JOSÉ DE SAM LAZARO

Sur les moments spectraux d'ordre supérieur

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 2 (1968), p. 123-139
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1968__2__123_0>

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE
STRASBOURG

Séminaire de Probabilité Année 1966-67

SUR LES MOMENTS SPECTRAUX D'ORDRE SUPERIEUR

(José de Sam Lazaro)

I . INTRODUCTION :

Les processus du second ordre (X_t) admettant une représentation spectrale $X_t = \int e^{it\lambda}\, dZ(\lambda)$, où Z est une mesure aléatoire sur $\mathbb{R}$, dénombrablement additive en moyenne quadratique, ont été étudiés par M. Loève [4]. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus du second ordre admette une représentation spectrale est que la fonction de covariance soit harmonisable :

$$E X_t \overline{X}_{t'} = \int e^{i(t\lambda - t'\lambda')}\, dM(\lambda,\lambda')$$

où M est une mesure bornée sur $\mathbb{R}^2$. La notion de covariance harmonisable a été généralisée par A. Blanc - Lapierre et R. Fortet [1] qui ont introduit les processus de la classe $\Phi^{(p)}$, et ont étudié le comportement spectral de processus strictement stationnaires appartenant à cette classe. A. N. Shiryaev [5] a ensuite défini une intégrale stochastique multiple par rapport à la mesure spectrale Z d'un processus de la classe $\Phi^{(p)}$ et Ya. G. Sinaï [6] a étudié le comportement de la mesure définie par les moments spectraux d'ordre supérieur à 2 dans le cas des processus strictement stationnaires ergodiques.

Le présent article comprend en grande partie des résultats de Shiryaev et de Sinaï. Le résultat central des paragraphes 3 et 4 est la définition de l'intégrale stochastique multiple dans la proposition 4. 1. La présentation et la démonstration des résultats de Shiryaev seront mis sous une forme modifiée qui permettra d'étudier de manière plus naturelle les résultats du paragraphe 5.

Il n'est pas difficile de voir que les méthodes permettant de définir l'intégrale stochastique multiple peuvent s'étendre au cas de mesures spectrales non bornées dans le cas où leurs projections sur les espaces facteurs sont des mesures σ - finies. On vérifie alors qu'elles coïncident avec les intégrales multiples de Wiener définies par K. Itô [2], [3] dans le cas du mouvement brownien, réel ou complexe.

2 . PROCESSUS DE LA CLASSE $\Phi^{(p)}$

Définition 2. 1. Un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ appartient à la classe $\Phi^{(p)}$, $(p\in N)$ si $E|X_t|^p < +\infty$ pour tout t et si, pour tout couple (k, m) d'entiers avec $k+m \leq p$, il existe une mesure bornée complexe $M_{k,m}$ sur $\mathbb{R}^{k+m}$ telle que :

(2. 1) $$E\{X_{t_1}\dots X_{t_k}\bar{X}_{t'_1}\dots\bar{X}_{t'_m}\} = \int_{\mathbb{R}^{k+m}} e^{i(t_1\lambda_1+\dots+t_k\lambda_k-t'_1\lambda'_1\dots t'_m\lambda'_m)}\, dM_{k,m}(\lambda,\lambda')$$

(où $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_k)$, $\lambda' = (\lambda'_1, \dots \lambda'_m)$) pour tout point $(t_1, \dots, t_k, t'_1, \dots, t'_m)\in\mathbb{R}^{k+m}$.
Il en résulte en particulier, en posant $k = m$ et $t_1 = \dots = t_k = t'_1 = \dots = t'_k = 0$ que $M_{k,k}(\mathbb{R}^{2k}) \geq 0\ \forall k\in N$.

Définition 2 . 2. On dit qu'un processus (X_t) appartient à la classe $\Phi^{(\infty)}$ si $X_t\in\Phi^{(p)}\ \forall p\in N$.
Dans la suite, on supposera toujours $p \geq 2$.

Si $(X_t)\in\Phi^{(2)}$, sa covariance est harmonisable, suivant la terminologie de Loève [4].

Exemples :

1) Tout processus réel stationnaire d'ordre 2, de moyenne nulle appartient à la classe $\Phi^{(2)}$.

2) Soit (X_t) un processus gaussien complexe, de moyenne nulle et de covariance $\Gamma(t,t')$. On démontre alors la :

Proposition 2 . 1 . S'il existe une mesure M sur $\mathbb{R}^2$ telle que :

(2 . 2) $$\Gamma(t,t') = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(t\lambda - t'\lambda')} \, dM(\lambda,\lambda')$$

alors $(X_t) \in \Phi^{(\infty)}$.

Démonstration : Puisque, par une propriété de familles de variables aléatoires gaussiennes complexes, on a :

(2 . 3) $$E\{X_{t_1} \dots X_{t_k} \overline{X}_{t'_1} \dots \overline{X}_{t'_m}\} = 0 \qquad \text{si } k \neq m$$

il suffit de considérer le cas où $k = m$.

Posons $X_t = Y_t + i Z_t$ et notons tout d'abord que :

(2 . 4) $$\begin{aligned} E\{Y_t Y_s\} &= E\{Z_t Z_s\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \Gamma(s,t) \\ E\{Y_s Z_t\} &= -E\{Z_s Y_t\} = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \Gamma(s,t) \end{aligned}$$

Les variables aléatoires $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k}, Y_{t'_1}, \dots, Y_{t'_k}, Z_{t_1}, \dots, Z_{t_k}, Z_{t'_1}, \dots Z_{t'_k})$ forment une famille de variables aléatoires gaussiennes réelles. Calculons :

(2.5) $$\begin{aligned} \Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_k) &= E\{\exp(\lambda_1 X_{t_1} + \dots + \lambda_k X_{t_k} + \mu_1 \overline{X}_{t'_1} + \dots + \mu_k \overline{X}_{t'_k})\} \\ &= E\{\exp[(\lambda_1 Y_{t_1} + \dots + \lambda_k Y_{t_k} + \mu_1 Y_{t'_1} + \dots + \mu_k Y_{t'_k}) + i(\lambda_1 Z_{t_1} + \dots + \lambda_k Z_{t_k} - \mu_1 Z_{t'_1} \dots \mu_k Z_{t'_k})]\} \\ &= E \exp\{\xi + i\zeta\} = \exp -\frac{1}{2}[\sigma_\zeta^2 - \sigma_\xi^2 - 2i \operatorname{cov}(\xi,\zeta)] = \exp \sum_{i,j=1}^{k} \lambda_i \mu_j \Gamma(t_i, t'_j) \end{aligned}$$

compte tenu de (2 . 4).

En calculant, à présent $E\{X_{t_1}\ldots X_{t_k}\overline{X}_{t'_1}\ldots\overline{X}_{t'_k}\} = \left.\dfrac{\partial^{2k}\Phi}{\partial\lambda_1\ldots\partial\lambda_k\partial\mu_1\ldots\partial\mu_k}\right|_{\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\mu_1=\ldots\mu_k=o}$

il n'est pas difficile de voir que :

$E\{X_{t_1}\ldots X_{t_k}\overline{X}_{t'_1}\ldots\overline{X}_{t'_k}\} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \Gamma(t_1, t'_{\sigma(1)})\ldots\Gamma(t_k, t'_{\sigma(k)})$.

où $\mathfrak{S}_k$ désigne le groupe des permutations des k premiers entiers.
On a ainsi montré que $X_t \in \Phi^{(\infty)}$, avec $M_{k,m} \equiv o$ si $k \neq m$ et

$M_{k,k}(\Lambda_1\times\ldots\times\Lambda_k\times\Lambda'_1\times\ldots\times\Lambda'_m) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} M_{11}(\Lambda_1\times\Lambda'_{\sigma(1)})\ldots M_{11}(\Lambda_k\times\Lambda'_{\sigma(k)})$.

Notations : K_b désignera l'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui sont bornées, mesurables et à support compact. $\mathcal{S}$ désignera l'ensemble des fonctions complexes sur $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables "à décroissance rapide". Si $\Phi \in L^1(-\infty, +\infty)$, on désignera par $\hat{\Phi}$ la transformée de Fourier de Φ :

$$\hat{\Phi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\,\Phi(\lambda)\,d\lambda$$

Il est bien connu que l'application $\Phi \rightsquigarrow \hat{\Phi}$ est une bijection de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}$

$\forall n$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ désignera la tribu des ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$, et λ^n la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

3 . REPRESENTATION SPECTRALE DES PROCESSUS DE LA CLASSE $\Phi^{(2)}$.

Soit (X_t) un processus appartenant à la classe $\Phi^{(2)}$, défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dans ce cas, en vertu de la continuité de sa fonction de covariance, (X_t) admet une version mesurable dont presque toutes les trajectoires sont dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}, \lambda)$.

Considérons l'application linéaire suivante de K_b dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$$\varphi \rightsquigarrow \int X_t\,\varphi(t)\,dt$$

où l'intégrale est définie pour presque tout $\omega\in\Omega$. Cette application est continue lorsqu'on munit K_b de la norme $L^1(\mathbb{R}, \lambda)$. En effet :

$$\left\| \int X_t \varphi(t)\, dt \right\|_{L^2(\Omega)} = \left(E\left[\int X_t \varphi(t)\, dt \int \overline{X}_{t'}\, \overline{\varphi}(t')\, dt'\right]\right)^{1/2}$$
$$= \left(\iint \varphi(t)\, \overline{\varphi}(t')\, dt\, dt' \iint e^{i(t\lambda - t'\lambda')}\, dM_{11}(\lambda,\lambda')\right)^{1/2}$$
$$= \left(\iint \hat{\varphi}(\lambda)\, \overline{\hat{\varphi}(\lambda')}\, dM_{11}(\lambda,\lambda')\right)^{1/2} \leq \|\varphi\|_{L^1} \|M_{11}\|$$

K_b étant dense dans $L^1(\mathbb{R},\lambda)$, cette application se prolonge en une application, encore notée $\varphi \rightsquigarrow \int X_t \varphi(t)\, dt$, de $L^1(\mathbb{R},\lambda)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui est linéaire, continue et qui satisfait à la relation :

$$(3.1) \quad \left< \int X_t \varphi(t)\, dt, \int X_t \psi(t)\, dt \right>_{L^2(\Omega)} = \iint \hat{\varphi}(\lambda)\, \overline{\hat{\psi}(\lambda')}\, dM_{11}(\lambda,\lambda')$$

$\forall \varphi, \psi \in L^1(\mathbb{R},\lambda)$.

Notation : $\forall \varphi \in L^1(\mathbb{R},\lambda)$, on pose $\int X_t\, \varphi(t)\, dt = X_\varphi$.

Construction de la mesure spectrale associée à (X_t). Pour toute $\varphi \in \mathcal{S}$, on a aussi $\hat{\varphi} \in L^1$; nous poserons $X_\varphi = Z_{\hat{\varphi}}$.

L'application $\varphi \rightsquigarrow \hat{\varphi}$ étant une application bijective de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}$, Z_ψ est définie $\forall \psi \in \mathcal{S}$ et on a, compte tenu de la formule (3.1)

$$(3.2) \quad \left< Z_\varphi, Z_\psi \right>_{L^2(\Omega)} = \iint \varphi(\lambda)\, \overline{\psi(\lambda')}\, dM_{11}(\lambda,\lambda') \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{S} .$$

Posons σ_1 = 1ère projection de $|M_{11}|$, σ_2 = 2ème projection de $|M_{11}|$, $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$;
On va définir Z_φ pour $\varphi \in L^2(\mathbb{R},\sigma)$.
L'application $\varphi \rightsquigarrow Z_\varphi$ de $\mathcal{S}$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est une application linéaire continue lorsqu'on munit $\mathcal{S}$ de la norme $L^2(\mathbb{R},\sigma)$. En effet, d'après (3.2)

$$\|Z_\varphi\|^2 = \int \varphi(\lambda)\, \overline{\varphi(\lambda')}\, dM_{11}(\lambda,\lambda') \leq \int |\varphi(\lambda)\, \overline{\varphi(\lambda')}|\, d|M_{11}(\lambda,\lambda')|$$

$$= \int |\varphi(\lambda) \otimes 1|\; |1 \otimes \varphi(\lambda')|\; d\,|M_{11}(\lambda,\lambda')|$$

$$\leq \sqrt{\int |\varphi(\lambda)|^2\, d\sigma_1(\lambda)} \;\; \sqrt{\int |\varphi(\lambda')|^2\, d\sigma_2(\lambda')} \;\leq \int |\varphi(\lambda)|^2\, d\sigma(\lambda) .$$

Par conséquent, cette application se prolonge en une application linéaire continue, encore notée $\varphi \rightsquigarrow Z\varphi$, de $L^2(\mathbb{R}, \sigma)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Notons que σ étant une mesure bornée, on a $1_\Lambda \in L^2(\mathbb{R}, \sigma)$ $\forall \Lambda \in \mathcal{B}_R$.

Notation : Si $\varphi \in L^2(\mathbb{R}, \sigma)$ on pose $Z\varphi = \int \varphi(\lambda)\, dZ(\lambda)$, et si $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on écrit $Z_{1_\Lambda} = Z(\Lambda)$. Il résulte immédiatement de la construction de Z que si $\Lambda = \sum_1^\infty \Lambda_i$, on a $Z(\Lambda) = \sum_1^\infty Z(\Lambda_i)$ (série convergente en m. q). On a aussi la :

Proposition 3 . 1 : $\forall \varphi \in L^1(-\infty, \infty)$, $X_\varphi = \int \hat{\varphi}(\lambda)\, dZ(\lambda)$ (noter que $\hat{\varphi} \in L^2(\sigma)$).

Démonstration : Si $\varphi \in L^1(-\infty, \infty)$, il existe une suite $\{\varphi_n\}$ d'éléments de $\mathcal{S}$ qui converge vers φ dans $L^1(-\infty, \infty)$. Par conséquent, $\hat{\varphi}_n(\lambda) \to \widehat{\varphi(\lambda)}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, en restant uniformément bornée par une constante. Il s'ensuit, par le théorème de Lebesgue, que $\hat{\varphi}_n \to \hat{\varphi}$ dans $L^2(\mathbb{R}, \sigma)$, d'où le résultat.

La formule (3.2) reste donc valable pour $\varphi, \psi \in L^2(\sigma)$.

Proposition 3 . 2 . : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X_t = \int e^{it\lambda}\, dZ(\lambda)$. (noter que $e^{it.} \in L^2(\sigma)$).

Démonstration ; La fonction $\lambda \rightsquigarrow e^{it\lambda}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite dans $L^2(\mathbb{R}, \sigma)$, lorsque $h \to 0$, des fonctions $\lambda \rightsquigarrow \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{iu\lambda}\, du$, Par conséquent :

$$\int e^{it\lambda}\, dZ(\lambda) = \lim_{h\to 0} \text{m.q.} \int \left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{iu\lambda}\, du\right) dZ(\lambda) = \lim_{h \to 0} \text{m.q.}\ X_{\frac{1}{h} 1_{[t, t+h]}} = X_t$$

par la proposition 3 . 1 . et la continuité en moyenne quadratique de X_t.

Proposition 3 . 3 : Pour toute fonction complexe continue bornée f, $\int f(\lambda)\, dZ(\lambda)$ coïncide avec la définition ordinaire de l'intégrale comme limite en moyenne quadratique de sommes de Riemann.

Démonstration : Si les λ_j forment une subdivision de $\mathbb{R}$ et $x_j \in [\lambda_j, \lambda_{j+1}]$ alors :

$$E \mid \Sigma f(x_j) Z[\lambda_j, \lambda_{j+1}) - \int f(\lambda)\, dZ(\lambda) \mid^2$$

$$= \int (\Sigma f(x_j) 1_{[\lambda_j, \lambda_{j+1})} (\lambda) - f(\lambda)) \overline{(\Sigma f(x_j) 1_{[\lambda_j, \lambda_{j+1})}(\lambda') - f(\lambda'))}\, dM_{11}(\lambda, \lambda')$$

$\to 0$ lorsque $\sup_j (\lambda_{j+1} - \lambda_j) \to 0$ par le théorème de Lebesgue.

4. MOMENTS SPECTRAUX D'ORDRE SUPÉRIEUR :

Supposons à présent que $(X_t) \in \Phi^{(2p)}$ avec $p > 1$. Dans ce cas, $\forall \varphi \in L^1(-\infty, \infty)$ on a $X_\varphi \in L^{2p}(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

En effet, l'application $\varphi \rightsquigarrow X_\varphi$ de K_b (muni de la norme $L^1(-\infty, \infty)$) dans $L^{2p}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est continue (ceci se montre comme dans le cas L^2). Elle se prolonge donc en une application linéaire continue de $L^1(-\infty, \infty)$ dans $L^{2p}(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La topologie de L^{2p} étant plus forte que celle de L^2, cette application coïncide avec l'application $\varphi \rightsquigarrow X_\varphi$ définie précédemment.
On a aussi, si $k+m = 2p$:

$$(4.1) \quad E\{X_{\varphi_1} \dots X_{\varphi_k} \overline{X}_{\varphi'_1} \dots \overline{X}_{\varphi'_m}\} = \int \hat{\varphi}_1(\lambda_1) \dots \hat{\varphi}_k(\lambda_k) \overline{\hat{\varphi}'_1(\lambda_{k+1})} \dots \overline{\hat{\varphi}'_m}(\lambda_{2p})\, dM_{k,m}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2p})$$

si $\varphi_1, \dots, \varphi_k, \varphi'_1, \dots, \varphi'_m \in L^1(-\infty, +\infty)$.

En effet, (4.1) est vérifié si $\varphi_1, \dots \varphi_k, \varphi'_1, \dots, \varphi'_m \in K_b$ et par conséquent si les φ sont des combinaisons linéaires finies d'éléments de K_b. Le résultat s'ensuit en appliquant le théorème de Lebesgue.

Pour tout $k \leq p$, considérons la mesure $M_{k,k}$ sur $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$. On désignera par $\sigma_k^{(1)}$ et $\sigma_k^{(2)}$ les projections de $|M_{k,k}|$ sur les deux espaces facteurs et on posera $\sigma_k = \sigma_k^{(1)} + \sigma_k^{(2)}$. On a alors le théorème suivant :

<u>Proposition 4.1</u>. Avec les notations précédentes, si $(X_t) \in \Phi^{(p)}$ avec $p > 1$, alors quels que soient les entiers non négatifs k, m avec $k+m \leq p$, il existe une

application linéaire continue et une seule de $L^2(\mathbb{R}^{k+m}, \sigma_{k+m})$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, notée $f \rightsquigarrow Z_f^{k,m}$, ou de manière plus explicite :

$f \rightsquigarrow \int f(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_m)\, dZ(\lambda_1) \ldots dZ(\lambda_k)\, d\bar{Z}(\lambda'_1) \ldots d\bar{Z}(\lambda'_m)$ (intégrale stochastique multiple), qui est telle que, si $f = f_1 \otimes \ldots \otimes f_k \otimes f'_1 \otimes \ldots \otimes f'_m$, où $f_1, \ldots f_k$, $f'_1, \ldots f'_m$ sont des éléments de K_b à valeurs réelles, on ait :

$$(4 . 2) \quad Z_f^{k,m} = Z_{f_1} \ldots Z_{f_k}\, \bar{Z}_{f'_1} \ldots \bar{Z}_{f'_m}$$

On a, en outre, $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^{k+m}, \sigma_{k+m})$:

$$(4 . 3) \quad < Z_f^{k,m}, Z_g^{k,m} > = \int f(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+m})\, g(\lambda'_1, \ldots \lambda'_{k+m})\, dM_{k+m,k+m}(\lambda_1 \ldots \lambda_{k+m}, \lambda'_1, \ldots \lambda'_{k+m}).$$

Démonstration : Désignons par $\mathcal{S}_R$ (resp. $\overset{k+m}{\otimes} \mathcal{S}_R$) les éléments de $\mathcal{S}$ (resp $\overset{k+m}{\otimes}$) à valeurs réelles et, si $f_1, \ldots f_k$, $f'_1, \ldots f'_m$ sont des éléments de $\mathcal{S}_R$ et $f = f_1 \otimes \ldots \otimes f_k \otimes f'_1 \otimes \ldots \otimes f'_m$ définissons $Z_f^{k,m}$ par la formule (4 . 2) et, pour tout $f \in \overset{k+m}{\otimes} \mathcal{S}_R$ de la forme $f = \sum_j \lambda_j \varphi_1^{(j)} \otimes \ldots \otimes \varphi_k^{(j)}\ \varphi_1'^{(j)} \otimes \ldots \otimes \varphi_m'^{(j)}$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, posons :

$$Z_f^{k,m} = \sum_j \lambda_j Z_{\varphi_1^{(j)} \otimes \ldots \otimes \varphi_k^{(j)}\ \varphi_1'^{(j)} \otimes \ldots \otimes \varphi_m'^{(j)}}$$

Montrons tout d'abord que, $\forall f \in \overset{k+m}{\otimes} \mathcal{S}_R$, $Z_f^{k,m}$ est définie de façon unique. Supposons que $\sum_j \lambda_j \varphi_1^{(j)} \otimes \ldots \otimes \varphi_k^{(j)} \otimes \varphi_1'^{(j)} \otimes \ldots \otimes \varphi_m'^{(j)} = 0$. Alors on a :

$$\|Z^{k,m}_{\sum_j \lambda_j \varphi_i^{(j)} \otimes \ldots \otimes \varphi_k^{(j)} \otimes \varphi_1'^{(j)} \otimes \ldots \otimes \varphi_m'^{(j)}}\|^2 = \sum E \{\lambda_i Z_{\varphi_1^{(i)}} \ldots Z_{\varphi_k^{(i)}} \bar{Z}_{\varphi_1'^{(i)}} \ldots \bar{Z}_{\varphi_m'^{(i)}}\ \lambda_j \bar{Z}_{\varphi_1^{(j)}} \ldots \bar{Z}_{\varphi_k^{(j)}} Z_{\varphi_1'^{(j)}} \ldots Z_{\varphi_m'^{(j)}}\}$$

$$= \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j \int \varphi_1^{(i)} \otimes \ldots \otimes \varphi_k^{(i)} \otimes \varphi_1'^{(i)} \otimes \ldots \otimes \varphi_m'^{(i)} \otimes \varphi_1^{(j)} \otimes \ldots \otimes \varphi_k^{(j)} \otimes \varphi_1'^{(j)} \otimes \ldots \otimes \varphi_1'^{(j)}\, dM_{k+m,k+m}$$

(en vertu de 4 . 1).

$$= \int (\sum_i \lambda_i \varphi_1^{(i)} \otimes \ldots \otimes \varphi_k^{(i)} \otimes \varphi_1'^{(i)} \otimes \ldots \varphi_m'^{(i)}) (\sum_j \lambda_j \varphi_1^{(j)} \otimes \ldots \otimes \varphi_k^{(j)} \varphi_1'^{(j)} \otimes \ldots \otimes \varphi_m'^{(j)}) \, dM_{k+m,k+m}$$

$= 0$

La vérification de (4 . 3) est immédiate si $f, g \in \overset{k+m}{\otimes} \mathcal{S}_R$.
L'application $f \rightsquigarrow Z_f^{k,m}$ de $\overset{k+m}{\otimes} \mathcal{S}_R$ dans $L^2(\Omega)$ est continue si on munit $\otimes \mathcal{S}_R$ de la norme $L^2(R^{k+m}, \sigma_{k+m})$. Elle se prolonge donc en une application linéaire continue de $L_R^2(\mathbb{R}^{k+m}, \sigma_{k+m})$ (sous-ensemble de L^2 à valeurs réelles) dans $L^2(\Omega)$. Finalement si $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^{k+m}, \sigma_{k+m})$, $f=f_1+if_2$ avec $f_1, f_2 \in L^2_{\mathbb{R}}(\sigma_{k+m})$, on pose $Z_f^{k,m} = Z_{f_1}^{k,m} + iZ_{f_2}^{k,m}$, on définit ainsi une application de $L^2(\mathbb{R}^{k+m}, \sigma_{k+m})$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{Q}, P)$, notée encore $f \rightsquigarrow Z_f^{k,m}$, qui satisfait (4 . 2) et (4 . 3), (Les calculs semblables à ceux du paragraphe précédent, sont omis).

Un calcul immédiat nous donne la formule :

$$(4\,.\,4) \quad Z^{k,m}_{\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_k \otimes \varphi_1' \otimes \ldots \varphi_m'} = Z_{\varphi_1} \ldots Z_{\varphi_k} \bar{Z}_{\bar{\varphi}_1'} \ldots \bar{Z}_{\bar{\varphi}_m'}, \text{ si } \varphi_1 \ldots \varphi_k, \varphi_1', \ldots \varphi_m' \in \mathcal{S},$$

<u>Notation</u> : Dans la suite, on trouvera souvent plus commode de poser :

$$Z_f^{k,m} = \int f(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_1', \ldots \lambda_m') \, dZ^{k,m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_1', \ldots \lambda_m') \text{ ou } \int f(\lambda, \lambda') dZ^{k,m}(\lambda, \lambda')$$

ou tout simplement $\int f dZ^{k,m}$.

<u>Proposition 4 . 2</u> : $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^{k,m}, \sigma_{k+m}), \forall k, m \quad 0 \leq k, m \quad k+m \leq p$.

$$(4\,.\,5) \qquad E\{Z_f^{k,m}\} = \int f \, dM_{k,m}$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit de démontrer la proposition pour f réelle.
En vertu de (4 . 1), (4 . 5) est vérifiée si $f = \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_{k+m}$, où φ_i, $i \leq k+m$ est la transformée de Fourier <u>réelle</u> d'un élément de $L^1(-\infty, \infty)$, et par conséquent si f appartient à l'espace vectoriel réel F engendré par de telles fonctions. F est une algèbre de fonctions continues sur $\mathbb{R}^{k+m}$ qui s'annulent à l'infini et qui sépare les points de $\mathbb{R}^{k+m}$. Il en résulte par le théorème de

Stone-Weierstrass que (4 . 5) est vérifiée si f est une fonction continue réelle qui s'annule à l'infini, et par conséquent, par le théorème de Lebesgue, si f est l'indicatrice d'une somme finie de produits d'intervalles. Soit $\mathcal{A}$ la classe des ensembles A tels que 1_A vérifie (4 . 5) . Il est clair que $\mathcal{A}$ est une classe monotone qui contient l'algèbre des sommes finies de produits d'intervalles . Par conséquent $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{k+\ell}} \subset \mathcal{A}$. On a alors, $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{k+m}}$

$$|M_{k,m}(A)|^2 = |E\{Z^{k,m}(A)\}| \leq \| Z^{k,m}(A) \|^2_{L^2(\Omega)} \leq |\sigma_{k+m}(A)|^2 .$$

ce qui montre que si $\{f_n\}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^{k+m}, \sigma_{k+m})$, elle est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^{k+m}, |M_{k,m}|)$ et (4 . 6) est donc vérifiée $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^{k+m}, \sigma_{k+m})$.

On considère à présent un processus (X_t) qui admet la représentation spectrale :

$$(4 . 6) \qquad X_t = \int e^{it\lambda}\, d\, Z(\lambda)$$

Z étant une mesure aléatoire bornée dénombrablement additive en m. q. et l'intégrale étant prise comme limite dans $L^2(\Omega)$ de sommes de Riemann.

Il est clair que cette représentation est unique. En effet, si Z' est une autre mesure spectrale satisfaisant (4 . 6) , un calcul immédiat montre que $\int \varphi(\lambda)\, dZ(\lambda) = \int \varphi(\lambda)\, dZ'(\lambda) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$. On vérifie aisément que les fonctions suivantes, définies sur les rectangles de $\mathbb{R}^2$:

$$\Lambda \times \Lambda' \rightsquigarrow E\ \{Z(\Lambda)\, \overline{Z(\Lambda')}\} = M_{1,1}(\Lambda, \Lambda')$$
$$\Lambda \times \Lambda' \rightsquigarrow E\ \{Z(\Lambda)\, Z(\Lambda')\} = M_{2,0}(\Lambda, \Lambda')$$
$$\Lambda \times \Lambda' \rightsquigarrow E\ \{\overline{Z}(\Lambda)\, \overline{Z(\Lambda')}\} = M_{0,2}(\Lambda, \Lambda')$$

peuvent être prolongées par additivité à l'algèbre $\mathcal{A}$ des réunions finies de rectangles et qu'elles sont définies de façon unique sur $\mathcal{A}$. Puisqu'elles sont dénombrablement additives sur $\mathcal{A}$ en vertu de l'additivité en m. q. de Z, et bornées, elles se prolongent en des mesures (complexes) sur $\mathbb{R}^2$.

La proposition suivante nous permet de définir de façon équivalente un processus de la classe $\Phi^{(p)}$, si p est pair.

<u>Proposition 4 . 3</u> : Supposons que p soit pair . Un processus stochastique (X_t), $t \in \mathbb{R}$, satisfaisant à l'équation (4 . 6) appartient à la classe $\Phi^{(p)}$ si et seulement si $\forall k, m$, $0 \leq k, m$ $k+m \leq \frac{p}{2}$, la fonction suivante, définie sur la classe des pavés de $\mathbb{R}^{k+m}$:

$$M_{k,m}(\Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_k \times \Lambda_1' \times \dots \times \Lambda_m') = E\{ Z(\Lambda_1) \dots Z(\Lambda_k) \overline{Z(\Lambda_1')} \dots \overline{Z(\Lambda_m')} \}$$

est finie pour tout choix de boréliens Λ_1, Λ_2, ... Λ_1', ... Λ_m', et peut être prolongée en une mesure sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{k+m}}$.

Il en résulte, en particulier, que tout processus satisfaisant (4 . 6) appartient à la classe $\Phi^{(2)}$.

<u>Démonstration</u> : La nécessité de la condition résulte directement de la proposition précédente et du fait que $Z^{k,m}(\Sigma A_i) = \lim_{n\to\infty} m.q \sum_1^n Z^{k,m}(A_i)$.
Réciproquement, supposons la condition vérifiée et désignons par μ la somme des projections de $|M_{\frac{p}{2},\frac{p}{2}}|$ sur les espaces facteurs. Considérons l'application linéaire $\Sigma \alpha_i 1_{\Lambda_i} \rightsquigarrow \Sigma \alpha_i Z(\Lambda_i)$ de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ des combinaisons linéaires finies d'indicatrices d'éléments de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, dans $L^p(\Omega)$. Cette application est continue lorsqu'on munit $\mathcal{V}$ de la norme $L^p(\mu)$. En effet, soit $v \in \mathcal{V}$; v peut s'écrire $\sum_i \alpha_i 1_{\Lambda_i}$, $(\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset)$ et on a :

$$(\| \Sigma \alpha_i Z(\Lambda_i) \|_{L^p})^p = \int (\Sigma \alpha_i 1_{\Lambda_i}) \otimes \dots \otimes (\Sigma \bar{\alpha}_i 1_{\Lambda_i}) \dots \otimes (\Sigma \bar{\alpha}_i 1_{\Lambda_i})\, dM_{\frac{p}{2},\frac{p}{2}}$$

$$\leq \int | \Sigma \alpha_i 1_{\Lambda_i} | \otimes \dots \otimes | \Sigma \alpha_i 1_{\Lambda_i} | \; d|M_{\frac{p}{2},\frac{p}{2}}| \leq (\| \Sigma \alpha_i 1_{\Lambda_i} \|_{L^p(\mu)})^p$$

Cette application se prolonge donc en une application linéaire continue de $L^p(\mathbb{R},\mu)$ dans $L^p(\Omega)$. On vérifie alors que l'intégrale $\int e^{it\lambda}\, dZ(\lambda)$ est une intégrale dans $L^p(\Omega)$ et par conséquent dans $L^{p'}(\Omega)$ $\forall p' < p$.
Considérons une suite $\{x_j^{(n)}\}$, $j \in Z$, de subdivisions de $\mathbb{R}$ devenant arbitrairement fines lorsque $n \to \infty$.

$$\int e^{i(t_1\lambda_1+\dots+t_k\lambda_k-t'_1\lambda'_1\dots t'_m\lambda'_m)}\, dM_{k,m} = \lim_{n\to\infty} \int \Big(\sum_1 e^{it_1x_j^{(n)}}\, 1_{[x_j,x_{j+1})}(\lambda_1)\Big)\dots \Big(\sum_1 e^{-it'_mx_j^{(n)}}\, 1_{[x_j,x_j+1)}(\lambda'_m)\Big)dM_{k,m}$$

$$= \lim_{n\to\infty} E\,\Big\{\Big(\sum_1^n e^{it_1x_j^{(n)}}\, Z[x_j^{(n)},x_{j+1}^{(n)})\Big)\dots\Big(\sum_1^n e^{-it'_mx_j^{(n)}}\, \bar{Z}[x_j^{(n)},x_{j+1}^{(n)})\Big)\Big\}$$

$$= E\{X_{t_1}\dots X_{t_k}\bar{X}_{t'_1}\dots\bar{X}_{t'_m}\}$$

puisque chaque somme converge dans L^{k+m} d'après ce qui précède.

<u>Proposition 4 . 4</u> : Si $(X_t) \in \Phi^{(2p)}$, $p \geq 1$, si k,m sont des entiers non-négatifs tels que $k+m \leq p$ et si $\varphi_1,\dots,\varphi_k$, $\varphi'_1,\dots,\varphi'_m$ sont des fonctions mesurables bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, alors :

$$(4\,.\,7)\quad \int \varphi_1\otimes\dots\otimes\varphi_k\otimes\varphi'_1\otimes\dots\otimes\varphi'_m\, dZ^{k,m} = \int\varphi_1\, dZ\dots\int\varphi_k\, dZ\,\overline{\int\varphi'_1\, dZ}\dots\overline{\int\varphi'_m\, dZ}$$

<u>Démonstration :</u> (4 . 7) est vérifiée pour les $\varphi \in \mathcal{S}$ d'après (4 . 4). On vérifie que les intégrales figurant au deuxième membre sont des intégrales dans L^{2p}. (4 . 7) est donc vérifiée pour les fonctions continues s'annulant à l'infini, et par suite pour les indicatrices d'intervalles, bornées ou non. L'extension aux indicatrices de boréliens et par suite aux fonctions mesurables bornées se fait aisément. La généralisation suivante sera utile dans la suite.

<u>Proposition 4 . 5</u>. Soient $(X_t) \in \Phi^{(2p)}$, $p \geq 1$, k,m des entiers non négatifs tels

que $k+m \leq p$, k_i, m_i , $1 \leq i \leq s$ des entiers non négatifs tels que $\Sigma k_i = k$, $\Sigma m_i = m$ et $\forall i$, $1 \leq i \leq s$, φ_i une application de $\mathbb{R}^{k_i+m_i}$ dans $\mathbb{C}$, mesurable bornée. Alors :

$$(4\,.\,8\,.)\quad \int \prod_i \varphi_i \,(\lambda_{k_1+\ldots+k_{i-1}+1}, \ldots \lambda_{k_1+\ldots+k_i}, \lambda_{m_1+\ldots+m_{i-1}+1}, \ldots, \lambda_{m_1+\ldots+m_i})$$

$$dZ^{k,m}(\lambda_1, .. \lambda_k, \lambda'_1 .. \lambda'_m)$$

$$= \prod_i \int \varphi_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_i}, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_{m_i})\, dZ^{k_i, m_i}(\lambda_1, .. \lambda_{k_i}, \lambda'_1, .. \lambda'_{m_i}) \,.$$

Démonstration : D'après (4 . 7), (4 . 8) est vraie si les φ_i sont des indicatrices de produits de boréliens et par suite si les φ_i sont des combinaisons linéaires finies de telles indicatrices. On montre alors, par passage à la limite classique, qu'elle reste valable pour φ_1 , mesurable bornée et de proche en proche, pour $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ mesurables bornées.

5 . PROCESSUS STRICTEMENT STATIONNAIRES DANS $\Phi^{(\infty)}$

Dans ce paragraphe on considère des processus strictement stationnaires tels que :

1) $(X_t) \in \Phi^{(\infty)}$

2) Le flot V_t défini par (X_t) est fortement continu.

Proposition 5 . 1 : $\forall k, m$, la mesure $M_{k,m}$ est concentrée sur l'hyperplan $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k - \lambda'_1 \ldots \lambda'_m = 0$.

Démonstration : On a, $\forall u \in \mathbb{R}$, par la stationnarité stricte de X_t :

$$E\,\{X_{t_1} \ldots X_{t_k}\; X_{t'_1} \ldots X_{t'_k}\} = \int e^{i(t_1\lambda_1 + \ldots + t_k\lambda_k - t'_1\lambda'_1 \ldots t'_m\lambda'_m)}\, dM_{k,m}(\lambda, \lambda')$$

$$= E\{X_{t_1+h}\; X_{t_k+h}\; \bar{X}_{t'_1+h} \ldots \bar{X}_{t'_m+h}\} = \int e^{i(t_1\lambda_1 + .. + t_k\lambda_k - t'_1\lambda'_1 .. - t'_m\lambda'_m)}$$

$$e^{ih(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k - \lambda'_1 \ldots \lambda'_m)}\, dM_{k,m}(\lambda, \lambda')$$

ce qui, par l'unicité de la transformée de Fourier montre que $M_{k,m}$ est bien concentrée sur l'hyperplan $\lambda_1+\ldots+\lambda_k-\lambda'_1\ldots-\lambda'_m = 0$.

Désignons par T_t le groupe de transformations unitaires de $L^2(\Omega,\mathcal{Q},P)$ correspondant au flot V_t . On a, par le théorème de Stone :

(5 . 1)
$$T_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \, dE(\lambda)$$

E étant la décomposition de l'identité associée à T_t .

Si $f_1, f_2, \ldots f_n \in L^2(\Omega, \mathcal{Q}, P)$ sont telles que $f_1 \cdot f_2 \ldots f_n \in L^2(\Omega, \mathcal{Q}, P)$, alors :

(5 . 2)
$$T_t(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n) = T_t f_1 \cdot T_t f_2 \ldots T_t f_n$$

<u>Proposition 5 . 2</u> : $\forall k, m$ $0 \leq k, m$ $\forall h \in L^2(\mathbb{R}^{k+m}, \sigma_{k+m})$ on a :

(5 . 3)
$$T_t \int h(\lambda_1 \ldots \lambda_k, \lambda'_1 \ldots \lambda'_k) \, dZ^{k,m}(\lambda,\lambda') = \int e^{it(\lambda_1+\ldots+\lambda_k-\lambda'_1\ldots-\lambda'_m)} h(\lambda,\lambda') \, dZ^{k,m}(\lambda,\lambda') .$$

<u>Démonstration</u> : La proposition se vérifie immédiatement, compte tenu de (5 . 1) , (5 . 2) et de la proposition (4 . 4) pour les fonctions h de la forme $1_{\Lambda_1}(\lambda_1) \times \ldots \times 1_{\Lambda_m}(\lambda'_m)$ et s'étend par conséquent à l'espace $\mathcal{E}$ des combinaisons linéaires complexes de telles fonctions.

$\forall h \in L^2(\mathbb{R}^{k+m}, \sigma_{k+m})$ il existe une suite h_n d'éléments de $\mathcal{E}$ telle que $h_n \to h$ dans $L^2(\sigma_{k+m})$ et par conséquent telle que $e^{it(\lambda_1+\ldots+\lambda_k-\lambda'_1\ldots-\lambda'_m)}(h_n-h) \to 0$ en norme dans $L^2(\sigma_{k+m})$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Puisque $\int h_n dZ^{k,m} \xrightarrow{\| \|_{L^2(\Omega)}} \int h dZ^{k,m}$, le résultat s'ensuit d'après la continuité forte de T_t .

<u>Proposition 5 . 3</u> : Si (X_t) est un processus ergodique, alors quel que soit B , ensemble mesurable de l'hyperplan $\lambda_1+\ldots+\lambda_k-\lambda'_1\ldots-\lambda'_m = 0$, on a :

$$Z^{k,m}(B) = M_{k,m}(B)$$

Démonstration : En appliquant la proposition précédente, on obtient :

$$T_t\, Z^{k,m}(B) = Z^{k,m}(B) = E\{ Z^{k,m}(B) \} = M_{k,m}(B)$$

en vertu de l'ergodicité du processus et de la proposition 4 . 1 .

Proposition 5 . 4 : Soient k_i , m_i , $1 \leq i \leq s$ des entiers non négatifs tels que $\sum_1^s k_i = k$, $\sum_1^s m_i = m$.

Soit $\mathbb{R}'$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{k+m}$ défini par les relations suivantes :

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{k_1} = \lambda'_1 + \dots + \lambda'_{m_1}$$

$$\lambda_{k_1+1} + \dots + \lambda_{k_1+k_2} = \lambda'_{m_1+1} + \dots + \lambda'_{m_1+m_2}$$

$$\dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots$$

$$\lambda_{k_1+\dots+k_{s-1}+1} + \dots + \lambda_k = \lambda'_{m_1+\dots+m_{s-1}+1} + \dots + \lambda'_m$$

Alors si (X_t) est ergodique, la restriction de $M_{k,m}$ à $\mathbb{R}'$ est le produit des M_{k_i,m_i} . Plus précisément , si Λ_i , $1 \leq i \leq s$ est un sous ensemble mesurable de l'hyperplan $\lambda_{k_1+\dots+k_{i-1}+1} + \dots + \lambda_{k_1+\dots+k_i} = \lambda_{m_1+\dots+m_{i-1}+1} + \dots + \lambda_{m_1+\dots+m_i}$ de la forme :

$$\{(\lambda_{k_1+\dots+k_{i-1}+1}, \dots \lambda_{k_1+\dots+k_i}, \lambda'_{m_1+\dots+m_{i-1}+1}, \dots \lambda_{m_1+\dots+m_i}) \in B_i \} \text{ où}$$

$B_i \in \mathcal{B}_{R^{k_i+m_i}}$ alors $M_{k,m}(\Lambda_1 \cap \dots \cap \Lambda_s) = \prod_i M_{k_i,m_i}(B_i)$.

Démonstration : D'après la proposition (5 . 3), appliquée à chacun des espaces

$R^{k_i+m_i}$, il suffit de montrer que :

$$Z^{k,m}(\Lambda_1 \cap \ldots \cap \Lambda_s) = \pi Z^{k_i,m_i}(B_i)$$

or $Z^{k,m}(\Lambda_1 \cap \ldots \cap \Lambda_s) = \int 1_{\Lambda_1 \cap \ldots \cap \Lambda_s} dZ^{k,m} = \int 1_{\Lambda_1} 1_{\Lambda_2} \ldots 1_{\Lambda_s} dZ^{k,m}$

$$= \int \pi_i 1_{\{(\lambda_{k_1+\ldots+\lambda_{k_{i-1}}+1} \ldots \lambda_{k_1+\ldots+k_i}, \lambda_{m_1+\ldots+m_{i-1}+1} \ldots \lambda_{m_1+\ldots+m_i}) \in B_i\}} dZ^{k,m}$$

$= \pi_i Z^{k_i,m_i}(B_i)$ d'après la proposition (4 . 4) .

Le résultat suivant est une application de la proposition précédente aux processus gaussiens.

Soit (X_t) un processus gaussien complexe stationnaire, continu en m. q, de moyenne nulle. La proposition (2 . 1) montre que $(X_t) \in \Phi^{(\infty)}$, et on sait que $M^{k,m} = 0$ si $k \neq m$. Considérons maintenant $M_{k,k}$, mesure sur $\mathbb{R}^{k+k}$, et posons dans la proposition (5. 3) $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = m_1 = \ldots = m_k = 1$, c'est à dire considérons le sous espace $\lambda_1 = \lambda'_1$, $\lambda_2 = \lambda'_2$, $\lambda_k = \lambda'_k$. La restriction de $M_{k,k}$ à ce sous espace est égale au produit de la mesure $M_{1,1}$ avec elle même k fois. En permutant les λ', on trouve k ! sous espaces de ce type, soient H_1, $H_2 \ldots H_{k!}$.

<u>Proposition 5 . 4</u> : Si X_t a un spectre continu, alors $M_{k,k}$ = somme des $M^{k,k}$ sur les k ! sous espaces définis ici dessus.

<u>Démonstration :</u> Le fait que (X_t) a un spectre continu montre que l'intersection de deux de ces sous espaces est de $M_{k,k}$-mesure nulle. D'autre part, on remarque aisément que $M_{k,k}$ est une mesure positive. Puisque les valeurs $M_{k,k}(H_i)$, $1 \leq i \leq k!$ sont toutes égales par symétrie, il suffit de montrer que $M_{k,k}(\mathbb{R}^{k+k}) = k!\ M_{k,k}(H_i)$.

Posons $Z = Z(-\infty, \infty)$, $E\ |Z|^2 = s^2$

On a $M_{k,k}(H_i) = \{M_{1,1}(\mathbb{R}^2)\}^k$ (d'après la proposition 5 . 3) = s^{2k}

$M_{k,k}(\mathbb{R}^{k+k}) = E\,|Z|^{2k}$

Or, $E\,|Z|^{2k} = \frac{d^k}{d\lambda^k}\left[E\ e^{\lambda |Z|^2}\right]_{\lambda=0} = \frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\frac{1}{1-\lambda s^2}\right]_{\lambda=0} = k!\ s^{2k}$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET : Théorie des fonctions aléatoires, Masson, Paris, 1953.

[2] K. ITÔ : Multiple Wiener Integral. J. Math. Soc. Japan, 3, 1, 1951

[3] " " Complex Multiple Wiener Integral. Jap. J. Math. 22, 1952

[4] M. LOÈVE : Fonctions aléatoires du second ordre. Suppl. à P. Lévy Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthier-Villars, Paris, 1948 .

[5] A. N. SHIRYAEV : Some Problems in the spectral Theory of Higher Moments I - Th. Prob. Appl. V, 3, 1960 .

[6] Ya. G. SINAÏ : Spectral Measures of Ergodic Processes. Th. Prob. Appl. VIII, 4, 1963 .

--oo0oo--

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences

51 - REIMS