Paul-André Meyer

Intégrales stochastiques I

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 1 (1967), p. 72-94
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1967__1__72_0>

Université de Strasbourg
Novembre 1966

Séminaire de Probabilités

INTÉGRALES STOCHASTIQUES I

par P.A.Meyer

Cet exposé est le premier d'une série de trois ou quatre, qui devrait nous mener à la très belle " formule du changement de variables dans les intégrales stochastiques" , due à KUNITA et S.WATANABE [2]. Je commence ici par la théorie des martingales de carré intégrable, et par la définition (ou plutôt les deux définitions possibles) des intégrales stochastiques ; je traite aussi de la décomposition orthogonale de l'espace des martingales de carré intégrable (MOTOO et S.WATANABE [4]). Les exposés suivants concerneront les processus de Markov, et leurs fonctionnelles additives qui sont des martingales de carré intégrable, ainsi que la notion de " système de LÉVY " due à S. WATANABE : la formule du changement de variables ne pourra venir qu'ensuite.

Cette rédaction est beaucoup plus développée que l'exposé oral (et contient d'ailleurs beaucoup de choses qui ne serviront pas dans les exposés suivants). Je me servirai librement des résultats du livre [3], et je ne démontrerai que les théorèmes qui n'y figurent pas.

§1. RAPPELS ET DÉFINITIONS GÉNÉRALES

1. Les notations seront celles de [3] : $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{P})$ est un espace probabilisé complet, muni d'une famille $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\underline{R}_+}$ de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}$, croissante et continue à droite. Nous supposerons que $\underline{\underline{F}}_0$ contient tous les ensembles négligeables, et que la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>ne possède pas de temps de discontinuité</u> : pour tout temps d'arrêt T, et toute suite croissante (T_n) de temps d'arrêt qui converge vers T, la tribu $\underline{\underline{F}}_T$ est engendrée par les tribus $\underline{\underline{F}}_{T_n}$.

Un processus stochastique $X=(X_t)_{t\in\underline{R}_+}$ est une famille de variables aléatoires réelles sur Ω, telle que X_t soit $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable pour tout t(*). On considérera souvent X comme une fonction

(*) Nous appelons donc <u>processus</u> (sauf dans l'appendice) les "processus adaptés à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$"de [3].

sur $\underset{\sim}{R}_+\times\Omega$ En particulier, le processus X sera dit <u>bien-mesurable</u> (resp. <u>très-bien-mesurable</u>) si la fonction $(t,\omega)\mapsto X_t(\omega)$ est mesurable par rapport à la tribu sur $\underset{\sim}{R}_+\times\Omega$ engendrée par les processus à trajectoires continues à droite et pourvues de limites à gauche (resp. continues à gauche). Un processus très-bien-mesurable est bien-mesurable. Nous aurons plusieurs fois l'occasion de nous servir du résultat suivant ([3], chap. VIII, th.20) :

<u>Soit</u> H <u>un processus bien-mesurable. Il existe un processus très-bien-mesurable</u> $\dot{H}$ <u>tel que l'ensemble</u> $\{t : H_t(\omega)\neq\dot{H}_t(\omega)\}$ <u>soit dénombrable pour tout</u> $\omega\in\Omega$.

Deux processus X et Y seront dits <u>indistinguables</u> si, pour presque tout $\omega\in\Omega$, on a $X_t(\omega)=Y_t(\omega)$ pour tout t.

2. Différences de processus croissants.

Nous désignerons par $\underline{\underline{A}}^+$ l'ensemble des processus croissants (continus à droite, nuls pour t=0) $A=(A_t)_{t\in\underset{\sim}{R}_+}$, <u>localement intégrables</u> , c.à.d. tels que $\underset{\sim}{E}[A_t]<+\infty$ pour tout t fini, avec identification de deux processus indistinguables. L'ensemble des $A\in\underline{\underline{A}}^+$ à trajectoires continues (resp. purement discontinues) sera noté $\underline{\underline{A}}_c^+$ (resp. $\underline{\underline{A}}_d^+$). Nous poserons $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^+-\underline{\underline{A}}^+$, $\underline{\underline{A}}_c=\underline{\underline{A}}_c^+-\underline{\underline{A}}_c^+$, $\underline{\underline{A}}_d=\dots$ L'espace $\underline{\underline{A}}$ sera muni des semi-normes

$$\lambda_t(A) = \underset{\sim}{E}[\{A_t\}]$$

(si $A\in\underline{\underline{A}}$, on désignera par $\{A\}\in\underline{\underline{A}}^+$ le processus croissant défini par

$$\{A\}_t = \int_0^t |dA_s| \quad (\text{"valeur absolue" de } A\ )\ )$$

DÉFINITION.- <u>Soit</u> $A\in\underline{\underline{A}}$. <u>Nous désignerons par</u> $L^1(A)$ (<u>resp.</u> $\dot{L}^1(A)$) <u>l'ensemble des processus bien-mesurables</u> (<u>resp. très-bien-mesurables</u>) H <u>tels que l'on ait</u>

$$\underset{\sim}{E}[\int_0^t |H_s||dA_s|] < +\infty \quad \underline{\text{pour tout}}\ t\in\underset{\sim}{R}_+$$

<u>On notera alors</u> H.A <u>l'élément de</u> $\underline{\underline{A}}$ <u>défini par</u>

$$(H.A)_t = \int_0^t H_s dA_s \quad .$$

Il est naturel de munir $L^1(A)$ des semi-normes :

$$\mu_t(H) = \underset{\sim}{E}[\int_0^t |H_s||dA_s|]$$

Il est facile de vérifier que si $H\in L^1(A)$ et $K\in L^1(H.A)$ on a $KH \in L^1(A)$ et $K.(H.A)= (KH).A$. On a un " théorème de Radon-Nikodym" du type suivant :

PROPOSITION 1.- <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>deux éléments de</u> $\underline{\underline{A}}$, <u>tels que la relation</u> $K.A=0$ (<u>où</u> K <u>est bien-mesurable et borné</u>) <u>entraîne</u> $K.B=0$. <u>Il existe alors</u> $H\in L^1(A)$ <u>tel que</u> $B= H.A$.

DÉMONSTRATION (schématique).- a) On commence par traiter le cas où l'on sait que les mesures $dB_t(\omega)$ sont absolument continues par rapport aux mesures $dA_t(\omega)$, pour tout ω. On se ramène à traiter séparément le cas où A est purement discontinu (la densité cherchée est alors $(B_t-B_{t-})/(A_t-A_{t-})$) et le cas où A est continu. Pour celui-ci, on pose $K_0=0$ et, pour $t>0$

$$K_t = \limsup_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{B_{(k+1)2^{-n}} - B_{k2^{-n}}}{A_{(k+1)2^{-n}} - A_{k2^{-n}}} I_{]k2^{-n},(k+1)2^{-n}]}(t)$$

On vérifie sans peine que le processus (K_t) est une densité de B par rapport à A, <u>progressivement mesurable</u> par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ ([3], chap.IV, déf.45). On choisit alors un processus bien-mesurable H tel que l'on ait $H_T=K_T$ p.s. pour tout temps d'arrêt T (chap.VIII, th.17). Mais alors $E[\int_0^t |H_s-K_s||dA_s|] =0$ pour tout t (chap.VII, th.15), de sorte que H est encore une densité de B par rapport à A.

b) Prenant $B=\{A\}$, on voit qu'il existe un processus $H\in L^1(A)$ tel que $\{A\}=H.A$; il n'est pas difficile de modifier H de manière à ce qu'il prenne ses valeurs dans l'ensemble $\{-1,+1\}$. On a alors aussi $A=H.\{A\}$. Cela permet de se ramener , pour traiter le cas général, au cas où A (et B) sont positifs.

c) Supposons donc A et B positifs, soit $C=A+B$; on peut écrire $A=U.C$, $B=V.C$ d'après a), où U et V sont bien-mesurables et positifs. Soit $H_t(\omega) = V_t(\omega)/U_t(\omega)$ si $U_t(\omega)\neq 0$, $H_t(\omega)=0$ si $U_t(\omega)=0$. On vérifie sans peine que H est la densité cherchée.

3. <u>Compensation d'un processus croissant</u>.

Soit C un processus dont les trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche (les éléments de $\underline{\underline{A}}$, les martingales continues à droite, possèdent cette propriété). Nous désignerons par $\Delta C_t(\omega)$ le saut $C_t(\omega)-C_{t-}(\omega)$ de C à l'instant t. Nous dirons qu'une suite $(T_n)_{n\geq 1}$ de temps d'arrêt épuise les sauts de C si

- $\underset{\sim}{P}\{T_n=T_m<+\infty\} = 0$ si $m\neq n$
- l'ensemble des t tels que $\Delta C_t(\omega) \neq 0$ est contenu dans l'ensemble $\{T_n(\omega),\ n\geq 1\}$, pour presque tout $\omega\in\Omega$.

On obtient une telle suite, par exemple, en rangeant en une suite unique les temps d'arrêt S_{nm} définis par récurrence de la manière suivante :

$$S_{n,1}(\omega) = \inf \{ t : \tfrac{1}{n} \geq |\Delta C_t(\omega)| > \tfrac{1}{n+1} \} \qquad (n\geq 0)$$
$$S_{n,m+1}(\omega) = \inf \{ t > S_{nm}(\omega) : \tfrac{1}{n} \geq |\Delta C_t(\omega)| > \tfrac{1}{n+1} \}$$

Nous introduirons maintenant (pour les besoins de cet exposé seulement : cette terminologie n'est pas consacrée) la définition suivante

DÉFINITION.- Le processus C est dit naturel si $\Delta C_T=0$ pour tout temps d'arrêt totalement inaccessible T ([3], chap.VII, déf.42) ; C est dit retors si les temps d'arrêt S_{nm} ci-dessus sont, ou totalement inaccessibles, ou p.s. égaux à $+\infty$.

En particulier, C est à la fois naturel et retors si et seulement s'il est continu ; une martingale est un processus retors ; un processus croissant est naturel en ce sens si et seulement s'il est naturel au sens de [3], chap.VII, déf.18 (voir le th.49 du chap.VII).

DÉFINITION.- Soient A et B deux éléments de $\underline{A}$; nous dirons que A et B sont associés si le processus A-B est une martingale.

Les théorèmes d'existence et d'unicité pour la décomposition des surmartingales ([3], chap.VII, ths 21,29), ainsi que le critère de continuité du processus croissant dans la décomposition de DOOB (th.37), donnent le résultat suivant :

THÉORÈME 1.- Soit $A\in\underline{A}$; il existe un processus $\tilde{A}\in\underline{A}$, associé à A, qui est naturel, et ce processus est unique. Pour que $\tilde{A}$ soit continu, il faut et il suffit que A soit retors.

Nous désignerons toujours par $\overset{c}{A}$ (c signifie " compensé") la martingale $A-\tilde{A}$. Nous écrirons $A\sim B$ pour exprimer que les processus

A et B sont associés.

La proposition suivante ne vaut que pour un processus H très-bien-mesurable.

PROPOSITION 2.- Soit H un processus très-bien-mesurable, et soit $A \in \underline{\underline{A}}$. La relation $H \in L^1(A)$ entraîne alors $H \in L^1(\tilde{A})$, et on a alors $\widetilde{H.A} = H.\tilde{A}$. En particulier, H.A et $H.\tilde{A}$ sont associés.

DÉMONSTRATION.- Posons $B = \frac{1}{2}(\{A\}+A)$, $B' = \frac{1}{2}(\{A\}-A)$; la relation $H \in L^1(A)$ entraîne $|H| \in L^1(B)$, $|H| \in L^1(B')$. Utilisons alors le th.17 du chap.VII de [3], et la remarque qui le suit (*) ; il vient

$$\underset{\sim}{E}[\int_0^t |H_s| d\tilde{B}_s] = \underset{\sim}{E}[\int_0^t |H_s| dB_s] < +\infty \quad \text{pour tout } t,$$

et on a un résultat analogue pour $\tilde{B}'$. Or le processus $\tilde{B}-\tilde{B}'$ est naturel, associé à A, donc égal à $\tilde{A}$. La relation $|H| \in \dot{L}^1(\tilde{B}+\tilde{B}')$ entraîne donc $|H| \in \dot{L}^1(\tilde{A})$, donc $H \in \dot{L}^1(\tilde{A})$. Le processus $H.\tilde{A}$ étant évidemment naturel, il ne reste plus qu'à montrer que les processus H.A et $H.\tilde{A}$ sont associés, ce qui résulte aussitôt des remarques suivant le th.17 utilisé plus haut.

§2 MARTINGALES DE CARRÉ INTÉGRABLE

1. On dit qu'un processus M est une martingale de carré intégrable si les trajectoires de M sont continues à droite et pourvues de limites à gauche, si M est une martingale, et si $\underset{\sim}{E}[M_t^2] < +\infty$ pour tout t fini. Nous désignerons par $\underline{\underline{M}}$ l'espace des martingales de carré intégrable (avec identification de deux martingales indistinguables), que nous munirons des semi-normes

$$\eta_t(M) = \sqrt{\underset{\sim}{E}[M_t^2]} \qquad (M \in \underline{\underline{M}}) .$$

Le sous-espace de $\underline{\underline{M}}$ constitué par les martingales à trajectoires continues (à une identification près !) sera désigné par $\underline{\underline{M}}_c$. Rappelons une inégalité classique, due à DOOB ([3], chap.VI, n°2)

$$\underset{\sim}{E}[\sup_{s \leq t} M_s^2] \leq 4\underset{\sim}{E}[M_t^2] \quad ;$$

cette inégalité entraîne sans peine le théorème suivant :

(*)On déduit en fait de ce théorème un résultat plus précis : si A et A' sont deux éléments de $\underline{\underline{A}}^+$ associés, les relations $H \in \dot{L}^1(A)$ et $H \in \dot{L}^1(A')$ sont équivalentes.

THÉORÈME 2 .-- $\underline{\underline{M}}$ <u>est un espace de Fréchet</u>, <u>et</u> $\underline{\underline{M}}_c$ <u>est fermé dans</u> $\underline{\underline{M}}$.

De plus, si la tribu $\underline{\underline{F}}$ est séparable (i.e. engendrée par une suite d'ensembles, aux ensembles négligeables près), l'espace $\underline{\underline{M}}$ est lui aussi séparable.

2. Le théorème suivant est fondamental pour la théorie des intégrales stochastiques. Il est démontré dans [3], chap.VIII, n^{os}23 à 25.(*)

THÉORÈME 3.- <u>Soit</u> $M\in\underline{\underline{M}}$; <u>il existe un processus croissant</u> $A\in\underline{\underline{A}}_c^+$, <u>unique, tel que le processus</u> $(M_t^2-A_t)$ <u>soit une martingale</u>.

Nous poserons $A= < M,M >$. La propriété caractéristique de ce processus croissant continu s'écrit, si $s\leq t$

$$(1)\quad \underset{\sim}{E}[M_t^2-M_s^2|\underline{\underline{F}}_s] = \underset{\sim}{E}[(M_t-M_s)^2|\underline{\underline{F}}_s] = \underset{\sim}{E}[< M,M >_t - < M,M >_s|\underline{\underline{F}}_s]$$

où l'on peut d'ailleurs remplacer s,t par deux temps d'arrêt bornés S,T tels que $S\leq T$ (il suffit d'appliquer le théorème d'arrêt de DOOB à la martingale $(M_t^2-A_t)$. Soient alors M et N deux éléments de $\underline{\underline{M}}$; on posera, en suivant MOTOO et WATANABE

$$< M,N > = \frac{1}{2}(< M+N,M+N > - < M,M > - < N,N >),$$

de sorte que $< M,N >$ appartient à $\underline{\underline{A}}_c$ et que l'on a, avec les notations ci-dessus

$(M_T-M_S)(N_T-N_S)$

$$(2)\quad \underset{\sim}{E}[M_TN_T-M_SN_S|\underline{\underline{F}}_S] = \underset{\sim}{E}[(M_T-N_T)(M_S-N_S)|\underline{\underline{F}}_S] = \underset{\sim}{E}[<M,N>_T-<M,N>_S|\underline{\underline{F}}_S].$$

Les deux martingales M et N seront dites <u>orthogonales</u> si $< M,N > =0$; cela entraîne évidemment que le processus (M_tN_t) est une martingale. Inversement, si MN est une martingale , le processus continu (donc naturel) $< M,N> \in\underline{\underline{A}}$ est associé à 0, ce qui entraîne qu'il est nul (th.1).

La proposition suivante donne des majorations utiles .

PROPOSITION 3.- <u>Soient</u> H <u>et</u> K <u>deux processus bien-mesurables tels que</u> $H^2 \in L^1(<M,M>)$, $K^2\in L^1(<N,N>)$; <u>alors</u> $HK\in L^1(<M,N>)$ <u>et on a</u>

$$(3)\quad \underset{\sim}{E}[\int_0^t |H_s||K_s||d<M,N>_s|]\leq (\underset{\sim}{E}[\int_0^t H_s^2d<M,M>_s])^{1/2}(\underset{\sim}{E}[\int_0^t K_s^2d<N,N>_s])^{1/2}.$$

DÉMONSTRATION.- Nous commencerons par traiter le cas où H et K sont des processus de la forme :

(*) **On verra en appendice une méthode pour construire ce processus.**

$$H_s(\omega) = \sum_p I_{]t_p,t_{p+1}]}(s)H_p(\omega)$$
$$K_s(\omega) = \sum_p I_{]t_p,t_{p+1}]}(s)K_p(\omega) \qquad \text{sur } [0,t],$$

où (t_p) est une subdivision finie de l'intervalle $[0,t]$, et où H_p, K_p sont uniformément bornées, et $\underline{\underline{F}}_{t_p}$ -mesurables pour tout p. Dans ce cas, calculons $\underset{\sim}{E}[\int_0^t H_sK_s d\langle M,N\rangle_s]$ en tenant compte de la relation (2), et appliquons deux fois l'inégalité de Schwarz. Il vient

$$\underset{\sim}{E}[\int_0^t H_sK_s d\langle M,N\rangle_s] = \underset{\sim}{E}[\sum_p H_pK_p(M_{t_{p+1}}-M_{t_p})(N_{t_{p+1}}-N_{t_p})]$$
$$\leqq \underset{\sim}{E}[(\sum H_p^2(M_{t_{p+1}}-M_{t_p})^2)^{1/2}(\sum K_p^2(N_{t_{p+1}}-N_{t_p})^2)^{1/2}] \leqq$$
$$(\underset{\sim}{E}[\sum H_p^2(\langle M,M\rangle_{t_{p+1}}-\langle M,M\rangle_{t_p})])^{1/2}(\underset{\sim}{E}[\sum K_p^2(\langle N,N\rangle_{t_{p+1}}-\langle N,N\rangle_{t_p})])^{1/2}.$$

Autrement dit, pour les processus du type considéré :

$$(4)\quad \underset{\sim}{E}[\int_0^t H_sK_s d\langle M,N\rangle_s] \leqq (\underset{\sim}{E}[\int_0^t H_s^2 d\langle M,M\rangle_s])^{1/2}(\underset{\sim}{E}[\int_0^t K_s^2 d\langle N,N\rangle_s])^{1/2}.$$

On étend cela par passage à la limite au cas où H et K sont bornés et continus à gauche, puis, par le raisonnement habituel de classes monotones, au cas où H et K sont bornés et très-bien-mesurables. Pour passer au cas où H et K sont bornés et bien-mesurables, on utilisera l'énoncé rappelé ci-dessus au §I, à la fin du n°1. Passons maintenant de (4) à (3), en supposant toujours H et K bien-mesurables et bornés : il existe (prop.1) un processus bien-mesurable L tel que $L_s=\pm 1$, et que $L.\langle M,N\rangle = |\langle M,N\rangle|$; on obtient (3) en remplaçant dans (4) H_s par $|H_s|$, K_s par $|K_s|L_s$. On passe enfin de là, sans aucune peine, au cas où H et K ne sont pas bornés.

3. Intégrales stochastiques des processus très-bien-mesurables

(La raison de cette restriction apparaîtra par la suite).

DÉFINITION.- Soit $M\in\underline{\underline{M}}$; on désigne par $\dot{L}^2(M)$ l'ensemble des processus très-bien-mesurables H tels que $\underset{\sim}{E}[\int_0^t H_s^2 d\langle M,M\rangle_s] <+\infty$ pour tout t fini .

Autrement dit, $H \in \dot{L}^2(M) \Leftrightarrow H^2 \in \dot{L}^1(\langle M,M\rangle)$; nous munirons $\dot{L}^2(M)$ des semi-normes :

$$\nu_t(H) = (\underset{\sim}{E}[\int_0^t H_s^2 d\langle M,M\rangle_s])^{1/2} .$$

Voici alors le théorème d'existence des intégrales stochastiques des processus très-bien-mesurables, sous la forme due à MOTOO et WATANABE. Sous une forme un peu différente, ce théorème a été établi par COURRÈGE dans [1].

THÉORÈME 4.- <u>Soit</u> $M \in \underline{\underline{M}}$, <u>et soit</u> $H \in \dot{L}^2(M)$. <u>Il existe un élément et un seul de</u> $\underline{\underline{M}}$, <u>noté</u> H.M, <u>tel que l'on ait pour tout</u> $N \in \underline{\underline{M}}$

(5) $$\langle H.M,N \rangle = H.\langle M,N \rangle \text{ (*)}$$

DÉMONSTRATION.- a) unicité : soient L et L' deux éléments de $\underline{\underline{M}}$ tels que $\langle L,N \rangle = \langle L',N \rangle = H.\langle M,N\rangle$ pour tout $N \in \underline{\underline{M}}$; on a alors $\langle L-L',N\rangle = 0$, donc $\langle L-L',L-L' \rangle = 0$, et $L=L'$.

b) Existence : nous désignerons par $\dot{E}$ le sous-espace de $\dot{L}^2(M)$ constitué par les processus H de la forme

$$H_s = \sum_{i \in \underset{\sim}{N}} H_i I_{]t_i,t_{i+1}]}(s)$$

où (t_i) est une subdivision dyadique de la droite, et où H_i est $\underline{\underline{F}}_{t_i}$-mesurable et bornée pour tout i. Nous noterons alors H.M la martingale définie, si k(s) est le dernier indice i tel que $t_i < s$, par :

$$(H.M)_s = H_0(M_{t_1}-M_{t_0}) + H_1(M_{t_2}-M_{t_1}) + \dots + H_{k(s)}(M_s - M_{k(s)}).$$

Il est facile de vérifier que H.M satisfait à (5). Un argument simple de classe monotone permet de montrer que $\dot{E}$ est dense dans $\dot{L}^2(M)$; comme l'application $H \mapsto H.M$ est continue (on a $\eta_t(H.M) = \nu_t(H)$), elle se prolonge en une application continue de $\dot{L}^2(M)$ dans $\underline{\underline{M}}$, qui est l'application cherchée (**).

NOTATION.- On écrira $(H.M)_t = \int_0^t H_s dM_s$.

(*) Le second membre a un sens d'après la prop.3 : on a en effet $H^2 \in L^1(\langle M,M\rangle)$, $1 \in L^1(\langle N,N\rangle)$, donc $H.1=H \in L^1(\langle M,N\rangle)$.

(**) On montrera aisément que H.M est continue si M est continue (grâce au th.1).

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la formule (5), et de la prop.3

COROLLAIRE .- <u>Soient</u> M <u>et</u> N <u>deux éléments de</u> $\underline{\underline{M}}$, H <u>et</u> K <u>deux éléments de</u> $\dot{L}^2(M)$ <u>et</u> $\dot{L}^2(N)$ <u>respectivement. On a alors</u> $HK \in L^1(\langle M,N\rangle)$, <u>et</u>

$$< H.M,\ K.N > = HK.< M,N > .$$

<u>En particulier</u>,

$$\underset{\sim}{E}[(\int_0^t H_s dM_s)(\int_0^t K_s dN_s)] = \underset{\sim}{E}[\int_0^t H_s K_s d\langle M,N\rangle_s] .$$

REMARQUE.- Voici la définition " classique" de l'intégrale stochastique d'un processus <u>bien-mesurable</u> . Nous désignerons par $L^2(M)$ l'ensemble des processus bien-mesurables H tels que $H^2 \in L^1(\langle M,M\rangle)$. Il existe alors (§I, n°1) un processus $\dot{H}$ très-bien-mesurable tel que , pour presque tout ω, l'ensemble $\{t : H_t(\omega) \neq \dot{H}_t(\omega)\}$ soit dénombrable. On a alors $\underset{\sim}{E}[\int_0^\infty (H_s-\dot{H}_s)^2 d\langle M,M\rangle_s]=0$, puisque $< M,M >$ est continu ; on a donc $\dot{H} \in \dot{L}^2(M)$. Si $\dot{H}'$ est un second élément de $\dot{L}^2(M)$ satisfaisant à la propriété ci-dessus, on a aussi $\underset{\sim}{E}[\int_0^\infty (\dot{H}_s-\dot{H}'_s)^2 d\langle M,M\rangle_s]=0$, et les processus $\dot{H}.M$ et $\dot{H}'.M$ sont donc indistinguables. On peut donc poser sans ambiguité $H.M=\dot{H}.M$, et toutes les formules écrites plus haut s'étendent au cas des processus bien-mesurables. Nous indiquerons au §3 une autre manière de définir l'intégrale stochastique pour ces processus.

4. Sous espaces stables et théorème de projection.

Nous dirons qu'un sous-espace $\underline{\underline{L}}$ de $\underline{\underline{M}}$ est un <u>sous-espace stable</u> s'il est fermé, et si l'on a $H.M \in \underline{\underline{L}}$ pour tout $M \in \underline{\underline{L}}$ et tout processus H, très-bien-mesurable et borné ; on a alors $H.M \in \underline{\underline{L}}$ pour tout $H \in \dot{L}^2(M)$. Toute intersection de sous-espaces stables étant encore un sous-espace stable, on peut parler du sous-espace stable $\underline{\underline{S}}(J)$ engendré par une partie $\underline{\underline{J}}$ de $\underline{\underline{M}}$.

Si $\underline{\underline{J}} \subset \underline{\underline{M}}$, on notera $J^\perp$ l'orthogonal de $\underline{\underline{J}}$, ensemble des $M \in \underline{\underline{M}}$ orthogonales à toute martingale $J \in \underline{\underline{J}}$; $J^\perp$ est évidemment un sous-es -pace stable, d'après la relation $< H.M,J > = H.\langle M,J\rangle$.

Nous allons établir, d'après MOTOO et WATANABE, le théorème suivant :

THÉORÈME 5.- Soit $M \in \underline{\underline{M}}$, et soit $\underline{\underline{L}}$ un sous-espace stable de $\underline{\underline{M}}$. Il existe un élément $pr_{\underline{\underline{L}}}(M)$ de $\underline{\underline{L}}$, unique, tel que $M-pr_{\underline{\underline{L}}}(M) \in \underline{\underline{L}}^{\perp}$.

DÉMONSTRATION.- 1)L'unicité est évidente : si L et L' sont deux éléments de $\underline{\underline{L}}$ tels que M-L et M-L' soient orthogonales à $\underline{\underline{L}}$, on a $< L-L',L-L' >=0$, donc L=L'.

2)Soit $N \in \underline{\underline{M}}$; les propositions 1 et 3 entraînent l'existence d'un processus bien-mesurable $H \in L^1(<N,N>)$ tel que $< M,N >= H.< N,N >$; comme $< N,N >$ est continu, on peut supposer que H est très-bien-mesurable (§1,n°1). Si nous pouvons montrer que $H \in \dot{L}^2(N)$, H.N sera la projection de M sur $\underline{\underline{S}}(N)$. En effet, on aura alors $< M-H.N,N > = < M,N >- H.<N,N> = 0$; l'orthogonal de M-H.N sera un sous-espace stable contenant N, et contiendra donc $\underline{\underline{S}}(N)$(*).

Pour montrer que $H \in \dot{L}^2(N)$, désignons par H_n le processus obtenu en tronquant H à -n et +n(**). On a en utilisant la prop.3

$$\underset{\sim}{E}[\int_0^t H_{ns}^2 d<N,N>_s] = \underset{\sim}{E}[\int_0^t |H_{ns}|\cdot(|H_{ns}|d<N,N>_s)] = \underset{\sim}{E}[\int_0^t |H_{ns}|\cdot(|H_s|d<N,N>_s]$$

$$= \underset{\sim}{E}[\int_0^t |H_{ns}|d\{<M,N>\}_s] \leqq (\underset{\sim}{E}[<M,M>_t])^{1/2}(\underset{\sim}{E}[\int_0^t |H_{ns}|d<N,N>_s])^{1/2}$$

$$\leqq (\underset{\sim}{E}[< M,M >_t])^{1/2}(\underset{\sim}{E}[\{<M,N>\}_t])^{1/2} < +\infty .$$

3) Passons au cas où $\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{S}}(N_1,N_2,\dots,N_p)$. Nous raisonnerons par récurrence sur le nombre p des générateurs, en supposant établie l'existence de la projection sur tout sous-espace stable engendré par moins de p martingales. Quitte à remplacer N_2 par $N_2-pr_{\underline{\underline{S}}(N_1)}(N_2)$, N_3 par $N_3-pr_{\underline{\underline{S}}(N_1,N_2)}(N_3)\dots$, on peut supposer que les martingales génératrices $N_1,\dots,N_p$ sont deux à deux orthogonales. Soient alors $H_1.N_1$, $H_2.N_2,\dots,H_p.N_p$ les projections de M sur les sous-espaces stables $\underline{\underline{S}}(N_1),\dots,\underline{\underline{S}}(N_p)$; on vérifie aussitôt que la projection cherchée est $H_1.N_1+\dots+H_p.N_p$.

4) Enfin, pour un sous-espace stable quelconque $\underline{\underline{L}}$, on considère l'ensemble F des sous-espaces stables $\underline{\underline{K}} \subset \underline{\underline{L}}$, engendrés par un nombre fini de martingales, et on ordonne F par inclusion ; $pr_{\underline{\underline{K}}}(M)$

(*) Prenons en particulier $M \in \underline{\underline{L}}$, il vient M=H.N ; ainsi $\underline{\underline{S}}(N)= \{H.N,\ H \in \dot{L}^2(N)\}$.

(**) $H_{ns} = H_s I_{\{|H_s| \leq n\}}$.

converge alors vers la projection cherchée, le long du filtre des sections de F (th.2 : il est immédiat de vérifier que l'on a un filtre de Cauchy dans $\underline{\underline{M}}$).

COROLLAIRE.- Supposons que la tribu $\underline{\underline{F}}$ soit séparable. Il existe alors une martingale $Z \in \underline{\underline{M}}$, telle que tous les processus croissants $< M,M >$ $(M \in \underline{\underline{M}})$ soient absolument continus par rapport à $< Z,Z >$.

DÉMONSTRATION.- Soit (Z_n) une suite totale dans $\underline{\underline{M}}$; le procédé d'orthogonalisation utilisé plus haut permet de supposer que les Z_n sont deux à deux orthogonales . Choisissons des nombres $\lambda_n \neq 0$ tels que la série $\sum \lambda_n Z_n$ converge dans $\underline{\underline{M}}$, et désignons par Z cette somme ; quitte à changer de notations, on peut supposer que les λ_n sont égaux à 1. On a alors $< Z,Z > = \sum_n < Z_n,Z_n >$; d'autre part, toute martingale $M \in \underline{\underline{M}}$ s'écrit sous la forme $\sum_n H_n.Z_n$, et on a donc $< M,M > = \sum_n H_n^2.< Z_n,Z_n >$. La relation $K.Z=0$ entraîne donc $K.M = 0$, et on conclut par la prop.1.

§3. SOMMES COMPENSÉES DE SAUTS

1. Dans ce paragraphe, nous écrirons ΔM_t^2 au lieu de $(\Delta M_t)^2$(il ne risquera pas d'y avoir ambigüité avec le saut du processus M^2 à l'instant t).

PROPOSITION 4.- Soit $M \in \underline{\underline{M}}$. On a si $r<t$

$$\underset{\sim}{E}[\sum_{r<s\leq t} \Delta M_s^2 | \underline{\underline{F}}_r] \leq \underset{\sim}{E}[M_t^2 - M_r^2 | \underline{\underline{F}}_r] \quad ,$$

et en particulier $\underset{\sim}{E}[\sum_{s\leq t} \Delta M_s^2] \leq \underset{\sim}{E}[M_t^2 - M_0^2]$.

DÉMONSTRATION.- Nous établirons seulement la seconde inégalité. Désignons par $(t_i^n)_{0\leq i<2}$ la n-ième subdivision dyadique de $[0,t]$. On a

$$\underset{\sim}{E}[\sum (M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})^2] = \underset{\sim}{E}[(M_t - M_0)^2] \ ,$$

et d'autre part

$$\sum_{s\leq t} \Delta M_s^2 \leq \liminf_n \sum_{i=0}^{2^n-1} (M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})^2 ,$$

comme on le vérifie très facilement. On applique alors le lemme de Fatou.

COROLLAIRE.- Soit $M \in \underline{\underline{M}}$, et soit T un temps d'arrêt. Le processus

$(A_t)=(\Delta M_T I_{\{t\geq T\}})$ appartient à $\underline{\underline{A}}$.

(La relation $\Delta M_T \in L^2$ entraîne en effet $|\Delta M_T| \in L^1$!). On a en fait un résultat plus précis, démontré en substance dans [3], chap.VIII, th.31 (avec la remarque suivant ce théorème ; on se borne seulement à calculer $< \overset{c}{A},\overset{c}{A} >$ au lieu de $< \overset{c}{A},N>$).

PROPOSITION 5.- Soit $M \in \underline{\underline{M}}$, et soit T un temps d'arrêt. La martingale $\overset{c}{A} = A-\tilde{A}$ (où $A \in \underline{\underline{A}}$ est le processus défini plus haut) appartient à $\underline{\underline{M}}$. Soit $N \in \underline{\underline{M}}$, et soit B le processus défini par

$$B_t = \Delta M_T . \Delta N_T . I_{\{t\geq T\}} \quad ;$$

on a alors $B \in \underline{\underline{A}}$, et $< \overset{c}{A},N > = \tilde{B}$. En particulier, $\overset{c}{A}$ est orthogonale à toute martingale $N \in \underline{\underline{M}}$ continue à l'instant T.

Choisissons maintenant une suite $(T_n)_{n\geq 1}$ de temps d'arrêt , qui épuise les sauts de M (§I, n°3), et désignons par A_n le processus $(\Delta M_{T_n} I_{\{t\geq T_n\}})$, qui appartient à $\underline{\underline{A}}$. Il n'est pas difficile de déduire de la prop.5,et de l'inégalité classique de DOOB rappelée au début du §2, que l'on a le résultat suivant :

THÉORÈME 6.- La martingale $M \in \underline{\underline{M}}$ s'écrit comme somme d'une série, convergente dans $\underline{\underline{M}}$, de martingales deux à deux orthogonales

$$M = M' + \sum_{n\geq 1} \overset{c}{A}_n = M'+M'' \quad .$$

La martingale M' est continue. La martingale M'' est orthogonale à toute martingale $N \in \underline{\underline{M}}$ sans discontinuité commune avec M''.

Il en résulte aussitôt que la décomposition de M en M' et M'' est unique ; on dira que M'' est la somme compensée des sauts de M . Si $M=M''$, on dira que M est une somme compensée de sauts. Il faut et il suffit pour cela

- que M soit orthogonale à toute martingale $N \in \underline{\underline{M}}$ sans discontinuité commune avec M

ou seulement

- que M soit orthogonale à toute martingale continue.

Voici encore une caractérisation des sommes compensées de sauts .

PROPOSITION 6.- <u>Pour que</u> M <u>soit une somme compensée de sauts, il faut et il suffit que l'on ait, pour tout couple</u> (r,t) <u>tel que</u> r<t

$$\underset{\sim}{E}[\sum_{r<s\leq t} \Delta M_s^2 \mid \underline{\underline{F}}_r] = \underset{\sim}{E}[M_t^2 - M_r^2 \mid \underline{\underline{F}}_r] \quad \underline{\text{p.s.}}$$

DÉMONSTRATION.- Désignons par T un temps d'arrêt, et reprenons les notations de la prop.5 ; on a $<\overset{c}{A},\overset{c}{A}>_t \sim \Delta M_T^2 I_{\{t\geq T\}}$, soit

$$\underset{\sim}{E}[\Delta M_T^2 I_{\{r<T\leq t\}} \mid \underline{\underline{F}}_r] = \underset{\sim}{E}[\overset{c}{A}{}_t^2 - \overset{c}{A}{}_r^2 \mid \underline{\underline{F}}_r] .$$

Faisons parcourir à T une suite (T_n) qui épuise les sauts de M, sommons sur n, il vient

$$\underset{\sim}{E}[\sum_{r<s\leq t} \Delta M_s^2 \mid \underline{\underline{F}}_r] = \underset{\sim}{E}[M_t''^2 - M_r''^2 \mid \underline{\underline{F}}_r],$$

d'où aussitôt le résultat cherché, les martingales M' et M" du th. 6 étant orthogonales. Noter qu'il suffit même que l'on ait pour tout t

$$\underset{\sim}{E}[\sum_{s\leq t} \Delta M_s^2] = \underset{\sim}{E}[M_t^2 - M_0^2]$$

pour que l'on ait M=M" , i.e. pour que M soit une somme compensée de sauts.

2. <u>Second processus croissant associé à une martingale</u>.

Soit $M\in\underline{\underline{M}}$; nous allons associer à M un second processus croissant, qui au lieu d'être naturel comme < M,M > sera retors. La décomposition M=M'+M" a la même signification que dans le th.6.

DÉFINITION.- <u>Nous désignerons par</u> [M,M] <u>le processus croissant défini par</u>

$$[M,M]_t = <M',M'>_t + \sum_{s\leq t} \Delta M_s^2 .$$

Il résulte de la prop.6 que le second processus croissant figurant au second membre, et le processus croissant < M",M">, sont <u>associés</u> ; comme M' et M" sont orthogonales, on voit que les processus [M,M] et <M,M> sont eux-mêmes associés.

Nous poserons , si M et N sont deux éléments de $\underline{\underline{M}}$, [M,N] =

$\frac{1}{2}([M+N,M+N]-[M,M]-[N,N])$; ce processus appartient à $\underline{\underline{A}}$, est associé à $<M,N>$, et on a évidemment

$$[M,N]_t = <M',N'>_t + \sum_{s\leq t}\Delta M_s.\Delta N_s \ .$$

On a donc $[M,N]=0$ si et seulement si M et N n'ont pas de discontinuités communes, et si M' et N' sont orthogonales.

DÉFINITION.- <u>Nous désignerons par</u> $L^2(M)$ <u>l'ensemble des processus bien-mesurables</u> H <u>tels que</u> $H^2\in L^1([M,M])$.

Les processus $[M,M]$ et $<M,M>$ étant associés, il résulte de la prop.2 que, si H est très-bien-mesurable, les processus $H^2.[M,M]$ et $H^2.<M,M>$ sont associés. Autrement dit, un processus très-bien-mesurable appartient donc à $L^2(M)$ si et seulement s'il appartient à $\dot{L}^2(M)$ (§2,n°3). On peut munir $L^2(M)$ des semi-normes $\nu_t(H)= (\underset{\sim}{E}[\int_0^t H_s^2 d[M,M]_s])^{1/2}$, qui prolongent les semi-normes ν_t définies sur $\dot{L}^2(M)$ au §2, n°3.

Le résultat suivant est analogue à la prop.3 .

PROPOSITION 7.- <u>Soient</u> M <u>et</u> N <u>deux éléments de</u> $\underline{\underline{M}}$, H <u>et</u> K <u>deux éléments de</u> $L^2(M)$ <u>et</u> $L^2(N)$ <u>respectivement</u>. <u>On a alors</u> $HK\in L^1([M,N])$, <u>et</u>

$$\underset{\sim}{E}[\int_0^t |H_s||K_s||d[M,N]_s|]\leq (\underset{\sim}{E}[\int_0^t H_s^2 d[M,M]_s])^{1/2}(\underset{\sim}{E}[\int_0^t K_s^2 d[N,N]_s])^{1/2} .$$

DÉMONSTRATION.- Nous nous bornerons au cas où M et N sont des sommes compensées de sauts, le cas général s'obtenant en combinant celui-ci et la prop.3 pour les parties continues, et en appliquant l'inégalité de Schwarz. On a alors pour le premier membre l'évaluation

$$\underset{\sim}{E}[\sum_{s\leq t}|H_sK_s\Delta M_s\,\Delta N_s|] \leq (\underset{\sim}{E}[\sum_{s\leq t}|H_s^2\Delta M_s^2|])^{1/2}(\underset{\sim}{E}[\sum_{s\leq t}|K_s^2\,\Delta N_s^2|])^{1/2}$$

quantité égale au second membre de l'expression de l'énoncé.

3. Voici enfin la théorie de l'intégrale stochastique pour les processus bien-mesurables. L'intérêt de ces intégrales stochastiques tient au th.8, d'après lequel la martingale H.M admet en tout point s un saut égal à $H_s.\Delta M_s$, à la manière des intégrales de Stieltjes ordinaires (mais contrairement aux

intégrales stochastiques " classiques" des processus bien-mesurables, introduites plus haut dans la remarque après le th.4).

THÉORÈME 7.- Soient $M \in \underline{\underline{M}}$ et $H \in L^2(M)$. Il existe une martingale $H.M \in \underline{\underline{M}}$, unique, telle que l'on ait pour toute martingale $N \in \underline{\underline{M}}$

$$[H.M,N] = H.[M,N] \quad .$$

Si H est très-bien-mesurable, la martingale H.M coïncide avec celle qui est désignée par la même notation dans l'énoncé du th.4.

DÉMONSTRATION.-a)Unicité : soient L_1 et L_2 deux éléments de $\underline{\underline{M}}$ tels que $[L_1,N]=[L_2,N]=H.[M,N]$; alors en prenant $N=L_1-L_2$ on trouve que $[L_1-L_2,L_1-L_2]=0$, donc (les processus [,] et < , > étant associés) $\underset{\sim}{E}[(L_1-L_2)_t^2]=0$ pour tout t, et $L_1=L_2$.

b)Existence : choisissons un processus très-bien-mesurable $\dot{H}$ tel que $\{t : H_t(\omega)\neq\dot{H}_t(\omega)\}$ soit dénombrable pour tout $\omega\in\Omega$ (§1,n°1). Reprenons la décomposition M=M'+M" du th.6, avec $M" =\sum \overset{c}{A_n}$. On a évidemment $\dot{H} \in \dot{L}^2(M')$. Pour chaque n, le processus $H.A_n$ appartient à $\underline{\underline{A}}$, et la martingale $M_n =\widehat{H.A_n}$ appartient à $\underline{\underline{M}}$ (prop.5) ; M_n a un seul saut, à l'instant T_n, égal à $H_{T_n} . \Delta M_{T_n}$. Ces martingales sans discontinuités communes sont deux à deux orthogonales, et on en déduit aussitôt que la série $\dot{H}.M' + \sum_n M_n$ converge dans $\underline{\underline{M}}$.Il est très facile alors de vérifier que cette martingale satisfait à l'égalité de l'énoncé.

c) Supposons que H soit très-bien-mesurable ; soit $N \in \underline{\underline{M}}$. Le symbole H.M ayant le sens ci-dessus, les processus [H.M,N] et <H.M,N> sont associés. D'autre part, [M,N] et <M,N> étant associés, la prop.3 entraîne que H.[M,N] et H.<M,N> sont associés. Comme [H.M,N] et H.[M,N] sont égaux, <H.M,N> et H.<M,N> sont associés ; comme ils sont continus, ils sont égaux, et H.M satisfait à la propriété caractéristique du théorème 4. CQFD .

Le théorème suivant est une conséquence facile (mais assez importante) de la construction du th.7 :

THÉORÈME 8.- <u>Soient</u> $M \in \underline{\underline{M}}$ <u>et</u> $H \in L^2(M)$. <u>Pour presque tout</u> $\omega \in \Omega$ <u>on a</u>

$$\Delta(H.M)_s(\omega) = H_s(\omega) \,.\, \Delta M_s(\omega) \qquad \underline{\text{pour tout}}\ s.$$

DÉMONSTRATION.- La martingale $H.M$ est somme dans $\underline{\underline{M}}$ des martingales $H.M'$ et $\widehat{H.\overset{c}{A}_n}$ (notations du th.7). La propriété ci-dessus est alors vraie pour chacune de ces martingales, et on conclut grâce à l'inégalité de DOOB (début du §2, n°1).

REMARQUE.- Il est assez facile d'étendre l'intégration des processus très-bien-mesurables au cas où la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ possède des temps de discontinuité. En revanche, nous ne savons pas faire cette extension pour les processus bien-mesurables.

Le lecteur pourra trouver dans les travaux récents de P.W.MILLAR (réf. à la fin de l'exposé II) une autre manière d'aborder les intégrales stochastiques.

APPENDICE : CONSTRUCTION DES DEUX PROCESSUS CROISSANTS ASSOCIÉS À UNE MARTINGALE DE CARRÉ INTÉGRABLE

L'objet de cet appendice est une construction simple des deux processus $<M,M>$ et $[M,M]$ associés à une martingale $M\in\underline{\underline{M}}$. Une construction analogue est donnée dans [2] pour le processus $<M,M>$ associé à une martingale M continue , mais elle est moins simple à certains égards (elle utilise des chaînes de temps d'arrêt au lieu de subdivisions dyadiques). Chemin faisant, nous préciserons certains résultats du chap.VII de [3] sur les processus de la classe (D) et le " passage du discret au continu" dans la décomposition des surmartingales.

1. Propriétés d'intégrabilité uniforme.(*)

Soit $(Y_s)_{s\in\mathbb{R}_+}$ un processus stochastique mesurable, mais non nécessairement adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_s)$. Soit $\underline{\underline{T}}$ l'ensemble de tous les temps d'arrêt finis de la famille $(\underline{\underline{F}}_s)$; nous dirons que Y appartient à la classe (D) si l'ensemble de toutes les variables aléatoires Y_T, $T\in\underline{\underline{T}}$, est uniformément intégrable. En général nous introduirons la fonction r (module d'intégrabilité) définie pour $c\in\mathbb{R}_+$ par

$$r(c) = \sup_{T\in\underline{\underline{T}}} \mathbb{E}[|Y_T| I_{\{|Y_T|>c\}}]$$

Y appartient à la classe (D) si et seulement si la fonction r est finie, et tend vers 0 lorsque $c\to+\infty$.

LEMME.- Si Y appartient à la classe (D), les variables aléatoires $Y_T.I_{\{T<+\infty\}}$ sont uniformément intégrables, T parcourant l'ensemble de tous les temps d'arrêt finis ou non.

On peut en effet supposer que Y est ≥ 0 ; la relation $Y_T.I_{\{T<+\infty\,,Y_T>c\}} \leq \liminf_n Y_{T_n}.I_{\{Y_{T_n}>c\}}$ (où $T_n = \inf(T,n)$), et le lemme de Fatou, montrent que l'espérance du premier membre est majorée par r(c), d'où le lemme.

Dans la suite, nous utiliserons la notion de processus de la classe (D), ou la notation r(c), pour des processus dont l'ensemble des temps sera distinct de $\mathbb{R}_+$.

(*) L'absence de temps de discontinuité pour la famille de tribus ne sera utilisée qu'à partir du théorème 1.

2. Considérons une surmartingale ≥ 0 , $X = (X_n)_{n\geq 0}$, par rapport à une famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_n)$, et supposons que X appartienne à la classe (D). Désignons par $\underline{X}$ la partie potentiel de la décomposition de Riesz de X ([3], chap.V, n°25), et posons :

$$A_0=0,\ A_1=A_0+(X_0-\underset{\sim}{E}[X_1|\underline{\underline{F}}_0]),\ \ldots\ldots,\ A_n=A_{n-1}+(X_{n-1}-\underset{\sim}{E}[X_n|\underline{\underline{F}}_{n-1}])\ldots$$

Si $a_0, a_1, \ldots$ est une suite de nombres positifs, on a $(a_0+a_1+\ldots)^2 \leqq 2[a_0(a_0+a_1+\ldots)+ a_1(a_1+a_2+\ldots)+a_2(a_2+\ldots)+\ldots]$. Donc ici

$$\begin{aligned} A_\infty^2 \leqq 2[\ &(\underline{X}_0-\underset{\sim}{E}[\underline{X}_1|\underline{\underline{F}}_0])(\ (\underline{X}_0-\underset{\sim}{E}[\underline{X}_1|\underline{\underline{F}}_0])+(\underline{X}_1-\underset{\sim}{E}[\underline{X}_2|\underline{\underline{F}}_1])+\ldots\ ) \\ &+(\underline{X}_1-\underset{\sim}{E}[\underline{X}_2|\underline{\underline{F}}_1])(\ (\underline{X}_1-\underset{\sim}{E}[\underline{X}_2|\underline{\underline{F}}_1])+(\underline{X}_2-\underset{\sim}{E}[\underline{X}_3|\underline{\underline{F}}_2])+\ldots\ ) \\ &+\ldots.] \\ = 2[\ &(\underline{X}_0-\underset{\sim}{E}[\underline{X}_1|\underline{\underline{F}}_0])\underline{X}_0 + (\underline{X}_1-\underset{\sim}{E}[\underline{X}_2|\underline{\underline{F}}_1])\underline{X}_1+\ldots] \end{aligned}$$

Donc en particulier, si $\underline{X} \leqq c$, on a $\underset{\sim}{E}[A_\infty^2] \leqq 2c\underset{\sim}{E}[X_0] \leqq 2c^2$.

Posons ensuite $T_c = \inf\{n : X_n > c\}$, et $A_n^c = A_n I_{\{n<T_c\}} + A_{T_c} I_{\{n\geqq T_c\}}$. Soit $Y_n = \underset{\sim}{E}[A_\infty^c - A_n^c|\underline{\underline{F}}_n] \leqq \underline{X}_n$. La relation $\underline{X}_n > c$ entraîne $T_c \leqq n$, donc $A_\infty^c = A_n^c$, donc

$$\begin{aligned} Y_n &= \underset{\sim}{E}[(A_\infty^c - A_n^c)I_{\{\underline{X}_n\leqq c\}}] = \underset{\sim}{E}[A_\infty^c - A_n^c|\underline{\underline{F}}_n]I_{\{\underline{X}_n\leqq c\}} = Y_n I_{\{\underline{X}_n\leqq c\}} \\ &\leqq Y_n I_{\{Y_n \leqq c\}} \leqq c\ . \end{aligned}$$

Ainsi $\underset{\sim}{E}[(A_\infty^c)^2] \leqq 2c^2$. D'autre part, $\underset{\sim}{E}[A_\infty - A_\infty^c] = \underset{\sim}{E}[\underset{\sim}{E}[A_\infty - A_{T_c}|\underline{\underline{F}}_{T_c}]] = \underset{\sim}{E}[\underline{X}_{T_c}] \leqq r(c)$. Par conséquent, si u est un nombre >0

$$\begin{aligned} \int_{\{A_\infty>u\}} A_\infty\, d\underset{\sim}{P} &\leqq r(c)+\int_{\{A_\infty>u\}} A_\infty^c\, d\underset{\sim}{P} \leqq r(c)+(\underset{\sim}{P}\{A_\infty>u\})^{1/2}(\underset{\sim}{E}[(A_\infty^c)^2])^{1/2} \\ &\leqq r(c) + (\tfrac{1}{u}\underset{\sim}{E}[X_0])^{1/2}(2c^2)^{1/2}\ . \end{aligned}$$

Notons que $\underset{\sim}{E}[X_0] \leqq c+r(c)$. Choisissons $c = u^{1/6}$; il vient

$$\int_{\{A_\infty>u\}} A_\infty\, d\underset{\sim}{P} \leqq r(u^{1/6}) + [2u^{-1/2} + 2u^{-2/3}r(u^{1/6})]^{1/2}$$

quantité qui tend vers 0 lorsque $u\to+\infty$. Cette majoration donne un " module d'intégrabilité" pour les variables aléatoires A_∞, en fonction du module d'intégrabilité du processus X.

Applications.

a) Cas d'une surmartingale positive $X_0, X_1, \ldots, X_n$ (adaptée à une famille de tribus $\underline{\underline{F}}_0, \ldots, \underline{\underline{F}}_n$). Posons pour m>n $X_m = X_n$, $\underline{\underline{F}}_m = \underline{\underline{F}}_n$: cela ne change pas le module d'intégrabilité r(c). La variable aléatoire A_∞ considérée plus haut vaut alors :

$$(X_0 - \underset{\sim}{E}[X_1 | \underline{\underline{F}}_0]) + \ldots + (X_{n-1} - \underset{\sim}{E}[X_n | \underline{\underline{F}}_{n-1}])$$

et le calcul précédent donne un module d'intégrabilité pour les v.a. A_∞ , qui ne dépend que de la fonction r.

b) Considérons maintenant une surmartingale $(X_s)_{0 \leqq s \leqq t}$, positive et appartenant à la classe (D). Prenons une subdivision $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_{n-1} < t_n = t$ de l'intervalle [0,t], et appliquons le résultat précédent à la surmartingale $(X_0, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$, dont le module d'intégrabilité est au plus égal à celui de toute la surmartingale X. La variable aléatoire A_∞ correspondante vaut alors

$$(X_0 - \underset{\sim}{E}[X_{t_1} | \underline{\underline{F}}_0]) + \ldots + (X_{t_{n-1}} - \underset{\sim}{E}[X_t | \underline{\underline{F}}_{t_{n-1}}]) .$$

Les majorations que nous avons faites montrent que <u>toutes les variables de cette forme, relatives à toutes les subdivisions de</u> [0,t], <u>sont uniformément intégrables</u>.

Dans la suite , nous emploierons l'expression " lorsque la subdivision $(t_0, \ldots, t_n)$ devient arbitrairement fine " , pour parler de la convergence suivant l'ensemble filtrant des subdivisions de [0,t].

3. Convergence vers le processus croissant < M,M >.

Le lemme suivant (dû à Mlle DOLÉANS) améliore un résultat de la première rédaction de cet exposé.

LEMME 1.- <u>Soit</u> $(A_s)_{s \leqq t}$ <u>un processus croissant intégrable continu</u> . <u>Pour toute subdivision</u> $S = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ <u>de</u> [0,t], <u>posons</u>

$$A_t^S = \underset{\sim}{E}[A_{t_1} | \underline{\underline{F}}_0] + \underset{\sim}{E}[A_{t_2} - A_{t_1} | \underline{\underline{F}}_{t_1}] + \ldots + \underset{\sim}{E}[A_t - A_{t_{n-1}} | \underline{\underline{F}}_{t_{n-1}}]$$
$$= \underset{\sim}{E}[X_0 - X_{t_1} | \underline{\underline{F}}_0] + \ldots + \underset{\sim}{E}[X_{t_{n-1}} - X_t | \underline{\underline{F}}_{t_{n-1}}]$$

où (X_t) désigne une surmartingale telle que $X+A$ soit une martingale. Alors $A_t^S \to A_t$ dans L^1, lorsque les subdivisions deviennent arbitrairement fines.(*)

DÉMONSTRATION.- Nous commencerons par supposer que $A_t \in L^2$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(A_t - A_t^S)^2] &= \mathbb{E}[(\sum (A_{t_{i+1}} - A_{t_i}) - \sum \mathbb{E}[A_{t_{i+1}} - A_{t_i} | \underline{\underline{F}}_{t_i}])^2] \\
&= \mathbb{E}[\sum ((A_{t_{i+1}} - A_{t_i}) - \mathbb{E}[A_{t_{i+1}} - A_{t_i} | \underline{\underline{F}}_{t_i}])^2] \\
&\leqq 2\mathbb{E}[\sum (A_{t_{i+1}} - A_{t_i})^2] + 2\mathbb{E}[\sum (\mathbb{E}[A_{t_{i+1}} - A_{t_i} | \underline{\underline{F}}_{t_i}]^2)] \\
&\leqq 4\mathbb{E}[\sum (A_{t_{i+1}} - A_{t_i})^2] \quad (\text{ inégalité de Jensen}) \\
&\leqq 4\mathbb{E}[A_t \cdot \sup_i (A_{t_{i+1}} - A_{t_i})]
\end{aligned}$$

et cela tend vers 0, d'après le théorème de Lebesgue et la continuité (uniforme) des trajectoires de A. Passons au cas général : posons

$$B_s = A_s \wedge n \quad , \quad C_s = A_s - B_s$$

B et C sont deux processus croissants intégrables continus, B_t (borné) appartient à L^2, et on a $A_t^S = B_t^S + C_t^S$; donc

$$\mathbb{E}[|A_t - A_t^S|] \leqq \mathbb{E}[|B_t - B_t^S|] + \mathbb{E}[C_t] + \mathbb{E}[C_t^S]$$

Comme $\mathbb{E}[C_t^S] = \mathbb{E}[C_t]$, les deux derniers termes peuvent être rendus $<\varepsilon$ par un choix convenable de n, après quoi on peut rendre le premier terme $<\varepsilon$ en prenant S assez fine, ce qui établit le lemme.

Revenons maintenant à la situation des martingales de carré intégrables : M désignant une telle martingale, prenons pour X la surmartingale $(-M_s^2)$, pour A le processus croissant $\langle M,M \rangle$, et appliquons l'énoncé précédent. Il vient

THÉORÈME 1.- Soit $M \in \underline{\underline{M}}$. La somme

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 | \underline{\underline{F}}_{t_i}]$$

converge vers $\langle M,M \rangle_t$ dans L^1, lorsque la subdivision $(t_0, \ldots, t_n)$ de $[0,t]$ devient arbitrairement fine.

(*) L'énoncé vaut aussi pour un processus croissant A naturel (non nécessairement continu) à condition de remplacer la convergence forte de L^1 par la convergence faible. Ce résultat est dû aussi à Mlle DOLÉANS.

4. Convergence vers le processus croissant $[M,M]$

THÉORÈME 2.- Soit $M \in \underline{\underline{M}}$. Les sommes

$$(2) \qquad \sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2$$

convergent vers $[M,M]_t$ dans L^1, lorsque les subdivisions $(t_0, \ldots, t_n)$ de $[0,t]$ deviennent arbitrairement fines.

DÉMONSTRATION.-a) Nous allons montrer d'abord que toutes les variables aléatoires (2) relatives à toutes les subdivisions de $[0,t]$ sont uniformément intégrables.

Considérons la surmartingale positive $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n+1})$, par rapport à la famille de tribus $\underline{\underline{G}}_0 = \underline{\underline{F}}_0, \ldots, \underline{\underline{G}}_n = \underline{\underline{G}}_{n+1} = \underline{\underline{F}}_{t_n}$, définie par

$$Y_0 = E[M_t^2 | \underline{\underline{F}}_0]$$
$$Y_1 = E[M_t^2 | \underline{\underline{F}}_{t_1}] - M_{t_1}^2 + (M_{t_1} - M_0)^2$$
$$Y_2 = E[M_t^2 | \underline{\underline{F}}_{t_2}] - M_{t_2}^2 + (M_{t_2} - M_{t_1})^2$$
$$\ldots$$
$$Y_n = E[M_t^2 | \underline{\underline{F}}_{t_n}] - M_{t_n}^2 + (M_t - M_{t_{n-1}})^2 = (M_t - M_{t_{n-1}})^2$$
$$Y_{n+1} = 0$$

La fonction Y_i est majorée par $E[M_t^2 | \underline{\underline{F}}_{t_i}] + 4.\sup_s M_s^2$; comme ce dernier processus appartient à la classe (D), il résulte du n°2 que les variables aléatoires A_∞ associées aux surmartingales Y_i, pour les diverses subdivisions de $[0,t]$, sont uniformément intégrables. Or on vérifie aussitôt que A_∞ est précisément la variable aléatoire (2). En effet

$$A_0 = 0 \; ; \; A_1 = Y_0 - E[Y_1 | \underline{\underline{F}}_0] = M_0^2 \; ; \; A_2 = A_1 + (Y_1 - E[Y_2 | \underline{\underline{F}}_{t_1}])$$
$$= M_0^2 + (M_{t_1} - M_0)^2 \text{ , etc ... jusqu'à } A_{n+1} = A_\infty .$$

b) Nous allons étudier maintenant le cas où M est une martingale continue ; dans ce cas, $[M,M] = \langle M,M\rangle$; nous désignerons par A ce processus. Comme les variables aléatoires (2) sont uniformément intégrables d'après a), il suffira d'établir la convergence en probabilité . Désignons par T le temps d'arrêt

$$\inf\{s \leq t : M_s \geq n \text{ ou } A_s \geq n\}$$

ou t s'il n'existe pas de tel $s \leq t$. Désignons par M' la martingale (bornée du fait que M est continue) obtenue en arrêtant M à l'instant T, par **A'** le processus croissant (borné) obtenu en arrêtant de même A ; on a $\langle M',M'\rangle = A'$. D'autre part, la somme (2) relative à M' est égale à la somme relative à M, et $A_t = A'_t$, sur l'ensemble $\{T \geqq t\}$. Comme cet ensemble a une probabilité très voisine de 1 si n est assez grand, il suffira d'établir la convergence en probabilité dans le cas où M et A sont bornés sur $[0,t]$. Nous avons alors, en désignant par S la somme (2) :

$$\underset{\sim}{E}[\,(S-A_t)^2\,] = \underset{\sim}{E}[\,(\textstyle\sum\{(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2-(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})\})^2]$$
$$= \underset{\sim}{E}[\,\textstyle\sum\{(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2-(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})\}^2\,]$$

car tous les autres termes du développement de $\sum^2$ ont une espérance nulle. En poursuivant :

$$\underset{\sim}{E}[\,(S-A_t)^2] \leqq 2\underset{\sim}{E}[\,\textstyle\sum (M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^4] + 2\underset{\sim}{E}[\textstyle\sum(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})^2]\ ;$$

le premier terme est majoré par $2\underset{\sim}{E}[(\sum(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2).\sup_i (M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2]$. Lorsqu'on fait varier la subdivision, le second facteur tend vers 0 en restant borné, d'après la continuité uniforme des trajectoires de M sur $[0,t]$, tandis que le premier facteur reste uniformément intégrable d'après a) : l'espérance du premier terme tend donc vers 0. De même, lorsque les subdivisions deviennent arbitrairement fines, l'espérance du second terme, majorée par $\underset{\sim}{E}[A_t.\sup_i (A_{t_{i+1}}-A_{t_i})]$, tend vers 0. Le cas b) est donc achevé.

c) Passons maintenant au cas général : nous poserons $M=P+Q+R$, où P est continue, où Q est la somme des n premiers termes de la décomposition (th.6) de la somme compensée des sauts de M, et où R est le reste de la somme compensée des sauts. Nous poserons aussi $N=P+Q$. Nous avons :

$$\underset{\sim}{E}[\textstyle\sum (R_{t_{i+1}}-R_{t_i})^2] = \underset{\sim}{E}[(R_t-R_0)^2]$$

qui est arbitrairement petit, si n est choisi assez grand. De même, la contribution de R dans les doubles produits est majorée par

$$\underset{\sim}{E}[\,|\textstyle\sum(N_{t_{i+1}}-N_{t_i})(R_{t_{i+1}}-R_{t_i})|\,] \leqq \underset{\sim}{E}[(\sum(N_{t_{i+1}}-N_{t_i})^2)^{\frac{1}{2}}(\sum(R_{t_{i+1}}-R_{t_i})^2)^{\frac{1}{2}}]$$

$$\leq (\underset{\sim}{E}[\sum(N_{t_{i+1}}-N_{t_i})^2])^{1/2}(\underset{\sim}{E}[\sum(R_{t_{i+1}}-R_{t_i})^2])^{1/2}$$

qui est arbitrairement petit , si n est choisi assez grand. Il suffit donc de traiter le cas où R=0, i.e. où il y a au plus n sauts dans la somme compensée. La contribution des termes carrés dans P est traitée en b) ; la contribution des carrés dans Q se traite facilement : les $\sum (Q_{t_{i+1}}-Q_{t_i})^2$ sont uniformément intégrables, et tendent simplement vers $\sum_{s\leq t}\Delta Q_s^2$ (noter que les trajectoires de Q sont à variation bornée). Reste enfin à étudier la somme $\sum (P_{t_{i+1}}-P_{t_i})(Q_{t_{i+1}}-Q_{t_i})$: ces variables aléatoires sont uniformément intégrables d'après a), et tendent simplement vers 0 (soit V={Q} la " valeur absolue" de Q : cette somme est majorée par $(\sup_i |P_{t_{i+1}}-P_{t_i}|).V_t$, et le premier facteur tend vers 0 d'après la continuité uniforme des trajectoires de P.

BIBLIOGRAPHIE .

[1] Ph. COURRÈGE.- Intégrales stochastiques et martingales de carré intégrable. Séminaire Brelot-Choquet-Deny (théorie du potentiel) 7e année, 1962-63, exposé 7, 20 pages.

[2] H. KUNITA et S. WATANABE.- On square integral martingales. Article à paraître.

[3] P.A.MEYER.- Probabilités et Potentiels. Blaisdell Publ. Co, Boston ; Hermann, Paris, 1966.

[4] M. MOTOO et S.WATANABE.- On a class of additive functionals of Markov processes. Journal of Maths Kyoto University, 1965, p.429-469.

[5] S.WATANABE.- On discontinuous additive functionals and Lévy measure of a Markov process. Japanese J. of M., 34, 1964, p. 53-79.