §1 , nous pouvons écrire $U_C v = P_V U_C v = G\lambda$, où λ est portée par $\overline{V}$. De même, on peut écrire $U_C w = G\mu$, où μ est portée par $\overline{W}$. La relation $G\lambda + G\mu = G\nu$ entraîne $\lambda + \mu = \nu$, et comme ν ne charge pas les frontières on voit que λ est portée par V, μ par W. On n'a alors pas le choix : $\lambda = v.\nu$, $\mu = w.\nu$, qui est le résultat cherché.

2. Nous passons maintenant à l'achèvement de la démonstration du th.1, qui utilisera quelques lemmes.

Choisissons d'abord une fonction continue g, strictement positive en tout point de E, dont le potentiel $p=Ug$ est borné, et posons

$$q = P_A Ug = P_A p \quad .$$

Comme p est un potentiel de la classe (D), il en est de même de q , et q est donc le potentiel U_H d'une fonctionnelle additive <u>naturelle</u> (au sens des "processus croissants naturels") H . Nous poserons $C=I_A.H$.

LEMME 2 .- <u>Tout sous-ensemble borélien</u> C-<u>négligeable de</u> A <u>est polaire</u>.

DÉMONSTRATION.- Tout revient à montrer que si un sous-ensemble borélien B de A n'est pas polaire, B n'est pas C-négligeable. Or A étant totalement effilé, on montre aisément qu'il existe une loi λ telle que $P^\lambda\{X_{T_A} \in B\}>0$. Le lemme sera donc établi si nous prouvons que l'on a p.s. $C_{T_A}-C_{T_A-}>0$ (ou encore $H_{T_A}-H_{T_A-}>0\}$ sur l'ensemble $\{T_A<\infty\}$. Les " p.s." sont ici relatifs à P^λ.

Notons d'abord que la variable aléatoire $p\circ X_{T_A}-q\circ X_{T_A}$ est p.s. > 0 sur $\{T_A<\infty\}$. Comme $X_{T_A}\in A$ p.s., cela revient à montrer que $p(x)-q(x)>0$ pour tout $x\in A$; mais cette expression est égale à $E^x[\int_0^{T_A} g\circ X_s ds]$; comme $T_A>0$ P^x-p.s., et que g est strictement positive, la relation $p(x)-q(x)>0$ est évidente.

Construisons ensuite une suite décroissante (U_n) d'ouverts contenant A, telle que les temps d'arrêt $S_n=T_{U_n}$ convergent P^λ-p.s. vers T_A sur $\{T_A<\infty\}$ (notons qu'il se peut que S_n tende vers $\zeta<\infty$ sur $\{T_A=\infty\}$) . Comme la fonctionnelle H est naturelle, on a en posant $S=\lim_n S_n$ ($S=T_A$ sur $\{T_A<\infty\}$)

$$H_S - \lim_m H_{S_m} = \lim_m E[H_S-H_{S_m} \mid \underline{\underline{F}}_{S_m}] = \lim_m E[q\circ X_{S_m}-q\circ X_S \mid \underline{\underline{F}}_{S_m}]$$

$$= \lim_m E[\int_{S_m+T_A\circ\theta_{S_m}}^{\infty} g\circ X_s ds \mid \underline{\underline{F}}_{S_m}] - E[q\circ X_S \mid \bigvee_m \underline{\underline{F}}_{S_m}]$$

Mais nous savons que $X_{T_A} = X_{T_A-}$ p.s. sur $\{T_A<\infty\}$: on a donc $S_m < T_A$ sur $T_A<\infty$, donc $S_m+T_A\circ\theta_{S_m} = T_A$, et la même relation est évidemment vraie sur $\{T_A=\infty\}$. La première intégrale vaut donc $\int_{T_A}^{\infty} g\circ X_s ds$, et la première espérance conditionnelle tend donc vers $E[\int_{T_A}^{\infty} g\circ X_s | \bigvee_m \underline{\underline{F}}_{S_m}] = E[\ldots|\underline{\underline{F}}_{T_A} | \bigvee_m \underline{\underline{F}}_{S_m}] = E[p\circ X_{T_A} | \bigvee_m \underline{\underline{F}}_{S_m}]$. Comme q est nulle au point ∂, on a donc finalement

$$H_S - \lim_m H_{S_m} = E[(p-q)\circ X_{T_A} | \bigvee_m \underline{\underline{F}}_{S_m}]$$

Notons maintenant le petit lemme suivant de théorie du conditionnement : si ϕ est une variable aléatoire positive, et si $\underline{\underline{G}}$ est une tribu, l'ensemble $\{E[\phi|\underline{\underline{G}}]>0\}$ contient p.s. l'ensemble $\{\phi>0\}$. En effet, l'intégrale de ϕ sur $\{E[\phi|\underline{\underline{G}}]=0\}$ est nulle, donc $\phi=0$ p.s. sur cet ensemble, et le résultat s'ensuit par passage au complémentaire Appliquons cela avec $\phi=(p-q)\circ X_{T_A}$, $\underline{\underline{G}}=\bigvee_m \underline{\underline{F}}_{S_m}$: il vient que $H_S > \lim_m H_{S_m}$ p.s. sur $\{T_A<\infty\}$. Le lemme est établi.

FIN DE LA DEMONSTRATION DU TH.1.- Reprenons une mesure μ qui ne charge pas les ensembles polaires et qui est portée par A ; désignons par ν la mesure dont le potentiel de Green est $q=U_C 1$. Cette mesure a un potentiel borné, et je dis que μ est absolument continue par rapport à ν : cela achèvera la démonstration.

Il suffit de prouver que toute partie de A ν-négligeable est μ-négligeable ; or soit B une partie ν-négligeable de A : la relation $G(I_B.\nu)=0$ entraîne $U_C I_B = 0$, en vertu du th.4 et du th.B du §1 . Mais cela entraîne que B est polaire (lemme 2), donc μ-négligeable. Le théorème est prouvé.

BIBLIOGRAPHIE

Les références marquées [ ] renvoient toutes à MEYER, Processus de Markov, Lecture Notes in Math. vol.26 ; les résultats de KUNITA-WATANABE cités au début se trouvent dans leur article Markov Processes and Martin boundaries I , Ill. J. of M., 1965, 485-526.