

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CATHERINE HUBER

**Un aspect de la loi du logarithme itéré pour des variables
aléatoires indépendantes et équidistribuées**

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 3 (1969), p. 137-142

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1969__3__137_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

Laboratoire Associé au C.N.R.S.

STRASBOURG

- Séminaire de Probabilités -

1967-68

UN ASPECT DE LA LOI DU LOGARITHME ITÉRÉ POUR DES
VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES ET ÉQUIDISTRIBUÉES

Catherine HUBER *

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées, et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

On suppose que la suite (S_n) obéit à la loi du logarithme itéré. Comme l'a montré V. Strassen ¹⁾, il faut et il suffit pour cela que les deux premiers moments de la loi commune des X_k existent et soient finis ; on ne restreindra pas la généralité du problème en les supposant égaux respectivement à 0 et à 1 .

$$E(X_k) = 0$$

$$E(X_k^2) = 1$$

Le problème considéré est alors le suivant :

Existe-t-il une fonction $\varphi(n)$ et une variable aléatoire Y non presque sûrement nulle et non presque sûrement infinie telle que

* Rapport sur un travail fait à Zurich.

$$\limsup \frac{S_n - \sqrt{2n \text{LogLog} n}}{\varphi(n)} = Y \quad \text{p. s.}$$

Nous allons en premier lieu montrer que la variable aléatoire Y , si elle existe, est presque sûrement égale à une constante, puis donner une valeur de $\varphi(n)$ dans le cas où la fonction de répartition des X_k est soumise à une certaine condition asymptotique.

1. Y , si elle existe, est presque sûrement constante.

En effet, soit α une constante réelle fixée. Evaluons $P(Y > \alpha)$

$$\begin{aligned} P(Y > \alpha) &= P \left(\limsup \frac{S_n - \sqrt{2n \text{LogLog} n}}{\varphi(n)} > \alpha \right) \\ &= P \left(S_n > \sqrt{2n \text{LogLog} n} + \alpha \varphi(n) \text{ pour une infinité de valeurs de } n \right) \end{aligned}$$

Le théorème 1, dû à P. Lévy²⁾, montre que cette probabilité ne peut être que 0 ou 1.

Théorème 1.

Si $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ sont les sommes successives d'une série à termes aléatoires indépendants et essentiellement divergente, si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ sont des constantes données, la probabilité que l'on ait $S_n > A_n$ pour une infinité de valeurs de n ne peut être que 0 ou 1.

Par suite la variable aléatoire Y , si elle existe, est presque sûrement égale à une constante que l'on peut prendre égale à 1.

Or, d'après le théorème 1, l'inégalité

$$S_n > \sqrt{n}\psi(n) \quad (1)$$

détermine une partition de l'ensemble de toutes les fonctions $\psi(n)$ en deux classes de la façon suivante :

$\psi(n)$ appartient à la classe supérieure S si :

$S_n > \sqrt{n}\psi(n)$ n'arrive que pour un nombre presque sûrement fini de valeurs de n .

$\psi(n)$ appartient à la classe inférieure I si :

$S_n > \sqrt{n}\psi(n)$ arrive pour une infinité de valeurs de n , et cela presque sûrement.

Le problème initial se ramène donc à celui de trouver un critère d'appartenance à la classe supérieure ou inférieure.

2. Existence et calcul de $\varphi(n)$ sous certaines hypothèses de régularité de la fonction de répartition des X_k .

W. Feller ³⁾ a donné une caractérisation des classes supérieure et inférieure dans le cas où la fonction $\psi(n)$ est monotone. Soit

$$V(x) = P(X_k \leq x)$$

la fonction de répartition des X_k .

Théorème 2.

3) Si, quand x tend vers l'infini

$$\int_{\{|t| > x\}} t^2 dV(t) = O[(\text{Log Log } x)^{-1}] \quad (2)$$

alors la suite monotone $\psi(n)$ appartient à la classe supérieure (inférieure) si et seulement si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n} e^{-\frac{1}{2} \psi^2(n)} \quad (3)$$

est convergente (divergente). Ce critère n'est plus valable si

$$\text{Log Log } x \int_{\{|t| > x\}} t^2 dV(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$$

Donc, si l'on considère une suite de variables aléatoires dont la fonction de répartition commune vérifie la condition (2), et une suite monotone $\psi(n)$ de la forme

$$\psi(n) = \sqrt{2\text{LogLog}n + \beta \text{LogLogLog}n}$$

la série (3) converge pour $\beta > 3$

diverge pour $\beta \leq 3$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} \sqrt{2\text{Log}_2 n + \beta \text{Log}_3 n} &\in S \quad \text{si } \beta > 3 \\ &\in I \quad \text{si } \beta \leq 3 \end{aligned}$$

en notant $\text{LogLog} \dots \text{Log}n = \text{Log}_k n$

c'est-à-dire que

$$B_n = \left\{ S_n > \sqrt{2\text{Log}_2 n + \beta \text{Log}_3 n} \sqrt{n} \right\} \text{ arrive une infinité de fois p. s. si } \beta \leq 3$$

un nombre fini de fois p. s. si $\beta > 3$

L'évènement B_n peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned}
 B_n &= \left\{ S_n - \sqrt{2n \log_2 n} > \sqrt{2n \log_2 n} \left(\sqrt{1 + \frac{\log_3 n}{2 \log_2 n}} - 1 \right) \right\} \\
 &> \sqrt{2n \log_2 n} \left(\frac{\log_3 n}{4 \log_2 n} + \frac{\log_3 n}{\log_2 n} \epsilon \left(\frac{\log_3 n}{\log_2 n} \right) \right) \left. \vphantom{B_n} \right\} \\
 &\hspace{15em} \epsilon \left(\frac{\log_3 n}{\log_2 n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\
 &> \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{n}{2 \log_2 n}} \log_3 n (1 + \epsilon)
 \end{aligned}$$

d'où

$$\limsup \frac{S_n - \sqrt{2n \log_2 n}}{\frac{3}{2} \sqrt{\frac{n}{2 \log_2 n}} \log_3 n} = 1 \quad \text{p. s.}$$

Remarquons que cette solution du problème considéré

- 1) a été obtenue seulement sous l'hypothèse que la fonction de répartition commune aux variables aléatoires X_k vérifiait la condition (2)
- 2) n'est pas forcément unique, puisqu'elle peut dépendre du type de la fonction $\psi(n)$ choisie.

Références

- 1) V. Strassen : A converse to the law of the iterated logarithm,
Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie (received sept. 1965)

- 2) P. Lévy : Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars,
Paris 1954 , p. 147

- 3) W. Feller : The law of the iterated logarithm for identically distributed
random variables, Annals of Mathematics vol.47 , n°4 (1946)

* *
*