Paul-André Meyer

Sur un théorème de Deny

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 1 (1967), p. 163-165
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1967__1__163_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de probabilités

SUR UN THÉORÈME DE DENY

par P.A.Meyer

Soient $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace mesurable, (U_p) une résolvante sous-markovienne sur E, satisfaisant à l'hypothèse de continuité absolue : il existe une mesure bornée $\mu \geq 0$, telle que les relations $(\mu(A)=0)$, (A est un ensemble de potentiel nul), soient équivalentes. On a alors le théorème suivant, établi par DENY [1] en théorie classique du potentiel newtonien :

THÉORÈME.- Soit (u_n) une suite de fonctions surmédianes par rapport à (U_p). Il existe une suite (u_{n_k}) extraite de (u_n), et une fonction excessive u, telles que u_{n_k} converge vers u presque partout (i.e., sauf sur un ensemble de potentiel nul).(*)

DÉMONSTRATION.- Il suffit de traiter le cas où les u_n sont bornées : pour obtenir le cas général, on appliquera le résultat aux fonctions surmédianes bornées $u_n \wedge p$ $(p \in \mathbb{N})$, et on utilisera le procédé diagonal. Nous supposerons donc $u_n \leq 1$ pour tout n.

La boule unité de $L^\infty(\mu)$ étant compacte pour la topologie faible $\sigma(L^\infty, L^1)$, on peut extraire de la suite (u_n) une suite (u_{n_k}) qui converge pour cette topologie : l'argument est familier : soit $\underline{\underline{A}}$ une algèbre de Boole dénombrable qui engendre la tribu engendrée par les u_n ; on construit par le procédé diagonal une suite (u_{n_k}) telle que les intégrales $\int_A u_{n_k} d\mu$ convergent pour tout $A \in \underline{\underline{A}}$. Alors la suite (u_{n_k}) converge faiblement.

Désignons par $\bar{u}$ une fonction mesurable, égale μ-p.p. à la limite de cette suite (nous simplifierons les notations en écrivant u_k au lieu de u_{n_k}). La mesure $\varepsilon_x U_p$ étant bornée, absolument continue par rapport à μ, nous avons $\lim_k \langle \varepsilon_x U_p, u_k \rangle = \langle \varepsilon_x U_p, \bar{u} \rangle$, ou

$$\lim_k \; pU_p u_k = pU_p \bar{u}$$

Mais nous avons $u_k \geq pU_p u_k$ presque partout , donc $\bar{u} \geq pU_p \bar{u}$ p.p..

(*) Un théorème voisin de celui-ci est énoncé dans [2], pour la résolvante associée à un très bon semi-groupe (th.5.8, p.206). **Mais la démonstration est malheureusement obscure, et comporte une lacune.**

La fonction $\bar{u}$ est donc " presque-surmédiane", et une adaptation immédiate du raisonnement de [3], chap.IX, th.60, montre que la fonction $u = \lim_{p\to\infty} pU_p\bar{u}$ est excessive, égale à $\bar{u}$ presque partout. Evidemment u_k converge aussi faiblement vers $\bar{u}$.

Comme $pU_pu_k \leqq u_k$ presque partout, nous avons $pU_p\bar{u} \leqq \liminf_k u_k$ presque partout , d'où en faisant tendre p vers $+\infty$

$$u = \lim_k u_k \text{ (au sens faible) } ; \; u \leqq \liminf_k u_k$$

D'après le lemme ci-dessous, la suite u_k converge fortement vers u dans L^1; il existe donc une suite extraite qui converge presque partout vers u, et le théorème est démontré.

On remarquera que le lemme est énoncé sous une forme plus générale qu'il n'est nécessaire (topologie $\sigma(L^1,L^\infty)$ au lieu de $\sigma(L^\infty,L^1)$). On l'appliquera, bien entendu, aux fonctions $w_k=u_k-u$.

LEMME.- Soit μ une mesure de probabilité, et soit (w_n) une suite uniformément intégrable(*) d'éléments de $L^1(\mu)$. On suppose que $w_n \to 0$ faiblement (topologie $\sigma(L^1,L^\infty)$) et que $\liminf_n w_n \geqq 0$. Alors $w_n \to 0$ fortement dans $L^1(\mu)$.

DÉMONSTRATION.- Soit $\varepsilon>0$. Choisissons $\eta>0$ tel que $\mu(A)<\eta$ entraîne $\int_A |w_n|d\mu < \varepsilon$ quel que soit n (intégrabilité uniforme). Puis choisissons un entier N assez grand pour que l'on ait $\mu(A_N) > 1-\eta$, en posant

$$A_N = \{x\in E \; : \; \inf_{n\geqq N} w_n(x) < -\varepsilon\}$$

Enfin, la suite w_n convergeant faiblement vers 0, choisissons $N' \geqq N$ tel que la relation $n\geqq N'$ entraîne $\int_{A_N} w_n d\mu < \varepsilon$. Nous avons alors si $n\geqq N'$

$$\int_E |w_n|d\mu \leqq \int_{A_N} |w_n|d\mu + \int_{E\setminus A_N} |w_n|d\mu \leqq \int_{A_N} |w_n+\varepsilon|d\mu + \int_{A_N} \varepsilon d\mu +$$

$$\int_{E\setminus A_N} |w_n|d\mu \leqq \int_{A_N} |w_n+\varepsilon|d\mu + \varepsilon + \int_{E\setminus A_N} |w_n|d\mu$$

La dernière intégrale est au plus égale à ε , puisque $\mu(E\setminus A_N)<\eta$.

(*)Cette hypothèse est en réalité une conséquence de la relation $w_n \to 0$ faiblement (critère de Dunford-Pettis).

La première intégrale est égale, d'après la définition de A_N, à $\int_{A_N}(w_n+\varepsilon)d\mu \leqq \int_{A_N} w_n d\mu + \varepsilon \leqq 2\varepsilon$, d'où finalement $\int|w_n|d\mu \leqq 4\varepsilon$ si $n \geqq N'$, cqfd.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DENY(J.).- Sur la convergence des suites de potentiels. C.R. Acad. Sci.t.218, 1944, p.497-499.

[2] MEYER(P.A.).- Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov. Ann.Inst.Fourier,t.12, 1962, p.125-230.

[3] MEYER(P.A.).- Probabilités et Potentiel. Blaisdell Publ.Co, Boston ; Hermann, Paris, 1966.