PAUL-ANDRÉ MEYER

Les résolvantes fortement fellériennes d'après Mokobodzki

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 2 (1968), p. 171-174
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1968__2__171_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1966/67

LES RÉSOLVANTES FORTEMENT FELLÉRIENNES D'APRÈS MOKOBODZKI

INTRODUCTION.- MOKOBODZKI a remarqué récemment qu'un théorème de GROTHENDIECK*, suivant lequel <u>le produit de deux opérateurs faiblement compacts d'un espace</u> $\underline{C}(K)$ <u>est fortement compact</u>, entraîne que le produit de deux noyaux fortement fellériens est " fortement fellérien au sens strict" . On en déduit que les noyaux d'une résolvante ou d'un semi-groupe fortement fellérien sont fortement fellériens au sens strict, ce qui permet de simplifier beaucoup de démonstrations. MOKOBODZKI en déduit d'autre part d'importantes conséquences pour les noyaux " mesures harmoniques" en théorie du potentiel.

Nous allons donner ici une démonstration de ces propriétés, indépendante du théorème de GROTHENDIECK cité plus haut - et moins générale à certains égards, car nous allons utiliser la <u>positivité</u> des noyaux. Nous commencerons par traiter le cas métrisable, qui est de beaucoup le plus intéressant en pratique, et nous nous bornerons à quelques indications sur le cas non métrisable.

NOTATIONS.- Si E est un espace séparé, nous noterons $\underline{C}(E)$ l'espace des fonctions réelles continues <u>bornées</u> sur E, $\underline{B}(E)$ l'espace des fonctions réelles boréliennes bornées sur E ; ces deux espaces seront munis de la norme de la convergence uniforme. Nous noterons $\underline{M}(E)$ l'espace des mesures (abstraites !) bornées, sur E muni de sa tribu borélienne.

Soient E et F deux espaces séparés, V un noyau sousmarkovien de E dans F (le mot noyau est pris au sens abstrait). On sait qu'il est intéressant de définir diverses "propriétés de FELLER" pour V :

<u>Propriété F_1</u>.- L'application $x \mapsto \varepsilon_x V$ de E dans $\underline{M}(F)$ est continue pour la topologie étroite sur $\underline{M}(V)$. Autrement dit, $f \in \underline{C}(F) \Rightarrow Vf \in \underline{C}(E)$.

<u>Propriété</u> F_2.- L'application $x \mapsto \varepsilon_x V$ est continue pour la topologie faible $\sigma(\underline{M}(F),\underline{B}(F))$. Autrement dit, $f \in \underline{B}(F) \Rightarrow Vf \in \underline{C}(E)$.

<u>Propriété</u> F_3.- $x \mapsto \varepsilon_x V$ est continue pour la <u>norme</u> des mesures.

---

* GROTHENDIECK : sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $\underline{C}(K)$. Canadian J.Math. 5, 1953. Voir surtout DUNFORD-SCHWARTZ , Linear Operators I, p.493-494.

Ces trois propriétés s'énoncent habituellement : V est fellérien, V est fortement fellérien, V est fortement fellérien au sens strict. Cette terminologie est lourde, et nous dirons simplement $V \in F_i$, $i=1,2,3$.

Voici le théorème de MOKOBODZKI

THÉORÈME 1.- Soient E,F,G trois espaces métriques séparables , V un noyau sousmarkovien de E dans F, W un noyau sousmarkovien de F dans G. Supposons que l'on ait $V \in F_2$, $W \in F_2$; alors on a $VW \in F_3$.

La démonstration résulte de deux lemmes, intéressants par eux mêmes :

LEMME 1.- Soit (g_n) une suite d'éléments de la boule unité B_1 de $\underline{\underline{B}}(G)$. Il existe une suite (g'_n) extraite de (g_n), et une fonction $g \in B_1$, telles que Wg'_n converge simplement vers Wg.

DÉMONSTRATION.- Soit (y_m) une suite dense dans F , et soit $\lambda = \sum_m 2^{-m} \varepsilon_{y_m} W$. Toutes les mesures $\varepsilon_y W$ $(y \in F)$ sont absolument continues par rapport à la mesure positive bornée λ : en effet, soit f une fonction positive bornée λ-négligeable ; la fonction continue Wf est nulle aux points y_n, et donc partout. Extrayons alors de la suite (g_n) une suite (g'_n) , telle que les g'_n convergent vers une fonction borélienne $g \in B_1$ pour la topologie faible $\sigma(L^\infty(\lambda), L^1(\lambda))$, ce qui est possible du fait que $L^\infty(\lambda)$ est le dual de l'espace de Banach séparable $L^1(\lambda)$. Les mesures $\varepsilon_y W$ admettant des densités par rapport à λ, qui appartiennent à $L^1(\lambda)$; on a $\langle \varepsilon_y W, g \rangle = \lim_n \langle \varepsilon_y W, g'_n \rangle$, et le lemme est établi.

LEMME 2.- Soit (f_n) une suite d'éléments de $\underline{\underline{B}}(F)$ qui converge simplement, en restant bornée, vers une fonction $f \in B(F)$. Alors Vf_n converge uniformément vers Vf sur tout compact de E.

DÉMONSTRATION.- Il suffit de traiter le cas où f=0. Posons $h_n = \sup_{m \geq n} |f_m|$; comme $|Vf_n| \leq Vh_n$, il suffit de montrer que $Vh_n \to 0$ uniformément. Mais $h_n \to 0$ en décroissant, donc $Vh_n \to 0$ en décroissant ; comme $Vh_n \in \underline{\underline{C}}(E)$ d'après F_2, le lemme de DINI donne le résultat cherché.

Prouvons le théorème 1. Désignons par B_1 la boule unité de $\underline{\underline{B}}(G)$, par U le noyau VW , par K un compact de E, et par C_1 l'ensemble des restrictions à K des fonctions Uf $(f \in B_1)$; C_1 est une partie de la boule unité de $\underline{\underline{C}}(K)$, et les lemmes 1 et 2 combinés montrent que de toute suite

(h_n) <u>d'éléments de C_1, on peut extraire une suite qui converge uniformément sur</u> K <u>vers un élément de</u> C_1. Par conséquent, d'après le théorème d'ASCOLI , C_1 est une partie équicontinue de $\underline{\underline{C}}(K)$. Autrement dit, d désignant la distance sur E

$$\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0 \ : x\in K, y\in K, d(x,y)\leqq \eta \Rightarrow \sup_{f\in B_1} |Uf^x - Uf^y| \leqq \varepsilon$$

Ceci équivaut à $\|\varepsilon_x U - \varepsilon_y U\| \leqq \varepsilon$. Pour obtenir l'énoncé, il suffit maintenant de choisir pour K l'ensemble des points d'une suite convergente.

Voici une application du théorème 1 (il est sans doute inutile de détailler l'énoncé analogue, relatif à un semi-groupe sousmarkovien).

THÉORÈME 2.- <u>Soit</u> (V_p) <u>une résolvante sousmarkovienne sur un espace métrique séparable</u> E ; <u>si les noyaux</u> V_p <u>possèdent la propriété</u> F_2, <u>ils possèdent aussi la propriété</u> F_3.

DÉMONSTRATION.- Soient $p>0$, $q>p$; nous avons $V_p = (q-p)V_qV_p + V_q$. L'application $x \mapsto \varepsilon_x V_q V_p$ est continue pour la topologie de la norme des mesures, d'après le th.1 et la définition de la propriété F_3 ; l'application $x \mapsto \varepsilon_x V_q$ converge uniformément vers 0 sur E lorsque $q \to \infty$, car $\| \varepsilon_x V_q \| \leqq 1/q$; d'où aussitôt l'énoncé.

LE CAS NON MÉTRISABLE

Nous recommandons vivement d'omettre ce qui suit. Nous allons traiter le cas où E,F,G sont trois compacts non nécessairement métrisables.

Montrons que le lemme 1 reste vrai dans ces conditions . A tout ensemble borélien A de G, associons la fonction $W(I_A)\in\underline{\underline{C}}(F)$; pour toute mesure bornée μ sur F (i.e. tout élément du dual de $\underline{\underline{C}}(F)$), l'application $A \mapsto \langle\mu, W(I_A)\rangle$ est une mesure réelle sur F . L'application $A \mapsto W(I_A)$ est donc une mesure vectorielle à valeurs dans $\underline{\underline{C}}(F)$, au sens de DUNFORD-SCHWARTZ , loc.cit. p. 318, et les théorèmes classiques sur les mesures vectorielles (D-S , lemme 5, p.321) entraînent l'existence d'une mesure positive bornée λ sur G, telle que $\lambda(A)=0 \Rightarrow W(I_A)=0$ - autrement dit, que toutes les mesures $\varepsilon_y W$ soient absolument continues par rapport à λ.

Soit (g_n) une suite d'éléments de B_1 , et soit $\underline{\underline{T}}$ la tribu engendrée par les fonctions g_n : $\underline{\underline{T}}$ est une tribu séparable, et l'espace $L^1(\underline{\underline{T}},\lambda)$ est donc séparable. Extrayons donc de la suite (g_n) une suite (g'_n) qui converge faiblement vers une fonction $\underline{\underline{T}}$-mesurable g, pour la topologie faible $\sigma(L^\infty(\underline{\underline{T}},\lambda),\ L^1(\underline{\underline{T}},\lambda))$; mais les mesures $\varepsilon_y W$ ont des densités par rapport à λ sur la tribu $\underline{\underline{T}}$, et il en résulte comme plus haut que Wg'_n converge vers Wg' simplement.

Il n'y a rien à modifier au lemme 1, et presque rien à changer à la démonstration du théorème - seulement le remplacement d'une distance d par un écart d compatible avec la topologie de E.