JACQUES AZÉMA
MARIE KAPLAN-DUFLO
DANIEL REVUZ

**Classes récurrentes d'un processus de Markov**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 2 (1968), p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1968__2__1_0>

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE
STRASBOURG

Séminaire de Probabilités Année 1966-67

# CLASSES RECURRENTES D'UN PROCESSUS DE MARKOV

(J. Azéma, M. Kaplan-Duflo, D. Revuz)

Cet exposé reprend pour l'essentiel les idées introduites dans (1). On définit la notion de récurrence dans les ouverts de la topologie fine associée au processus.

Cette notion permet d'avoir une "loi de 0-1" et d'introduire des classes récurrentes jouissant de propriétés analogues à celles des chaînes.

Les démonstrations ont cependant été simplifiées et dans certains cas précisées.

Les résultats nouveaux ont trait à la mesurabilité des classes récurrentes et aux rapports entre ces classes et les supports fins des mesures déterminées par les potentiels.

Ces résultats rendent en partie inutile l'introduction des classes (D) considérées dans (1). Il n'en sera donc pas fait mention ici.

Les notations utilisées sont celles de (3) et (4). Dans toute la suite nous considérons un processus de Hunt markovien.

## I. RECURRENCE : DEFINITION ET PROPRIETES GENERALES.

Proposition 1 - Soit $T$ un temps d'arrêt vérifiant la propriété suivante :

$$(*) \qquad \forall_\mu,\ P_\mu\text{- presque sûrement : } \begin{cases} t + T\circ\theta_t \geq T \\ \lim\limits_{t\to o} t + T\circ\theta_t = T \end{cases}$$

Alors pour tout temps d'arrêt $S$,

$$\forall_\mu,\ P_\mu\text{-presque sûrement } S + T\circ\theta_S \geq T$$

Démonstration : L'on a $s + T\circ\theta_s - T \geq 0$ $P_{\mu P_t}$-presque sûrement

ce qui s'écrit encore $s + (T\circ\theta_s - T)\circ\theta_t \geq 0$ $P_\mu$ -presque sûrement.

Donc :

$$\forall_\mu,\ P_\mu\text{- presque sûrement ; } t + s + T\circ\theta_{t+s} \geq t + T\circ\theta_t$$

Soit maintenant $S_n$ une suite de temps d'arrêt décroissant vers $S$, chacun des $S_n$ ne prenant qu'une infinité dénombrable de valeurs.

Il est clair que :

$$S_n + T\circ\theta_{S_n} \geq T. \qquad P_\mu\text{-presque sûrement;}$$

et que :

$$S_{n+1} + T\circ\theta_{S_{n+1}} \geq S_n + T\circ\theta_{S_n} \qquad P_\mu\text{- presque sûrement.}$$

Mais d'autre part, quel que soit $\lambda$ positif la fonction

$$\phi_\lambda : x \to E_x\, e^{-\lambda T}$$

est $\lambda$-excessive.

Il en résulte d'après la continuité à droite des fonctions : $t \to E_{X_t}\, e^{-\lambda T}$ que :

$$\lim_{n\to\infty} \uparrow P^\lambda_{S_n}\, \phi_\lambda(x) = P^\lambda_S\, \phi_\lambda(x)$$

et donc que :

$$\lim_{n \to \infty} \uparrow E_x \, e^{-\lambda(S_n + T \circ \theta_{S_n})} = E_x \, e^{-\lambda(S + T \circ \theta_S)}$$

On a donc :

$$\forall x, \; P_x \text{-presque sûrement,} \quad \lim_{n \to \infty} \downarrow S_n + T \circ \theta_{S_n} = S + T \circ \theta_S \; ;$$

l'inégalité cherchée en découle immédiatement.

Proposition 2 - Soit $T$ un temps d'arrêt vérifiant la propriété (*).

Posons :

$$\underline{\underline{R}}_T = \bigcap_{n=o}^{\infty} \{T \circ \theta_n < \infty\}$$

$$\underline{\underline{T}}_T = \bigcup_{n=o}^{\infty} \{T \circ \theta_n = \infty\}$$

Alors quelle que soit la mesure bornée $\mu$ , $P_\mu$-presque sûrement,

$$1_{\underline{\underline{R}}_T} = \lim_{t \to \infty} P_{X_t}(T < \infty) = \lim_{t \to \infty} P_{X_t}(\underline{\underline{R}}_T)$$

Démonstration : La fonction

$$\phi(x) = P_x(T < \infty) \quad \text{étant 0-excessive,}$$

$$\forall_\mu \quad Z = \lim_{t \to \infty} \phi(X_t)$$

existe $P_\mu$-presque sûrement en vertu du théorème de convergence des sur-martingales positives.

Considérons :

$$P_\mu(T < \infty \,|\, \underline{\underline{F}}_{T \wedge t}) = 1_{(T > t)} P_\mu(T < \infty \,|\, \underline{\underline{F}}_{T \wedge t}) + 1_{(T \leq t)}$$

D'après la proposition 1, $P_\mu$-presque sûrement,

$$(T < \infty) \supset (T \wedge t + T \circ \theta_{T \wedge t} < \infty)$$

Donc :

$$P_\mu\left(T < \infty \,|\, \underline{\underline{F}}_{T\wedge t}\right) \geqq 1_{(T>t)} P_\mu\left(T \circ \theta_{T\wedge t} < \infty \,|\, \underline{\underline{F}}_{T\wedge t}\right) + 1_{(T\leqq t)}$$

$$\geqq 1_{(T>t)} \phi(X_{T\wedge t}) + 1_{(T\leqq t)}$$

$$\geqq 1_{(T>t)} \phi(X_t) + 1_{(T\leqq t)}$$

Si $t$ tend vers l'infini cette inégalité devient

$$1_{(T<\infty)} \geqq 1_{(T=\infty)} Z + 1_{(T<\infty)} \qquad P_\mu\text{-presque sûrement } \forall \mu .$$

L'on a donc :

$$Z .\, 1_{(T=\infty)} = 0 \qquad P_\mu\text{-presque sûrement } \forall \mu .$$

En particulier l'on peut prendre pour loi initiale la mesure $\mu P_n$.

$P_{\mu P_n}$ est la mesure image de la mesure $P_\mu$ par l'application $\theta_n$.

L'on a donc :

$$Z\, 1_{(T = \infty)} = 0 \qquad P_{\mu P_n}\text{-presque sûrement}$$

c'est-à-dire :

$$0 = Z \circ \theta_n .\, 1_{(T=\infty)} \circ \theta_n = Z . 1_{(T \circ \theta_n = \infty)} \qquad P_\mu\text{-presque sûrement}$$

$$0 = \sup_n Z .\, 1_{(T \circ \theta_n = \infty)} = Z\, 1_{\underline{\underline{I}}_T} \qquad P_\mu\text{-presque sûrement.}$$

D'autre part, de la relation :

$$E_x\, \phi(X_t) = P_x\left(T \circ \theta_t < \infty\right)$$

on déduit que :

$$E_x\, Z = P_x\, \underline{\underline{R}}_T$$

Comme $Z$ est inférieure ou égale à $1$ et qu'elle est nulle sur $\underline{\underline{R}}_T^c$ , on a :

$$\forall \mu,\ P_\mu \text{-presque sûrement} \quad Z = 1_{\underline{\underline{R}}_T}$$

Notation Si $T_A$ est le temps d'entrée dans un ensemble presque borélien A, les ensembles $\underline{\underline{R}}_{T_A}$, $\underline{\underline{T}}_{T_A}$ seront notés respectivement $\underline{\underline{R}}_A$ et $\underline{\underline{T}}_A$.

Définition Soit $\underline{\underline{V}}_f(x)$ la base de filtre formée des voisinages fins presque boréliens de x.

Un point x sera dit finement récurrent (ou plus brièvement récurrent si aucune confusion n'est à craindre) si

$$\forall V \in \underline{\underline{V}}_f(x) \qquad P_x\, \underline{\underline{R}}_V > 0$$

Il sera dit finement transient dans le cas contraire, i.e.

$$\exists\, V \in \underline{\underline{V}}_f(x) \qquad P_x\, \underline{\underline{R}}_V = 0$$

Proposition 3 (Loi du 0-1)

x est finement récurrent si et seulement si :

$$\forall V \in \underline{\underline{V}}_f(x) \qquad P_x\, \underline{\underline{R}}_V = 1$$

Démonstration : Raisonnons par l'absurde et supposons que :

$$V \in \underline{\underline{V}}_f(x) \qquad 0 < P_x\, \underline{\underline{R}}_V < 1$$

La fonction :

$$x \to P_x\,(\underline{\underline{T}}_V) = 1 - P_x\,(\underline{\underline{R}}_V)$$

étant invariante est finement continue et il existe un voisinage fin de x, W, finement fermé presque borélien inclus dans V tel que :

$$a = \inf_{y \in W} P_y\, \underline{\underline{T}}_V > 0$$

Pour $P_x$-presque tout $\omega$ de $\underline{\underline{R}}_W$ on aurait alors d'une part

$$\underline{\lim}\, P_{X_t}\, \underline{\underline{T}}_V \geq a$$

et d'autre part, d'après la proposition 2,

$$\lim_{t\to\infty} P_{X_t}\, \underline{\underline{T}}_V = 1 - \lim_{t\to\infty} P_{X_t}\, \underline{\underline{R}}_V = 1 - 1_{\underline{\underline{R}}_V} \qquad P_x\text{-presque sûrement}$$

Il y a une contradiction puisque $\underline{\underline{R}}_W \subset \underline{\underline{R}}_V$.

Proposition 4 - Soit $x$ un point finement récurrent et $(A_t)$ une fonctionnelle additive. Alors l'on a soit $P_x\left(A_\infty = 0\right) = 1$

soit $P_x\left(A_\infty = \infty\right) = 1$

Démonstration : Remarquons tout d'abord que si $x$ est finement récurrent et si $T$ est un temps d'arrêt vérifiant la propriété (*)

$$P_x\left(T<\infty\right) > 0 \Leftrightarrow P_x\left(T < \infty\right) = 1 \Leftrightarrow P_x\, \underline{\underline{R}}_T = 1 .$$

En effet la fonction $y \to P_y\left(T<\infty\right)$ étant 0-excessive, il existe un voisinage fin, finement fermé de $x$, $V$, tel que :

$$\inf_{y \in V} P_y\left(T < \infty\right) \geqq a > 0 .$$

La trajectoires récurrant $P_x$-presque sûrement dans $V$, il en résulte que

$$\lim_{t \to \infty} P_{X_t}\left(T < \infty\right) \geqq a \qquad P_x\text{-presque sûrement}$$

soit :

$$Z = \lim_{t \to \infty} P_{X_t}\left(T < \infty\right) = 1 \qquad P_x\text{-presque sûrement}$$

et :

$$P_x\left(T < \infty\right) \geqq P_x\left(\underline{\underline{R}}_T\right) = E_x\, Z = 1$$

De plus

$$P_x\left(T < \infty\right) \geqq E_x\, P_{X_t}\left(T < \infty\right) \geqq E_x\, Z$$

Il en résulte que :

$$P_{X_t}\left(T < \infty\right) = 1 \qquad P_x\text{-presque sûrement}$$

et compte tenu de la continuité à droite des fonctions

$$t \to P_{X_t}\left(T < \infty\right) ,$$

on a

$$P_x\left(\forall t \quad P_{X_t}\left(T < \infty\right) = 1\right) = 1$$

Considérons alors le temps d'arrêt

$$\tau_a = \inf\{\, t \; ; \; A_t > a \,\}$$

$\tau_a$ vérifie la propriété (*) car les trajectoires de $(A_t)$ sont continues à droite.

Si quel que soit $a$ :

$$P_x\left(\tau_a < \infty\right) = 0$$

Alors ;

$$A_\infty = 0 \qquad P_x\text{-presque sûrement ;}$$

sinon il existe $a$ tel que :

$$P_x\left(\tau_a < \infty\right) > 0,$$

ce qui entraîne

$$P_x\left(\tau_a < \infty\right) = 1 \; .$$

Définissons par récurrence la suite de temps d'arrêt

$$\tau_a^{(1)} = \tau_a$$

$$\tau_a^{(n)} = \tau_a^{(n-1)} + \tau_a \circ \theta_{\tau_a^{(n-1)}}$$

$$P_x\left(\tau_a^{(n)} < \infty\right) = P_x\left(\tau_a^{(n-1)} < \infty \; ; \tau_a \circ \theta_{\tau_a^{(n-1)}} < \infty\right)$$

$$= E_x\left[1_{\left(\tau_a^{(n-1)} < \infty\right)} \; P_{X_{\tau_a^{(n-1)}}}\left(\tau_a < \infty\right)\right] = P_x\left(\tau_a^{(n-1)} < \infty\right)$$

Il en résulte que :

$$\forall n, \; P_x\left(\tau_a^{(n)} < \infty\right) = 1$$

Mais $P_x$-presque sûrement, d'après la propriété forte des fonctionnelles additives,

$$A_{\tau_a(n)} = A_{\tau_a(n-1)+\tau_a \circ \theta_{\tau_a(n-1)}} = A_{\tau_a(n-1)} + A_{\tau_a} \circ \theta_{\tau_a(n-1)} (\theta_{\tau_a(n-1)}(\omega)) =$$

$$= A_{\tau_a(n-1)} + (A_{\tau_a}) \circ \theta_{\tau_a(n-1)}$$

Donc :

$$A_{\tau_a(n)} \geqq a + A_{\tau_a(n-1)}$$

Il en résulte que :

$$A_{\tau_a(n)} \geqq na \qquad P_x\text{-presque sûrement.}$$

L'on a donc :

$$P_x \left( A_\infty = \infty \right) = 1.$$

Corollaire des propositions 3 et 4 -

a) Si $x$ est finement récurrent et si $A$ est un ensemble presque analytique tel que :

$$P_x \left( T_A < \infty \right) > 0$$

Alors

$$P_x \left( \underline{\underline{R}}_A \right) = 1$$

En particulier une condition nécessaire et suffisante pour que $x$ soit ponctuellement récurrent est que $x$ soit finement récurrent et que :

$$P_x \left( T_{\{x\}} < \infty \right) > 0$$

b) Si $U^\circ(x,A) > 0$ alors $P_x$-presque toutes les trajectoires séjournent un temps de mesure de Lebesgue infinie dans $A$. On a donc bien évidemment la condition plus faible :

$$U^\circ(x,A) = \infty$$

On peut montrer une réciproque à ce dernier point c'est l'objet de la

Proposition 5 - Un point $x$ est finement transient si et si seulement il existe une fonction $f$ positive universellement mesurable bornée vérifiant

$$0 < U^0 f(x) < \infty$$

Démonstration : Il résulte de la proposition 4 que si $x$ est finement récurrent :

$$U^0 f(x) > 0 \Rightarrow U^0 f(x) = \infty$$

La condition est donc suffisante.

Réciproquement si $x$ est transient il existe un voisinage fin presque borélien de $x$ tel que :

$$P_x \left(\underline{\underline{R}}_V\right) = 0$$

Considérons alors la fonction $u(x) = P_x \left( T_V < \infty \right)$

La fonction $u$ est excessive et l'on sait d'après la proposition 2 que :

$$\lim_{t \to \infty} P_t u(x) = o$$

Il en résulte que :

$$\lambda U^\lambda u \leqq u$$

$$\lambda U^\lambda u(x) < u(x)$$

Dans l'équation résolvante :

$$U^\lambda u = U^\varepsilon u + (\varepsilon - \lambda) U^\varepsilon U^\lambda u = U^\varepsilon (u - \lambda U^\lambda u) + \varepsilon U^\varepsilon U^\lambda u$$

faisons tendre $\varepsilon$ vers 0.

Il vient :

$$\infty > U^\lambda u(x) \geqq U^0 (u - \lambda U^\lambda u) (x)$$

La fonction $U - \lambda U^\lambda u$ est positive, strictement positive en $x$ et finement continue.

Son 0-potentiel est strictement positif en $x$; elle vérifie donc la propriété demandée.

## II . CLASSES D'UN PROCESSUS DE MARKOV.

Définitions - Nous dirons que $x$ conduit à $y$, ce que nous noterons :

$$x \to y$$

si

$$\forall V \in V_f(y) \qquad P_x\left(T_V < \infty\right) > 0 .$$

Nous dirons que $x$ communique avec $y$ ce que nous noterons :

$$x \leftrightarrow y$$

si

$$x \to y \quad \text{et} \quad y \to x.$$

Proposition 6 - La relation $x \leftrightarrow y$ est une relation d'équivalence.

Démonstration : Supposons que $x \to y$ et $y \to z$.

Soit :

$$V \in V_f(z).$$

L'on a :

$$E_y\, e^{-\lambda T_V} > 0$$

Donc il existe un voisinage fin presque borélien finement fermé de $y$, $W$ tel que :

$$\inf_{u \in W} E_u\, e^{-\lambda T_V} \geqq a > 0$$

L'on a alors :

$$E_x\, e^{-\lambda T_V} \geqq E_x\, e^{-\lambda (T_W + T_V \circ \theta_{T_W})}$$

$$\geqq E_x\, e^{-\lambda T_W}\left(E_{X_{T_W}}\, e^{-\lambda T_V}\right) \geqq a\, E_x\, e^{-\lambda T_W} > 0$$

ce qui montre que :

$$x \to z .$$

Définition

Les classes déquivalence de cette relation seront appelées classes du processus.

Proposition 7 - Si $x$ est finement récurrent et si $x$ conduit à $y$ alors $y$ est finement récurrent et $y$ conduit à $x$.

Une classe contenant un point récurrent sera dite classe récurrente. Il est clair alors que tous les points d'une classe récurrente sont récurrents et que la classe $C$ contenant un point $x_o$ récurrent est :

$$C = \{x \mid x_o \to x\} .$$

Démonstration : Supposons qu'il existe $V$ appartenant à $V_f\,(y)$ tel que :

$$P_y\,(\underline{\underline{R}}_V) = 0$$

Alors il existe $W \in V_f(y)$ tel que :

$$\sup_{z \in W} P_z(\underline{\underline{R}}_V) \leq \frac{1}{2}$$

Mais puisque $P_x(\underline{\underline{R}}_W) = 1$, on a :

$$\lim_{t \to \infty} P_{X_t}\, \underline{\underline{R}}_V = o \qquad P_x\text{-presque sûrement}$$

et d'autre part :

$$\lim_{t \to \infty} P_{X_t}\, \underline{\underline{R}}_V = 1 \qquad P_x\text{-presque sûrement.}$$

Il reste à montrer que $y$ conduit à $x$.

Supposons qu'il existe $V \in V_f(x)$ tel que :

$$P_y\,\left(T_V < \infty\right) < 1$$

Alors il existe $W \in V_f(y)$ tel que :

$$\sup_{z \in W} P_z\,\left(T_V < \infty\right) \leq a < 1$$

Puisque $P_x\,\left(\underline{\underline{R}}_W\right) = 1$ on aurait :

$$\lim_{t \to \infty} P_{X_t}\,\left(T_V < \infty\right) = 0 \qquad P_x\text{-presque sûrement}$$

ce qui est en contradiction avec le fait que $x$ est finement récurrent.

Remarque :

- Il est clair d'après le théorème de convergence des surmartingales positives que toute fonction 0-excessive est constante sur C.

- Réciproquement, si toute fonction excessive est constante, tout point est récurrent et l'espace E est formé d'une classe récurrente (nous dirons alors que le processus est finement récurrent).

- En effet, si 0 est un ouvert fin presque borélien, la fonction

$$y \to P_y \left( T_0 < \infty \right)$$

est égale à 1 sur 0 donc partout.

Il résulte alors trivialement de la proposition 2 que le processus est récurrent.

- Il en résulte que le mouvement brownien Plan est récurrent.

Note : On peut démontrer les résultats plus précis suivants : cf (1)

Soient x et y deux points de E et supposons que pour toute fonction excessive f :

$$f(x) = f(y)$$

Alors x et y sont récurrents et appartiennent à la même classe.

- Soit $V_0(x)$ le filtre des voisinages de x dans la topologie engendrée par les fonctions 0-excessives.

En général $V_f(x)$ est strictement plus fin que $V_0(x)$, et l'on démontre que :

$$V_f(x) = V_0(x)$$

si et seulement si x est finement transient ou est une trappe.

En particulier la topologie fine est engendrée par les fonctions 0-excessives si et seulement si les seuls points finement récurrents sont des trappes.

Proposition 8 - Les classes récurrentes sont finement fermées et boréliennes.

Démonstration : Soit $x_0 \in C$

$x \in \tilde{C}$ où $\tilde{C}$ est l'adhérence fine de C.

Tout voisinage fin de $x$ rencontrant $C$ il est clair que $x_o \to x$ donc que $x \in C$.

Pour démontrer le deuxième point, donnons une autre caractérisation de $C$.

$$C = \{x \mid U^\lambda (x\ .) \ll U^\lambda (x_o\ .)\}$$

Montrons tout d'abord que si $y$ et $y'$ sont deux points de $C$ les mesures $U^\lambda (y\ .)$ et $U^\lambda (y'.)$ sont équivalentes. Soit en effet $A$ un borélien vérifiant $U^\lambda (y,A) > o$. Considérons la fonctionnelle additive :

$$\int_o^t 1_A (X_s)\, ds$$

et le changement associé $\tau_t$. Il existe un nombre réel $a$ tel que :

$$P_y \left(\tau_a < \infty\right) = 1.$$

La fonction :

$$z \to P_z \left(\tau_a < \infty\right)$$

étant 0-excessive donc constante sur $C$, l'on a aussi :

$$P_{y'} \left(\tau_a < \infty\right) = 1,$$

ce qui suffit à démontrer que :

$$U^\lambda (y', A) > 0.$$

Si maintenant $x_o \in C$ et $x \notin C$, il existe un voisinage fin presque borélien de $x$, $V$, tel que :

$$U^\lambda (x_o, V) = 0.$$

Sinon en effet, l'on aurait $x_o \to x$ donc $x \in C$.

Cet ensemble $V$ étant un voisinage fin de $x$, il satisfait à $U^\lambda (x,V) > 0$. Ce qui montre que la mesure $U^\lambda (x.)$ n'est pas absolument continue par rapport à la mesure $U^\lambda (x_o\ .)$.

Pour simplifier les notations appelons $m$ la mesure $U^\lambda (x_o\ .)$. Effectuons la décomposition de Lebesgue de $U^\lambda (x\ .)$ par rapport à $m$

$$U^\lambda (x\ .) = U_1^\lambda (x\ .) + U_2^\lambda (x\ .)$$

où $U_1^\lambda (x\ .)$ est absolument continue par rapport à $m$ et $U_2^\lambda (x\ .)$ est étrangère à $m$

En appliquant un procédé classique utilisant la convergence des surmartingales on peut trouver une densité

$$U_1^\lambda\ (x,y) \quad \text{de} \quad U_1^\lambda\ (x\ .)$$

par rapport à V. Plus précisément considérons les fonctions boréliennes.

$$\phi_n\ (x,y) \begin{cases} = \sum\limits_{A\in \mathcal{P}_n} \dfrac{U^\lambda\ (x,A)}{m(A)}\ 1_A\ (y) & \text{si} \ \ m(A) > 0 \\ \\ = 0 & \text{si} \ \ m(A) = 0 \end{cases}$$

où $(\mathcal{P}_n)$ est une suite croissante de partitions de E, choisies de manière que la $\sigma$-algèbre engendrée par $\cup_n \mathcal{P}_n$ soit la tribu borélienne de E.

Alors on sait que, quel que soit x, les fonctions $\phi_n$ convergent sauf sur un ensemble de m-mesure nulle en y, vers une fonction $\tilde{\phi}(x,y)$ vérifiant :

$$\int_A \tilde{\phi}(x,y)\ m\,(dy) = U_1^\lambda\ (x,\ A)$$

quel que soit l'ensemble borélien A.
Dans l'espace $E \times E$ considérons l'ensemble B biborélien de convergence de la suite $\phi_n$.

Posons : $\quad \phi = \lim\limits_n \phi_n$ sur B

$\quad \phi = 0 \quad$ sur $B^c$

$$\forall x \qquad \{y, \phi\ (x,y) \neq \tilde{\phi}(x,y)\} \quad \text{est de m-mesure nulle.}$$

Et l'on a donc encore :

$$\int_A \phi(x,y)\ m\,(dy) = U_1^\lambda(x,A)$$

quel que soit le borélien A, ce qui montre que la fonction :

$$x \to U_1^\lambda\ (x,A) \quad \text{est borélienne quel que soit A borélien.}$$

Il en est alors de même de la fonction :

$$x \to U_2^\lambda\ (x,A) = U^\lambda\ (x,A) - U_1^\lambda\ (x,A)$$

Il en résulte que C qui est égal à l'ensemble $\{x\ ;\ U_2^\lambda\ (x,E) = 0\}$ est borélien.

Sous l'hypothèse (L) de Meyer, cf. (3) , on a la :

Proposition 9 - Soit $m$ une mesure positive ne chargeant pas les semi-polaires. Il existe alors un support fin de $m$, c'est-à-dire un plus petit fermé fin presque borélien portant $m$.

Démonstration : Soit $\mathcal{F}$ la famille filtrante décroissante des fermés fins presque boréliens $F$ vérifiant $m(F^c) = 0$.

Considérons la fonction :

$$\phi = \inf_{F \in \mathcal{F}} E.\, e^{-\lambda T_F}$$

Sous l'hypothèse (L) il existe une suite $F_n$ de $\mathcal{F}$ tels que :

$$\operatorname{reg}\left(\inf_n E.\, e^{-\lambda T_{F_n}}\right) \leqq \phi$$

Soit $A = \bigcap_n F_n$, $A \in \mathcal{F}$; l'on a les inégalités :

$$\phi(.) \leqq E.\, e^{-\lambda T_A} \leqq \operatorname{reg}\left(\inf_n E.\, e^{-\lambda T_{F_n}}\right) \leqq \phi(.)$$

ce qui prouve que $\phi = E.\, e^{-\lambda T_A}$.

Soit $A_r$ l'ensemble des points réguliers pour $A$; puisque $m$ ne charge pas les semi-polaires, $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A_r \in \mathcal{F}$ car $A - A_r$ est semi-polaire. Il en résulte que :

$$\forall x \qquad E_x\, e^{-\lambda T_{A_r}} = E_x\, e^{-\lambda T_A} \qquad \text{donc} \qquad (A_r)_r = A_r \ .$$

Montrons que $(A_r)$ est le support fin de $m$. Pour cela il reste à montrer que si $B$ est un fermé fin presque borélien de $\mathcal{F}$ inclus dans $A_r$ alors $B = A_r$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, et soit $x \in A_r - B$. On aurait alors :

$$E_x\, e^{-\lambda T_{A_r}} = 1 \qquad \text{car} \qquad x \in A_r$$

et $\qquad E_x e^{-\lambda T_B} < 1 \qquad$ car B est un fermé fin

contredisant ainsi l'hypothèse

$$E_x e^{-\lambda T_{A_r}} = \inf_{F \in \mathcal{F}} E_x e^{-\lambda T_F}$$

$U^\lambda (x_o, .)$ étant une mesure ne changeant pas les semi-polaires on peut montrer la

Proposition 10 - Soit $x_0$ un point récurrent. La classe récurrente déterminée par $x_o$ est le support fin de la mesure $U^\lambda (x_o .)$.

Il en résulte que C est un ensemble absorbant, i.e:

$$\forall x \in C \quad P_x \left( \forall t \ X_t \in C \right) = 1$$

Démonstration : Soit S le support de $U^\lambda (x_o .)$. Soit F un fermé fin universellement mesurable contenu dans C. Si $F \neq C$, $F^c$ est un ouvert fin rencontrant C. L'on a donc $U^\lambda (x_o, F^c) > 0$. Il en résulte que $S \supset C$.

D'autre part, quel que soit x n'appartenant pas à C il existe un ouvert fin presque borélien G(x) vérifiant $U^\lambda (x_o, G(x)) = 0$ d'après la remarque suivant la proposition 4 il en résulte que :

$$S \subset G(x)^c \qquad \forall x \in C^c$$

Donc $S \subset C$

C est alors absorbant. Si en effet l'on avait $P_x \left( T_{C^c} < \infty \right) > 0$ pour un x de C alors l'on aurait $P_x \left( \underline{\underline{R}}_{C^c} \right) = 1$ et puisque $C^c$ est un ouvert fin $U^\lambda (x, C^c) > 0$ ce qui n'est pas possible puisque C porte $U^\lambda (x,.)$.

Remarque : La proposition 10 est inexacte si l'on ne se place pas sous l'hypothèse (L) comme le montre l'exemple de ( 1 ) page 203.

## CAS DE PROCESSUS A RESOLVANTE FORTEMENT FELLERIENNE.

Dans tout ce paragraphe on dira qu'un point est récurrent si
$P_x(\underline{\underline{R}}_V) = 1 \quad \forall V$ voisinage ouvert de $x$,
la notion de voisinage étant alors relative à la topologie initiale de $E$.

Compte tenu de la continuité des fonctions invariantes bornées et de la semi-continuité inférieure des fonctions excessives les démonstrations des propositions 3 - 4 - 5 s'étendent immédiatement aux ouverts de la topologie initiale et l'on a la

Proposition 11 - $x$ est transient si et seulement si il existe une fonction positive continue bornée vérifiant

$$0 < U^0 f(x) < \infty$$

Proposition 12 - $x$ est récurrent si et seulement si il est finement récurrent. De plus si quel que soit l'ouvert $G$ contenant $y$,

$$P_x\left(T_G < \infty\right) > 0 \qquad \text{alors} \qquad x \to y.$$

Soit en effet $g$ borélienne bornée. $U^\lambda g$ est alors une fonction continue bornée et l'on a si $\varepsilon < \lambda$

$$\forall \mu > 0 \qquad U^\varepsilon g \geqq \mu \ U^{\lambda+\mu} \ U^\varepsilon g.$$

Il résulte alors de la proposition 11 que :

$$U^\lambda g(x) > 0 \Rightarrow U^0 g(x) = \infty$$

ce qui est le critère analytique de récurrence fine.

Supposons maintenant que pour tout ouvert $G$ contenant $y$

$$P_x\left(T_G < \infty\right) > 0 .$$

On a alors pour toute fonction continue positive, non nulle en $x$,

$$U^\lambda f(x) > 0$$

Soit $V$ un voisinage fin presque borélien de $y$.

$$U^{\varepsilon}(x,V) \geqq \mu \; U^{\lambda+\mu} \; U^{\varepsilon}(x,V)$$

or $U^{\lambda+\mu} 1_V$ est une fonction strictement positive en $y$ et continue

donc $$U^{\varepsilon}(x,V) > 0$$

Il résulte clairement des propositions 11 et 12 la

Proposition 13 - Pour un processus à résolvante fortement Fellérienne

a) Les classes récurrentes sont fermées ;

b) la classe récurrente contenant un point $x_o$ est le support (au sens des mesures de Radon) de la mesure $U^{\lambda}(x_o .)$.

Corollaires :

- Le processus de Cauchy sur la droite est finement récurrent.
- Les fonctions excessives du processus de Cauchy sont constantes.

## A P P E N D I C E

Deux contre exemples - Considérons un processus de Poisson $X_P$, symétrique, de pas $P$ et de paramètre 1. Soient $p_P^{*t}$ son semi-groupe de convolution et $e^{t\ \phi_P(\lambda)}$ sa fonction caractéristique :

$$e^{t\phi_P(\lambda)} = e^{t\left(\cos \lambda P - 1\right)}$$

D'après un théorème limite local ((Gnedenko-Kolmogoroff)) $p_P^{*t}(o)$ est équivalent à $t^{-1/2}$ pour $t$ infiniment grand.

Soit maintenant le processus :

$$Y_t = (X_{\sqrt{3}})_t + (X_{\sqrt{5}})_t + (X_{\sqrt{7}})_t$$

où les trois processus de Poisson considérés sont indépendants.

D'après le critère de Kingman (5) ce processus est récurrent dans les ouverts, car :

$$\frac{1}{\psi_{\sqrt{3}}(\lambda) + \psi_{\sqrt{5}}(\lambda) + \psi_{\sqrt{7}}(\lambda)} \sim \frac{1}{\lambda^2} \quad \frac{2}{3 + 5 + 7}$$

pour $\lambda$ infiniment petit.

Par contre ce processus est finement et ponctuellement transient. En effet, $\{0\}$ est un ouvert fin et comme $p_y^{*t}(0)$ est équivalent à : $t^{-3/2}$

$$\int_0^\infty p_y^{*t}(0)\, dt < \infty$$

Ce processus peut également servir à montrer que l'on n'a pas en général une loi du tout ou rien pour la récurrence dans les ouverts.

Soit $\sigma_{\{0\}}$ le temps de sortie de $\{0\}$. $X_{\sigma_{\{0\}}} \in \{-\sqrt{7}, -\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}\}$ supposons que pour ces six points on ait :

$$P_x\left(T_{\{0\}} < \infty\right) = 1$$

et considérons la suite de temps d'arrêt

$$T_1 = \sigma_{\{0\}}$$

$$T_2 = \sigma_{\{0\}} + T_{\{0\}} \circ \theta\sigma_{\{0\}}$$

$$T_{2n} = T_{2n-1} + T_{\{0\}} \circ \theta\, T_{2n-1}$$

on a

$$P_0\left( T_{2n} < \infty \right) = E\left(P_0\left(T_{2_n} < \infty \mid \mathcal{F}_{T_{2n-1}}\right)\right)$$

$$= E\left(P_{X_{T_{2n-1}}}\left( T_{\{0\}} < \infty \right)\right) = 1$$

Le point 0 serait donc récurrent. Il existe donc un des six points, soit x, tel que :

$$P_x\left(T_{\{0\}} < \infty\right) < 1$$

et l'on a d'autre part :

$$P_x\left(T_{\{0\}} < \infty\right) > 0$$

Le processus tué à l'instant $T_{\{0\}}$ n'admet pas de loi du tout ou rien pour la récurrence dans les ouverts.

-------------

## B I B L I O G R A P H I E

(1) J. AZEMA, M. KAPLAN-DUFLO, D. REVUZ : Récurrence fine des processus de Markov. Ann. Inst. Henri Poincaré. Vol. II n° 3 - 1966.

(2) GNEDENKO - KOLMOGOROFF : Limit distributions for sums of independent Random variables. Addison - Wesley - 1954.

(3) P.A. MEYER : Fonctionnelles Multiplicatives et Additives de Markov. Ann. Inst. Fourier 12 - (1962).

(4) P.A. MEYER : Processus de Markov 1967. Springer-Verlag

(5) J.F.C. KINGMAN : Recurrence properties of processes with stationnary independant increments. J. Austral. Math. Soc. t 4 - 1964 - pp. 223-228.

° °
°