

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

## Sur un théorème de Deny

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 1 (1967), p. 163-165

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1967\\_\\_1\\_\\_163\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1967__1__163_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Université de Strasbourg  
Séminaire de probabilités

SUR UN THÉORÈME DE DENY

par P.A.Meyer

Soient  $(E, \underline{E})$  un espace mesurable,  $(U_p)$  une résolvente sous-mar-kovienne sur  $E$ , satisfaisant à l'hypothèse de continuité absolue : il existe une mesure bornée  $\mu \geq 0$ , telle que les relations  $(\mu(A)=0)$ ,  $(A \text{ est un ensemble de potentiel nul})$ , soient équivalentes. On a alors le théorème suivant, établi par DENY [1] en théorie clas-sique du potentiel newtonien :

THÉORÈME.- Soit  $(u_n)$  une suite de fonctions surmédianes par rap-port à  $(U_p)$ . Il existe une suite  $(u_{n_k})$  extraite de  $(u_n)$ , et une fonction excessive  $u$ , telles que  $u_{n_k}$  converge vers  $u$  presque par-tout ( i.e., sauf sur un ensemble de potentiel nul). (\*)

DÉMONSTRATION.- Il suffit de traiter le cas où les  $u_n$  sont bor-nées : pour obtenir le cas général, on appliquera le résultat aux fonctions surmédianes bornées  $u_n \wedge p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ), et on utilisera le procédé diagonal. Nous supposons donc  $u_n \leq 1$  pour tout  $n$ .

La boule unité de  $L^\infty(\mu)$  étant compacte pour la topologie faible  $\sigma(L^\infty, L^1)$ , on peut extraire de la suite  $(u_n)$  une suite  $(u_{n_k})$  qui converge pour cette topologie : l'argument est fami-lier : soit  $\underline{A}$  une algèbre de Boole dénombrable qui engendre la tribu engendrée par les  $u_n$  ; on construit par le procédé dia-go-nal une suite  $(u_{n_k})$  telle que les intégrales  $\int u_{n_k} d\mu$  convergent pour tout  $A \in \underline{A}$ . Alors la suite  $(u_{n_k})$  converge  $\overset{A}{\text{faiblement}}$ .

Désignons par  $\bar{u}$  une fonction mesurable, égale  $\mu$ -p.p. à la li-mite de cette suite ( nous simplifierons les notations en écri-vant  $u_k$  au lieu de  $u_{n_k}$ ). La mesure  $\varepsilon_x U_p$  étant bornée, absolument continue par rapport à  $\mu$ , nous avons  $\lim_k \langle \varepsilon_x U_p, u_k \rangle = \langle \varepsilon_x U_p, \bar{u} \rangle$ ,  
ou

$$\lim_k pU_p u_k = pU_p \bar{u}$$

Mais nous avons  $u_k \geq pU_p u_k$  presque partout, donc  $\bar{u} \geq pU_p \bar{u}$  p.p..

---

(\*) Un théorème voisin de celui-ci est énoncé dans [2], pour la résolvente associée à un très bon semi-groupe (th.5.8, p.206).

**Mais la démonstration est malheureusement obscure, et comporte une lacune.**

La fonction  $\bar{u}$  est donc "presque-surmédiane", et une adaptation immédiate du raisonnement de [3], chap.IX, th.60, montre que la fonction  $u = \lim_{p \rightarrow \infty} pU_p \bar{u}$  est excessive, égale à  $\bar{u}$  presque partout. Evidemment  $u_k$  converge aussi faiblement vers  $\bar{u}$ .

Comme  $pU_p u_k \leq u_k$  presque partout, nous avons  $pU_p \bar{u} \leq \liminf_k u_k$  presque partout, d'où en faisant tendre  $p$  vers  $+\infty$

$$u = \lim_k u_k \text{ (au sens faible)} ; u \leq \liminf_k u_k$$

D'après le lemme ci-dessous, la suite  $u_k$  converge fortement vers  $u$  dans  $L^1$ ; il existe donc une suite extraite qui converge presque partout vers  $u$ , et le théorème est démontré.

On remarquera que le lemme est énoncé sous une forme plus générale qu'il n'est nécessaire (topologie  $\sigma(L^1, L^\infty)$  au lieu de  $\sigma(L^\infty, L^1)$ ). On l'appliquera, bien entendu, aux fonctions  $w_k = u_k - u$ .

LEMME.- Soit  $\mu$  une mesure de probabilité, et soit  $(w_n)$  une suite uniformément intégrable (\*) d'éléments de  $L^1(\mu)$ . On suppose que  $w_n \rightarrow 0$  faiblement (topologie  $\sigma(L^1, L^\infty)$ ) et que  $\liminf_n w_n \geq 0$ . Alors  $w_n \rightarrow 0$  fortement dans  $L^1(\mu)$ .

DÉMONSTRATION.- Soit  $\varepsilon > 0$ . Choisissons  $\eta > 0$  tel que  $\mu(A) < \eta$  entraîne  $\int_A |w_n| d\mu < \varepsilon$  quel que soit  $n$  (intégrabilité uniforme). Puis choisissons un entier  $N$  assez grand pour que l'on ait  $\mu(A_N) > 1 - \eta$ , en posant

$$A_N = \{x \in E : \inf_{n \geq N} w_n(x) < -\varepsilon\}$$

Enfin, la suite  $w_n$  convergeant faiblement vers 0, choisissons  $N' \geq N$  tel que la relation  $n \geq N'$  entraîne  $\int_{A_N} w_n d\mu < \varepsilon$ . Nous avons alors

si  $n \geq N'$

$$\int_E |w_n| d\mu \leq \int_{A_N} |w_n| d\mu + \int_{E \setminus A_N} |w_n| d\mu \leq \int_{A_N} |w_n + \varepsilon| d\mu + \int_{A_N} \varepsilon d\mu + \int_{E \setminus A_N} |w_n| d\mu$$

$$\int_{E \setminus A_N} |w_n| d\mu \leq \int_{A_N} |w_n + \varepsilon| d\mu + \varepsilon + \int_{E \setminus A_N} |w_n| d\mu$$

La dernière intégrale est au plus égale à  $\varepsilon$ , puisque  $\mu(E \setminus A_N) < \eta$ .

---

(\*) Cette hypothèse est en réalité une conséquence de la relation  $w_n \rightarrow 0$  faiblement (critère de Dunford-Pettis).

La première intégrale est égale, d'après la définition de  $A_N$ , à  $\int_{A_N} (w_n + \varepsilon) d\mu \leq \int_{A_N} w_n d\mu + \varepsilon \leq 2\varepsilon$ , d'où finalement  $\int |w_n| d\mu \leq 4\varepsilon$  si  $n \geq N'$ , cqfd.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DENY(J.).- Sur la convergence des suites de potentiels. C.R. Acad. Sci.t.218, 1944, p.497-499.
- [2] MEYER(P.A.).- Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov. Ann.Inst.Fourier,t.12, 1962, p.125-230.
- [3] MEYER(P.A.).- Probabilités et Potentiel. Blaisdell Publ.Co, Boston ; Hermann, Paris, 1966.