MICHEL WEIL

Retournement du temps dans les processus markoviens

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 1 (1967), p. 166-176
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1967__1__166_0>

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
STRASBOURG

Séminaire de Probabilités Novembre 1966

RETOURNEMENT DU TEMPS DANS LES PROCESSUS MARKOVIENS

(par M. Weil)

1. - INTRODUCTION.

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus markovien de fonction de transition $(P_t)_{t>0}$ et de loi initiale μ, et soit $U_o = \int_0^\infty P_t\,dt$. Si le noyau U_o est un noyau diffusion propre, si le semi-groupe (P_t) est fellérien et s'il existe un semi-groupe fellérien $(\hat{P}_t)$ en dualité avec (P_t) par rapport à la mesure μU_o, NAGASAWA (Nagoya Math. J. 24 (1964) 177-204) montre que le processus obtenu par retournement du temps à partir d'un certain "temps de retour" R est markovien, homogène dans le temps et que sa fonction de transition est justement $(\hat{P}_t)$; en particulier elle ne dépend pas de R.

2. - NOTATIONS.

Soient E un espace localement compact à base dénombrable, ∂ un point isolé adjoint à E et $E' = E \cup \{\partial\}$. On note $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) la tribu borélienne sur E (resp. E'). Toutes les fonctions définies sur E seront étendues à E' en leur donnant la valeur 0 au point ∂.

Soit $(P_t)_{t>0}$ un semi-groupe de noyaux sous-markoviens sur $(E,\mathcal{B})$. Ce semi-groupe est rendu markovien sur $(E',\mathcal{B}')$ de la manière canonique. On le supposera fellérien.

Un processus markovien, de loi initiale μ, admettant (P_t) comme semi-groupe de transition sera un système $(W, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, (Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \underset{\sim}{P}^\mu)$ où $(W, \mathcal{G}, \underset{\sim}{P}^\mu)$ est un espace probabilisé, où $(\mathcal{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{G}$, où chaque Y_t est une variable aléatoire $\mathcal{G}_t$-mesurable à valeurs dans $(E',\mathcal{B}')$, et où la loi $\underset{\sim}{P}^\mu$ vérifie les propriétés :

1) $\underset{\sim}{P}^\mu \{Y_0 \in A\} = \mu(A)$ $\qquad (A \in \mathcal{B}')$

2) $\underset{\sim}{E}^\mu [f \circ Y_t \,|\, \mathcal{G}_s] = P_{t-s}(Y_s, f)$ $\qquad (f \geq 0$, $\mathcal{B}'$-mesurable ; $s \leq t)$.

La famille de systèmes $(W, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t), (Y_t), \underset{\sim}{P}^\mu)_{\mu\in\mathcal{P}}$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des lois de probabilité sur E', est une réalisation de (P_t) si :

a) Pour chaque loi $\mu \in \mathcal{P}$ le processus obtenu en munissant $(W, \mathcal{G})$ de la loi $\underset{\sim}{P}^\mu$ est un processus markovien admettant μ comme loi initiale.

b) Pour tout $A \in \mathcal{G}$ la fonction : $x \longmapsto \underset{\sim}{P}^x(A)$ est mesurable (on note $\underset{\sim}{P}^x$ la mesure $\underset{\sim}{P}^{\varepsilon_x}$), et on a :

$$\underset{\sim}{P}^\mu(A) = \int \underset{\sim}{P}^x(A)\,\mu(dx).$$

<u>Réalisation canonique</u>.

Nous allons maintenant particulariser le système $(W, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t), (Y_t), \underset{\sim}{P}^\mu)$. Pour cela, nous désignerons par Ω l'ensemble des applications continues à droite, et ayant une limite à gauche, de $\mathbb{R}_+$ dans E' qui gardent la valeur ∂ à partir du premier instant où elles l'atteignent. On désigne par $X_t(\omega)$ la valeur d'un élément ω de Ω à l'instant t, par $\zeta(\omega)$ la durée de vie :

inf $(t : X_t(\omega) = \partial)$ et par $\mathfrak{F}^\circ$ (resp. $\mathfrak{F}_t^\circ$) la tribu engendrée par les applications X_s, $s \in \mathbb{R}_+$ (resp. X_s, $s \leq t$).

Le semi-groupe (P_t) étant fellérien, pour toute loi μ sur $(E', \mathfrak{B}')$ il existe une loi $\underset{\sim}{P}^\mu$ sur $(\Omega, \mathfrak{F}^\circ)$ pour laquelle le processus (X_t) est markovien et admet μ comme loi initiale.

Cette loi $\underset{\sim}{P}^\mu$ est unique. Soient $\mathfrak{F}^\mu$ la tribu obtenue en complétant $\mathfrak{F}^\circ$ pour la loi $\underset{\sim}{P}^\mu$, et $\mathfrak{F}_t^\mu$ la tribu constituée des éléments de $\mathfrak{F}^\mu$ ne différant d'un élément de $\mathfrak{F}_t^\circ$ que par un ensemble $\underset{\sim}{P}^\mu$-négligeable. Désignons encore par

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{\mu \in P} \mathfrak{F}^\mu \qquad\qquad \mathfrak{F}_t = \bigcap_{\mu} \mathfrak{F}_t^\mu \quad .$$

Si l'on désigne toujours par $\underset{\sim}{P}^\mu$ l'extension de cette loi à $\mathfrak{F}^\mu$ ou $\mathfrak{F}$, on vérifie que le système $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), (X_t), \underset{\sim}{P}^\mu)$ est une réalisation de (P_t) qu'on appellera la réalisation canonique de (P_t).

3. - NOYAUX EN DUALITÉ.

Définition - Deux noyaux sous-markoviens M et $\hat{M}$ sont en dualité par rapport à une mesure m sur E si, quelles que soient les fonctions mesurables et bornées f, g sur E, on a la relation :

$$\int Mf.\,g \; dm = \int f.\,\hat{M}g \; dm \quad .$$

Comme exemple très simple, on peut considérer les deux noyaux :

$$M(x, dy) = p(x,y)\, m(dy) \qquad\qquad \hat{M}(x, dy) = p(y,x)\, m(dy)$$

qui sont en dualité par rapport à la mesure m. ($p(x,y)$ désigne ici une fonction positive mesurable de (x,y)).

Deux semi-groupes (resp. résolvante) $(P_t)_{t\geq 0}$ et $(\hat{P}_t)_{t\geq 0}$ (resp. $(U_p)_{p\geq 0}$ et $(\hat{U}_p)_{p\geq 0}$) sur l'espace $(E, \mathcal{B})$ seront dits en dualité par rapport à une mesure m sur E si les noyaux P_t et $\hat{P}_t$ (resp. U_p et $\hat{U}_p$) sont en dualité par rapport à m, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (resp. $p \in \mathbb{R}_+$).

Nous supposerons dans toute la suite que μ est une loi de probabilité sur E, que (P_t) et $(\hat{P}_t)$ sont deux semi-groupes fellériens sur E, de résolvantes respectives $(U_p$ et $(\hat{U}_p)$, que la mesure $m = \mu U_o$ est de Radon, et que (P_t) et $(\hat{P}_t)$ sont en dualité par rapport à m.

Nous allons maintenant définir les instants où l'on pourra retourner le processus, de manière à obtenir encore un processus markovien et homogène dans le temps.

4. - TEMPS DE RETOUR.

Définition 4. 1. - Une application R de Ω dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ est un temps de retour si elle possède les propriétés suivantes :

(r_o) R est $\mathcal{J}$-mesurable et $R \leq \zeta$

(r_1) si $s < R(\omega)$ alors $R(\omega) = s + R(\theta_s(\omega))$

(r_2) si $s > R(\omega)$ alors $R(\theta_s(\omega)) = 0$.

Intuitivement, un temps de retour est l'instant où un certain phénomène se produit pour la dernière fois.

Il est clair que la durée de vie ζ du processus (X_t) est un temps de retour.

Comme autre exemple, en désignant par

$$S_D(\omega) = \sup\,(t \geq 0\ ,\ X_t(\omega) \in D) \qquad\qquad D \subset E$$
$$= 0 \quad \text{si l'ensemble de ces } t \text{ est vide}$$

(le dernier temps de sortie du sous-ensemble D de E), nous avons la

Proposition 4.1. - Le dernier temps de sortie d'un sous-ensemble borélien D de E est un temps de retour.

Démonstration.

Les axiomes (r_1) et (r_2) sont évidents. Montrons l'axiome (r_o) lorsque D est ouvert : on a

$$\{t < S_D\} = \{\text{ il existe } r \in \mathbb{Q}_+\ ,\ t < r\ ,\ X_r(\omega) \in D\}$$

car les trajectoires du processus sont continues à droite. Le dernier ensemble appartient à $\mathfrak{F}$.

Lorsque D n'est pas ouvert, il faut utiliser la théorie des ensembles analytiques.

5. - RETOURNEMENT DU TEMPS DANS LES PROCESSUS MARKOVIENS HOMOGÈNES.

Soit R un temps de retour ; posons :

$$(5.1) \qquad Y_t(\omega) = \begin{cases} \partial & \text{si } R(\omega) = +\infty \quad \text{ou } R(\omega) \leq t \\ X_{R(\omega)-t}(\omega) & \text{si } t < R(\omega) < \infty \end{cases}$$

et désignons par $\hat{X}_t(\omega)$ la limite à droite $Y_{t_+}(\omega)$.

Définition 5. 1 .- Le processus $((\hat{X}_t)_{t>0}, \underset{\sim}{P}^{\mu})$ défini sur l'espace $(\Omega, \mathfrak{F})$ est appelé le processus en retournant $(X_t, \underset{\sim}{P}^{\mu})$ à l'instant R (ou, plus brièvement, le processus retourné à R).

Le caractère markovien du processus $(\hat{X}_t, \underset{\sim}{P}^{\mu})$ se déduira du lemme suivant , intéressant par lui-même .

Lemme 5. 1. - Soient $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite croissante de nombres réels strictement positifs, et $f_1, \ldots, f_n$, g une suite de fonctions sur E' , continues , bornées et nulles au point ∂ . On a alors la relation suivante :

$$\begin{aligned}(5.2)\qquad & \underset{\sim}{E}^{\mu}\left[\int_{t_n}^{\infty} dt\, e^{-bt} e^{-aR} f_1 \circ Y_{t_1} \ldots f_n \circ Y_{t_n}\; g \circ Y_t\right] \\ & = \underset{\sim}{E}^{\mu}\left[\int_0^{\infty} ds\, e^{-as} g \circ X_s\; \underset{\sim}{E}^{X_s}\left[e^{-(a+b)R} f_1 \circ Y_{t_1} \ldots f_n \circ Y_{t_n}\right]\right] .\end{aligned}$$

Preuve . On a

$$I = \int_{t_n}^{\infty} dt\, e^{-bt} e^{-aR} f_1 \circ Y_{t_1} \ldots f_n \circ Y_{t_n} \cdot g \circ Y_t$$

$$= 1_{\{t_n < R < \infty\}} \int_{[t_n, R[} dt\, e^{-bt} e^{-aR} f_1 \circ Y_{t_1} \ldots f_n \circ Y_{t_n}\; g \circ Y_t$$

car sur l'ensemble $\{t \geq R\}$ (resp. $\{R \leq t_n\}$, $\{R = \infty\}$) nous avons :

$$\begin{aligned} & g \circ Y_t = g(\partial) = 0 \qquad \text{d'après } (5.1) \\ (\text{resp.}\quad & f_n \circ Y_{t_n} = f_n(\partial) = 0 \qquad \text{d'après } (5.1) , \\ & e^{-aR} = 0 \,)\end{aligned}$$

ce qui entraîne l'apparition de l'indicatrice et la restriction de l'intervalle d'intégration .

En posant $s = R - t$, I s'écrira :

$$I = 1_{\{t_n < R < \infty\}} \int_0^{R-t_n} ds\, e^{-b(R-s)}\, e^{-aR}\, f_1 \circ Y_{t_1} \dots f_n \circ Y_{t_n}\, g \circ Y_{R-s} .$$

Mais nous avons :

$$g \circ Y_{R-s} = g \circ X_s .$$

D'autre part :

$$e^{-b(R-s)}\, e^{-aR} = e^{-b(R\circ\theta_s)}\, e^{-a(S+R\circ\theta_s)}$$
$$= e^{-as}\, e^{-(a+b)R\circ\theta_s}$$

car $s < R$ sur $\{t_n < R < \infty\}$ puisque $s \leq R - t_n < R$.

Enfin on a la relation :

$$f_i \circ Y_{t_i} = f_i \circ Y_{t_i} \circ \theta_s \qquad \text{sur } \{t_n < R < \infty\} .$$

En effet, sur ce dernier ensemble, on a $Y_{t_i}(\omega) = X_{R(\omega)-t_i}(\omega)$. Or $Y_{t_i}(\theta_s(\omega))$ est, soit égal à $X_{R(\theta_s(\omega))-t_i}(\theta_s(\omega))$, soit égal à ∂ d'après (5.1) ; mais cette dernière possibilité est à exclure car elle a lieu lorsque $R(\theta_s(\omega))$ est infini (resp. inférieur à t_i) et ce n'est pas possible puisque $s < R(\omega) < \infty$ (resp. puisque $s < R(\omega)$, ce qui entraîne : $R \circ \theta_s(\omega) = R(\omega) - s$, mais $R(\omega) - s > t_i$ car $s < R(\omega) - t_n$). Par conséquent $Y_{t_i}(\theta_s(\omega))$ est égal à $X_{R(\omega)-t_i}(\omega)$.

Nous avons donc obtenu :

$$I = 1_{\{t_n < R < \infty\}} \int_0^{R-t_n} ds\, e^{-as}\, g \circ X_s\, e^{-(a+b)R\circ\theta_s}\, f_1 \circ Y_{t_1} \circ \theta_s \dots f_n \circ Y_{t_n} \circ \theta_s .$$

Dans cette expression, l'indicatrice peut être supprimée et l'intégration peut avoir lieu de zéro à l'infini . En effet d'une part, pour l'indicatrice, ou bien R est infini et par conséquent $R \circ \theta_s$ l'est également, ou bien $R \leq t_n$, mais comme $s < R$ dans l'intégrant, cela entraîne $R \circ \theta_s \leq t_n$: dans les deux cas, la fonction sous le signe intégral :

$$e^{-(a+b)R \circ \theta_s} f_n \circ Y_{t_n} \circ \theta_s$$

est nulle . Nous pouvons donc supprimer l'indicatrice .

D'autre part, pour l'intégration de zéro à l'infini , $f_n \circ Y_{t_n} \circ \theta_s$ n'est non nul que si $Y_{t_n} \circ \theta_s$ est différent de ∂ , par conséquent. si $t_n < R \circ \theta$. Trois cas sont alors possibles : ou $s < R$ et donc $R \circ \theta_s = R - s$ et par suite $s < R - t_n$, ou $s = R$ et alors la fonction sous le signe somme à une intégrale nulle sur l'ensemble $\{s = R\}$, ou enfin $s > R$, mais ce cas est exclu car il entraînerait que $R \circ \theta_s = 0$ et donc $t_n < 0$ ce qui est absurde . On peut donc intégrer de zéro à l'infini .

La démonstration du lemme 5. 1 s'achève alors en considérant l'espérance $\underset{\sim}{E}^{\mu}[I]$ et en utilisant la propriété de Markov simple .

<u>Corollaire 5. 1</u>. - Soient $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite croissante de nombres réels strictement positifs , et $f_1, \ldots, f_n, g$ une suite de fonctions sur E' , continues, bornées et nulles au point ∂ . On a alors la relation suivante :

$$(5.3)\quad \begin{aligned} &\underset{\sim}{E}^{\mu}[\int_{t_n}^{\infty} dt\ e^{-bt}\ e^{-aR}\ f_1 \circ \hat{X}_{t_1} \ldots f_n \circ \hat{X}_{t_n}\ g \circ \hat{X}_t] \\ &= \underset{\sim}{E}^{\mu}[\int_0^{\infty} ds\ e^{-as}\ g \circ X_s\ \underset{\sim}{E}^{X_s}[e^{-(a+b)R}\ f_1 \circ \hat{X}_{t_1} \ldots f_n \circ \hat{X}_{t_n}]] . \end{aligned}$$

Preuve . Cela résulte du fait que le processus (X_t) est continu à droite et à des limites à gauche, et par conséquent l'ensemble des t tels que $\underset{\sim}{P}^{\mu}\{Y_t \neq \hat{X}_t\} > 0$ est dénombrable .

Ce corollaire va nous permettre de montrer le résultat principal de cet exposé .

Théorème 5.1.- Soit $((X_t), \underset{\sim}{P}^{\mu})$ un processus markovien, homogène dans le temps et admettant comme fonction de transition un semi-groupe fellérien (P_t) . Supposons que le noyau $U_o = \int_0^{\infty} P_t \, dt$ soit un noyau diffusion propre et qu'il existe un semi-groupe fellérien $(\hat{P}_t)$ qui soit en dualité avec (P_t) par rapport à la mesure μU_o . Soit enfin R un temps de retour .

Alors le processus $(\hat{X}_t, \underset{\sim}{P}^{\mu})$ retourné du processus $(X_t, \underset{\sim}{P}^{\mu})$ à l'instant R est un processus markovien, homogène dans le temps et dont la fonction de transition est $(\hat{P}_t)$.

On notera que $(\hat{X}_t)$ n'est défini que pour $t > 0$ en général .

On remarquera que les résolvantes (U_p) , $(\hat{U}_p)$, associées aux semi-groupes (P_t) , $(\hat{P}_t)$, sont également en dualité par rapport à la mesure μU_o .

Démonstration du théorème .-

Il suffit de montrer l'égalité, où $0 < t < u$:

(5.4) $$A(t,u) = B(t,u)$$

avec

$$A(t,u) = \underset{\sim}{E}^{\mu}[f_1 \circ \hat{X}_{t_1} \dots f_n \circ \hat{X}_{t_n} \; g \circ \hat{X}_t \; h \circ \hat{X}_u]$$

et $$B(t,u) = \underset{\sim}{E}^{\mu}[f_1 \circ \hat{X}_{t_1} \dots f_n \circ \hat{X}_{t_n} \; g \circ \hat{X}_t \; \hat{P}_{u-t}(\hat{X}_t, h)]$$

où $f_1,\ldots,f_n,g,h$ sont des fonctions sur E', continues, bornées et nulles en ∂ et où la suite $(t_1,t_2,\ldots,t_n,\ t,u)$ vérifie : $0<t_1\leq t_2\leq\ldots\leq t_n\leq t<u$. (En effet, cela entraînera la même relation lorsque les $f_1,\ldots,f_n,\ g,h$ sont continues sur E).

Les deux membres de (5.4) sont des fonctions continues à droite en u sur $]t,\infty[$ car le semi-groupe $(\hat{P}_t)$ est fellérien et la mesure $\underset{\sim}{P}^\mu$ est bornée. Il suffit donc de prouver l'égalité de leurs transformées de Laplace $\mathcal{L}A$ et $\mathcal{L}B$ en u.

En utilisant le corollaire 5.1 on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}A &= \underset{\sim}{E}^\mu[\int_t^\infty f_1\circ\hat{X}_{t_1}\ldots f_n\circ\hat{X}_{t_n}\ g\circ\hat{X}_t\ e^{-au}\ h\circ X_u\ du]\\
(5.5)\qquad &= \underset{\sim}{E}^\mu[\int_0^\infty h\circ X_s\ ds\ \ E^{X_s}[e^{-aR}f_1\circ\hat{X}_{t_1}\ldots f_n\circ\hat{X}_{t_n}\ \ g\circ\hat{X}_t]\\
&= \int(\mu\,U_o)(dx)\ \ h(x)\ w_t(x)
\end{aligned}
$$

où $w_t(x) = \underset{\sim}{E}^x[e^{-aR}f_1\circ\hat{X}_{t_1}\ldots f_n\circ\hat{X}_{t_n}\ g\circ\hat{X}_t]$.

D'autre part :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}B &= \int_t^\infty \underset{\sim}{E}^\mu[f_1\circ\hat{X}_{t_1}\ldots f_n\circ\hat{X}_{t_n}\ \ g\circ\hat{X}_t\ \hat{P}_{u-t}(\hat{X}_t,h)]\ e^{-au}\ du\\
(5.6)\qquad &= \underset{\sim}{E}^\mu[f_1\circ\hat{X}_{t_1}\ldots f_n\circ\hat{X}_{t_n}\ \ g\circ X_t\ \hat{U}_a h\circ\hat{X}_t]\ e^{-at}
\end{aligned}
$$

Or les deux fonctions (5.5) et (5.6) sont continues à droite en t sur $]t_n,\infty[$: pour (5.6) cela résulte du caractère fellérien du semi-groupe $(\hat{P}_t)$: $\hat{U}_a h$ est une fonction continue ; tandis que pour (5.5) c'est évident. Par conséquent, il suffit de vérifier l'égalité de leur transformée de Laplace $\mathcal{L}\mathcal{L}A$ et $\mathcal{L}\mathcal{L}B$ en t. Mais on a

$$\int_{t_n}^{\infty} e^{-bt}\ w_t(x)\ dt = \underset{\sim}{E}^x [\int_{t_n}^{\infty} e^{-bt}\ dt\ e^{-aR}\ f_1 \circ \hat{X}_{t_1} \dots f_n \circ \hat{X}_{t_n}\ \ g \circ \hat{X}_t]$$

$$= \underset{\sim}{E}^x [\int_0^{\infty} e^{-as}\ g \circ X_s\ ds\ \underset{\sim}{E}^{X_s} [\ e^{-(a+b)R} f_1 \circ \hat{X}_{t_1} \dots f_n \circ \hat{X}_{t_n}\ ]]$$

d'après le corollaire 5, 1 . La dernière expression vaut :

$$U_a\ (x\ ,\ g\ .\ k_{ab})$$

avec

$$k_{a\,b}(x) = \underset{\sim}{E}^x [\ e^{-(a+b)R}\ f \circ \hat{X}_{t_1} \dots f_n \circ \hat{X}_{t_n}\ ]\ .$$

On en déduit que :

$$\mathcal{L}\mathcal{L}A\ =\ \int (\mu U_o)(dx)\ h(x)\ \ U_a(x, g. k_{a\,b})$$

$$=\ \int (\mu\ U_o)(dx)\ \hat{U}_a\ (x, h)\ g(x)\ k_{a\,b}(x)$$

puisque les résolvantes (U_p) et $(\hat{U}_p)$ sont en dualité par rapport à $\mu\, U_o$.
Enfin, en utilisant à nouveau le corollaire 6, 1 $\mathcal{L}\mathcal{L}B$ est égal à :

$$\mathcal{L}\mathcal{L}B\ =\ \underset{\sim}{E}^{\mu} [\int_{t_n}^{\infty} dt\ e^{-bt}\ \ e^{-at}\ f_1 \circ \hat{X}_{t_1} \dots f_n \circ \hat{X}_{t_n}\ \ \ \hat{U}_a h \circ X_t\ ]$$

$$=\ \underset{\sim}{E}^{\mu} [\int_0^{\infty} g \circ X_s\ \ \hat{U}_a\ h \circ X_s\ \underset{\sim}{E}^{X_s} [\ e^{-(a+b)R}\ f_1 \circ \hat{X}_{t_1} \dots f_n \circ \hat{X}_{t_n}\ ]]$$

$$=\ \int (\mu\, U_o)(dx)\ g(x)\ \hat{U}_a\, h(x)\, k_{a\,b}\,(x)$$

$$=\ \mathcal{L}\mathcal{L}A\ .$$

Cela termine la démonstration .
