

SÉMINAIRE PAUL KRÉE

MICHEL MARIAS

Transformations canoniques linéaires dans les espaces de Hilbert

Séminaire Paul Krée, tome 4 (1977-1978), exp. n° 8, p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=SPK_1977-1978__4__A9_0

© Séminaire Paul Krée

(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Paul Krée » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRANSFORMATIONS CANONIQUES LINÉAIRES DANS LES ESPACES DE HILBERT

par Michel MARIAS (*)

Soit Z un espace de Hilbert complexe séparable avec conjugaison $z \mapsto \bar{z}$, dont le produit scalaire est noté $\bar{z}z_1 = (z, \bar{z}_1)$. L'espace réel $Z^{\mathbb{R}}$ sous-jacent à Z est muni de la forme alternée $\varphi_{-}^{\mathbb{R}} = 2i \operatorname{Im} \bar{z}z_1$ (respectivement quadratique $\varphi_{+}^{\mathbb{R}} = 2 \operatorname{Re} \bar{z}z_1$). On note $TC_{\epsilon}(Z^{\mathbb{R}})$, $\epsilon = \pm$, le groupe des opérateurs linéaires continus $g^{\mathbb{R}}$ de $Z^{\mathbb{R}}$ conservant $\varphi_{\epsilon}^{\mathbb{R}}$, avec $\epsilon = -$ pour les bosons et $\epsilon = +$ pour les fermions. On pose, pour tout $\zeta = (\bar{z}, z') \in \bar{Z} \times Z$, $R(\zeta) = a(\bar{z}) + a^{*}(z')$, avec $a(\bar{z})$ et $a^{*}(z')$ les opérateurs d'annihilation et de création associés à $\bar{z}$ et z' qui opèrent dans la réalisation holomorphe $FH_{\epsilon}(\bar{Z})$ de l'espace de Fock ϵ -symétrique construit sur Z . L'application $z \mapsto (\bar{z}, z)$ identifie l'espace vectoriel $Z^{\mathbb{R}}$ réel sous-jacent à Z à un sous-espace de son complexifié $\bar{Z} \times Z$. Et tout opérateur linéaire continu $g^{\mathbb{R}}$ de $Z^{\mathbb{R}}$ est caractérisé par son complexifié g , opérateur linéaire continu de $\bar{Z} \times Z$. On dit que $g^{\mathbb{R}} \in TC(Z^{\mathbb{R}})$ est implémentable par un opérateur unitaire $\hat{U}$ de $FH_{\epsilon}(\bar{Z})$ si l'on a $R(gZ)\hat{U} = \hat{U}R(Z)$ (les produits étant supposés définis). Il en est toujours ainsi si $\dim Z$ est fini [10], [2]. En dimension infinie, ce n'est plus le cas, et seulement les transformations canoniques linéaires (TCL) sont implémentables par un opérateur unitaire de l'espace de Fock et ont été étudiées jusqu'ici : Ce sont les transformations canoniques propres.

Pour étudier les TCL propres, on procède en général ainsi : On cherche le nouveau vecteur de vide et puis, éventuellement, l'opérateur unitaire d'implémentation. Ceci pose le problème de l'étude des TCL non propres [1], [12]. Nous étudions ces transformations en utilisant les triplets centrés sur l'espace de Fock construits dans [4], [6]. On trouve au § 2 les opérateurs $\hat{U}$ qui implémentent de telles transformations canoniques et les nouveaux vecteurs vides, c'est-à-dire les formes F_0 qui sont annihilées par tous les nouveaux annihilateurs. Au § 3 on montre comment ces nouveaux résultats permettent de retrouver très simplement la caractérisation [9], [10], [11], [12], ... des transformations canoniques propres. Ces résultats prolongent ceux de [7] qui concernaient seulement les TCL propres pour les fermions, ils ont été annoncés dans la note [8].

1. Préliminaires.

L'objet de ce paragraphe est de rappeler, dans un cas particulier, les résultats de [4], [5], [6] que nous utiliserons.

(*) Texte reçu en Mars 1979.

Soit X un espace vectoriel sur un corps $\underline{K}$ de caractéristique nulle. Un tenseur $t = \sum t_k \in \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\otimes_k X)$ est dit ϵ -symétrique s'il est symétrique pour $\epsilon = -$ ou s'il est antisymétrique pour $\epsilon = +$. L'espace de tenseurs ϵ -symétriques sur X est noté $T_{\epsilon}(X)$. Le sous-espace des tenseurs ϵ -symétriques homogènes de degré k est noté $T_{\epsilon}^k(X)$. On a donc $T_{\epsilon}(X) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T_{\epsilon}^k(X)$ et $T_{\epsilon}(X)$ est une algèbre pour le produit ϵ -symétrique.

Soient X et E deux espaces vectoriels sur $\underline{K}$ et soit E' le dual algébrique de E . Le dual de $T_{\epsilon}^k(X) \otimes E$ est l'espace $\mathfrak{F}_{\epsilon}^k(X, E')$ des formes k -linéaires ϵ -symétriques à valeurs dans E' . Donc, le dual de $T_{\epsilon}(X) \otimes E$ est l'espace $\mathfrak{F}_{\epsilon}(X, E') = \prod_{k=0}^{\infty} \mathfrak{F}_{\epsilon}^k(X, E')$ des formes ϵ -symétriques sur X à valeurs dans E' . Un élément $f(x) \in \mathfrak{F}_{\epsilon}(X, E')$ s'écrit $f(x) = \sum f_k(x)$ avec $f_k \in \mathfrak{F}_{\epsilon}^k(X, E')$. Si $E = \underline{K}$, on écrit simplement $\mathfrak{F}_{\epsilon}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{F}_{\epsilon}^k(X)$.

Entre $T_{\epsilon}(X)$ et $\mathfrak{F}_{\epsilon}(X)$ on met la dualité suivante : Si $f = \sum f_k \in \mathfrak{F}_{\epsilon}(X)$ et $t = \sum t_k \in T_{\epsilon}(X)$, avec $t_k = x_{k_1} \dots x_{k_k}$,

$$(1.1) \quad \langle f, t \rangle_{\text{nat}} = \sum_{k=0}^{\infty} k! \langle f_k, t_k \rangle_{k, \text{nat}} = \sum_{k=0}^{\infty} k! f_k(x_{k_1} \dots x_{k_k}).$$

Cette dualité est appelée la dualité naturelle.

Soient X et X' deux espaces vectoriels en dualité. La notation $X'_{\alpha} \subset X'$ signifie que X'_{α} est un sous-espace vectoriel de dimension finie de X' . Soit i_{α} (respectivement s_{α}) l'injection canonique de $X'_{\alpha} \subset X'$ (respectivement la projection canonique de X sur $X_{\alpha} = X/(X')^{\perp}$). La dualité entre X_{α} et X'_{α} est définie par $\langle s_{\alpha} x, \xi \rangle = \langle x, i_{\alpha} \xi \rangle$. L'image de l'injection canonique $T_{\epsilon}(X') \rightarrow \mathfrak{F}_{\epsilon}(X)$ est notée $\mathfrak{F}_{\epsilon\text{-cyl}}(X)$, car chaque φ , dans cette image, est cylindrique, c'est-à-dire du type $\varphi(x) = \varphi_{\alpha}(s_{\alpha} x)$, avec $\varphi_{\alpha} \in \mathfrak{F}_{\epsilon}(X'_{\alpha})$.

(1.2) Formes sur un produit.

Soient X et Y deux espaces vectoriels sur $\underline{K}$. On a

$$(1.3) \quad T_{\epsilon}(X \times Y) \simeq T_{\epsilon}(X) \otimes T_{\epsilon}(Y),$$

donc $\mathfrak{F}_{\epsilon}(X \times Y)$ est isomorphe à l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur $T_{\epsilon}(X) \times T_{\epsilon}(Y)$. Noter que si $f \in \mathfrak{F}_{\epsilon}(X)$, $g \in \mathfrak{F}_{\epsilon}(Y)$, $\varphi \in T_{\epsilon}(X)$ et $\psi \in T_{\epsilon}(Y)$, alors $\langle f(x) g(y), \psi(\eta) \varphi(\xi) \rangle_{\text{nat}} = \langle f(x), \psi(\eta) \rangle_{\text{nat}} \langle g(y) \varphi(\xi) \rangle_{\text{nat}}$.

(1.4) Exemples. - Soient X et X' deux espaces en dualité. La 2-forme ϵ -canonique sur $X \times X'$ est définie par la formule

$$(1.5) \quad (X \times X') \times (X \times X') \xrightarrow{X \times X'} \underline{K} \\ (x, \xi); (x_1, \xi_1) \longrightarrow 2^{-1}(\langle x, \xi_1 \rangle - \epsilon \langle x_1, \xi \rangle).$$

On retrouve la forme symplectique usuelle si $\epsilon = +$, et la forme quadratique canonique usuelle si $\epsilon = -$. On définit l'exponentielle de cette 2-forme dans

l'algèbre $\mathfrak{F}_\epsilon(X \times X')$ par

$$(1.6) \quad \exp(x\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-1} (x\xi)^k.$$

Noter qu'on retrouve l'exponentielle usuelle si $\epsilon = -$.

(1.7) Contraction sur les lettres duales.

Comme $\mathfrak{F}_\epsilon(X \times Y)$ est l'espace des formes bilinéaires sur $T_\epsilon(X) \times T_\epsilon(Y)$, on a une application bilinéaire canonique $\mathfrak{F}_\epsilon(X \times Y) \times T_\epsilon(Y) \rightarrow \mathfrak{F}_\epsilon(X)$, notée $f(x, y)$, $t(\eta) \mapsto \langle f(x, y), t(\eta) \rangle = \langle f(x, y), t(\eta) \rangle_{\text{nat}}$. Par exemple, si $Y = X'$, $\forall t \in T_\epsilon(X')$, $\langle \exp(xy), t(\eta) \rangle = t^\vee(x)$, où $t \mapsto t^\vee$ désigne l'involution de $T_\epsilon(X')$ qui prolonge l'application $x_1 \dots x_k \mapsto x_k \dots x_1$. Afin d'éviter ce retournement, on remplace dès lors la dualité $\langle, \rangle_{\text{nat}}$ définie par (1.1) par la dualité retournée : Si $f = \sum f_n \in \mathfrak{F}_\epsilon(X)$, $t = \sum t_k \in T_\epsilon(X)$ et $t_k = x_{k1} \dots x_{kk}$,

$$(1.8) \quad \langle f, t \rangle = \sum k! f_k(x_{kk} \dots x_{k1}) = \langle f, t^\vee \rangle_{\text{nat}}.$$

Dans ce cas, $\langle \exp(xy), t(\eta) \rangle = t(x)$.

(1.9) Opérateur de dérivation à gauche.

Soient X et X' en dualité séparante. Pour ψ fixé dans $T_\epsilon(X)$, l'opérateur de dérivation à gauche $f \mapsto \psi(D)f$ dans $\mathfrak{F}_\epsilon(X)$ est défini comme étant le transposé de l'opérateur $\varphi \mapsto \varphi\psi$ de multiplication à droite par ψ dans l'algèbre $T_\epsilon(X)$. La dérivation à droite $f \mapsto f\psi(D)$ se définit en transposant l'opérateur linéaire $\varphi \mapsto \psi\varphi$ de $T_\epsilon(X)$. Dans le cas particulier où $\epsilon = -$, on a $f\psi(D) = \psi(D)f$, et l'opérateur $\psi(D)$ ainsi défini est l'opérateur de dérivation usuellement associé à ψ . Dans le cas particulier où $\epsilon = +$ et où X est de dimension finie, on retrouve les produits intérieurs de l'algèbre extérieure. Pour $\epsilon = \pm$, et $\psi = u \in X$, on écrit encore

$$u(D)f = \partial_u f = \langle Df, u \rangle.$$

(1.10) Espace de Fock ϵ -symétrique et sa réalisation holomorphe.

Soit Z un espace de Hilbert complexe séparable avec conjugaison $z \mapsto \bar{z}$. L'anti-espace $\bar{Z}$ de Z est l'espace de Hilbert suivant : Comme groupe additif, $\bar{Z}$ coïncide avec Z mais la multiplication d'un élément $\bar{z} \in \bar{Z}$ par un scalaire complexe λ est définie par $\lambda\bar{z} = \bar{\lambda}z \neq \bar{\lambda}\bar{z}$. $\bar{Z}$ est isomorphe au dual Z' de l'espace de Hilbert Z .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, Z_ϵ^k désigne l'adhérence de $T_\epsilon^k(Z)$ dans $\widehat{H \otimes_k Z}$. Usuellement l'espace de Fock ϵ -symétrique sur Z est la somme hilbertienne $\bigoplus_{k=0}^{\infty} Z_\epsilon^k$. Ici, tout $t_k \in Z_\epsilon^k$ est identifié à la forme $f_k(\bar{z}) \in \mathfrak{F}_\epsilon^k(\bar{Z})$ définie par

$$(1.11) \quad (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_k) \mapsto (z_1 z_2 \dots z_k, t_k)_k,$$

où $(,)_k$ désigne le produit scalaire dans l'espace Z_ϵ^k .

Dont, $Z_\epsilon^k \subset \mathfrak{F}_\epsilon^k(Z)$. La réalisation holomorphe $FH_\epsilon(\bar{Z})$ de l'espace de Fock ϵ -symétrique de Z est l'espace hilbertien des formes $f = \sum f_k \in \mathfrak{F}_\epsilon(\bar{Z})$ vérifiant la condition de norme

$$(1.12) \quad \|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k! \|f_k\|^2 < +\infty, \text{ avec } f_k \in Z_\epsilon^k,$$

la norme de f_k étant prise dans Z_ϵ^k .

Le triplet centré sur $FH_\epsilon(\bar{Z})$ est $\mathfrak{F}_\epsilon \mathcal{C} = (T_\epsilon(Z) \subset FH_\epsilon \subset \mathfrak{F}_\epsilon(\bar{Z}))$. On a une antidualité naturelle entre $T_\epsilon(\bar{Z})$ et $\mathfrak{F}_\epsilon(Z)$ qui prolonge le produit scalaire de $FH_\epsilon(\bar{Z})$ donné par

$$(1.13) \quad \forall \Phi, \Psi \in FH_\epsilon(\bar{Z}), \quad (\Phi, \Psi)_{\text{nat}} = k! (\Phi_k, \Psi_k)_{\text{nat}}.$$

De manière à nous ramener à la dualité décrite par (1.8), on définit les bijections antilinéaires $t \rightarrow t^*: T_\epsilon(\bar{Z}) \rightarrow T_\epsilon(\bar{Z})$ et $f \rightarrow f^*: \mathfrak{F}_\epsilon(Z) \rightarrow \mathfrak{F}_\epsilon(\bar{Z})$, obtenues en composant le retournement des tenseurs et la conjugaison de $\bar{Z}$:

$$(z_1 \ z_2 \ \dots \ z_k)^* = \bar{z}_k \ \bar{z}_{k-1} \ \dots \ \bar{z}_1 \quad \text{et} \quad f_k^*(\bar{z}_1 \ \dots \ \bar{z}_n) = \overline{f(z_k \ \dots \ z_1)}.$$

La dualité entre $T_\epsilon(\bar{Z})$ et $\mathfrak{F}_\epsilon(\bar{Z})$ est donnée par

$$(1.14) \quad \forall f \in \mathfrak{F}_\epsilon(\bar{Z}), \quad \forall t \in T_\epsilon(Z), \quad \langle f, t \rangle = (t, f)_{\text{nat}}.$$

Notation des multi-indices d'ordre infini. - Pour simplifier l'écriture, on suppose $d = \dim Z = +\infty$. Les coordonnées de tout $z \in Z$, par rapport à une base orthonormée, sont notées z_i . L'ensemble $J(-, d)$ est l'ensemble des suites infinies d'entiers positifs $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, \dots)$ nuls à partir d'un certain rang. On pose alors $\bar{z}^\alpha = \bar{z}_1^{\alpha_1} \bar{z}_2^{\alpha_2} \dots \bar{z}_n^{\alpha_n}$; $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$. Toute partie finie α de $\{1, 2, \dots\}$ est notée $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, avec $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$, si $\alpha \neq \emptyset$. On pose $|\alpha| = k$, si $\alpha \neq \emptyset$, et $|\emptyset| = 0$. L'ensemble de ces parties finies est noté $J(+, d)$. Pour $\alpha \in J(+, d)$, on pose

$$\bar{z}^\alpha = \bar{z}_{\alpha_1} \wedge \bar{z}_{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \bar{z}_{\alpha_k}, \quad \bar{z}^\emptyset = 1, \quad \text{et} \quad \alpha! = 1.$$

On rappelle que les formes $\bar{z}^\alpha / (\alpha!)^{1/2}$, $\alpha \in J(+, d)$, forment une base orthonormée de $FH_\epsilon(\bar{Z})$.

(1.15) LEMME. - Soit $A \in L(\bar{Z}, Z)$. Posons $\bar{A}z = \overline{Az}$ et supposons que $\bar{A}^* = -A$. Pour que la forme anti-symétrique $F = \exp f$, avec

$$f(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = 2^{-1}(z_1, A\bar{z}_2)$$

appartienne à $FH_+(\bar{Z})$, il faut et il suffit que A soit un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Preuve. - Supposons que $\exp f \in FH_+(\bar{Z})$, donc $f \in FH_+^2(\bar{Z})$. En utilisant l'isomorphisme $FH_+^2(\bar{Z}) \simeq Z_+^2 \subset HS(\bar{Z}, Z)$, on déduit que A est de Hilbert-Schmidt.

Inversement, si A est de Hilbert-Schmidt, on utilise le fait [5] que $\varphi \in \mathfrak{F}_+(\bar{Z})$ appartient à $\text{FH}_+(\bar{Z})$ si, et seulement si, $\sup_{Z_\alpha \subset Z} \|\varphi_\alpha\|^2 < +\infty$, avec $\varphi_\alpha = \varphi|_{\bar{Z}_\alpha}$.

En posant, $\forall \alpha$, $A_\alpha = i_\alpha^* A i_\alpha$, on trouve que la restriction f_α de f à Z_α est telle que, $\forall z_1, z_2 \in Z_\alpha$, $f_\alpha(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = 2^{-1}(z_1, A_\alpha z_2)$. Vu [2] (§ 7, n° 3, proposition 6), il existe une base orthonormée $(\bar{b}_i)$ de $\bar{Z}_\alpha$ par rapport à laquelle la matrice de f_α est de la forme

$$(1.16) \quad M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix},$$

où les a_i sont positifs. Vu la définition de A_α et la relation

$$(1.17) \quad \forall z_1, z_2 \in Z_\alpha, \quad (z_1, Az_2) = (z_1, A_\alpha z_2),$$

on déduit que $A_\alpha \in L(\bar{Z}_\alpha, Z_\alpha)$ a pour matrice M_α par rapport à la base $(\bar{b}_i)$. On prouve alors

$$(1.18) \quad f_\alpha = a_1 \bar{z}_1 \wedge \bar{z}_2 + a_2 \bar{z}_3 \wedge \bar{z}_4 + \dots + a_p \bar{z}_{2p-1} \wedge \bar{z}_{2p}.$$

Donc

$$\begin{aligned} F_\alpha = F|_{\bar{Z}_\alpha} &= \exp f_\alpha = (\exp(a_1 \bar{z}_1 \wedge \bar{z}_2)) \wedge \dots \wedge (\exp(a_p \bar{z}_{2p-1} \wedge \dots \wedge \bar{z}_{2p})) \\ &= (1 + a_1 \bar{z}_1 \wedge \bar{z}_2) \wedge \dots \wedge (1 + a_p \bar{z}_{2p-1} \wedge \bar{z}_{2p}), \end{aligned}$$

et

$$\|F_\alpha\|^2 = \prod_{\ell=1}^p \|1 + a_\ell \bar{z}_{2\ell-1} \wedge \bar{z}_{2\ell}\|^2 = \prod_{\ell=1}^p (a_\ell^2 + 1).$$

Si, alors $\|A\|_2$ désigne la norme de Hilbert-Schmidt d'un opérateur A , comme $A_\alpha = i_\alpha^* A i_\alpha$, on déduit que $\|A_\alpha\|_2 \leq \|A\|_2$, $\forall Z_\alpha \subset Z$. Par ailleurs, en utilisant l'inégalité $\log(1+x^2) \leq x^2$, on trouve, $\forall x$,

$$(1.19) \quad 2 \log \|F_\alpha\|^2 \leq 2 \sum_{\ell=0}^p a_\ell^2 = \|A_\alpha\|_2^2 \leq \|A\|_2^2.$$

Par conséquent, les normes des restrictions F_α de F à tous les sous-espaces vectoriels de dimension finie Z_α de Z sont bornées par la même constante. Donc, $F \in \text{FH}_+(\bar{Z})$.

(1.20) Noyaux et symboles des opérateurs linéaires.

Désignons par Op l'espace des applications linéaires de $T_\epsilon(Z)$ à valeurs dans $\mathfrak{F}_\epsilon(\bar{Z})$. Comme $\mathfrak{F}_\epsilon(\bar{Z})$ est le dual de $T_\epsilon(\bar{Z})$, on a

$$(1.21) \quad \text{Op} \simeq L(T_\epsilon(Z), T_\epsilon(\bar{Z})') \simeq (T_\epsilon(\bar{Z}) \otimes T_\epsilon(Z))' \simeq \mathfrak{F}_\epsilon(\bar{Z} \times Z) .$$

La forme ϵ -symétrique sur $\bar{Z} \times Z$ associée à $\hat{Q} \in \text{Op}$ par cet isomorphisme est notée $\tilde{Q}(\bar{z}, z')$ et elle est appelée le noyau de $\hat{Q}$; on a

$$(1.22) \quad \forall \phi \in T(Z), \quad (\hat{Q}(\phi))(\bar{z}) = \langle \tilde{Q}(\bar{z}, z'), \phi(z') \rangle ,$$

avec contraction sur les lettres duales z' et $\bar{z}'$.

Le symbole de $\hat{Q} \in \text{Op}$ est la forme ϵ -symétrique sur $\bar{Z} \times Z$ suivante

$$(1.23) \quad Q(\bar{z}, z') = \tilde{Q}(\bar{z}, z') \exp(-\bar{z}z') = \exp(-\bar{z}z') \tilde{Q}(\bar{z}, z') .$$

Pour calculer le noyau d'un opérateur $\hat{Q} \in \text{Op}$, on utilise les méthodes de [6], à savoir les théorèmes (3.10) et (3.15).

(1.24) Exemples. - Pour tout $u \in Z$, l'opérateur de création associé à u , $a^*(u)$, est défini par $a^*(u)(\psi(\bar{z})) = u_\psi(\bar{z})$, et c'est un opérateur de $T_\epsilon(\bar{Z})$ à valeurs dans $T_\epsilon(\bar{Z})$ et de $\mathfrak{F}_\epsilon(\bar{Z})$ dans $\mathfrak{F}_\epsilon(\bar{Z})$.

Son adjoint $a(\bar{u})$ est, par définition, l'annihilateur associé au point $\bar{u}$, et il est défini par

$$a(\bar{u}) f_k(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k) = k f_k(\bar{u}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{k-1}) = \partial_{\bar{u}} f_k(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k) ,$$

$$\forall f_k \in \mathfrak{F}_\epsilon^k(\bar{Z}) .$$

L'opérateur $a(\bar{u})$ envoie $T_\epsilon(\bar{Z})$ dans lui-même. Les noyaux et symboles de ces opérateurs sont donnés par

$$(1.25) \quad \begin{cases} \widetilde{a^*(u)}(\bar{z}, z') = (z, u) \exp(\bar{z}z') \\ \widetilde{a(\bar{u})}(\bar{z}, z') = (u, z') \exp(\bar{z}z') \end{cases} ,$$

et leurs symboles

$$\begin{cases} a^*(u)(\bar{z}, z') = (z, u) \\ a(\bar{u})(\bar{z}, z') = (u, z') \end{cases} ,$$

Si $\epsilon = +1$, ces opérateurs sont bornés. Pour $\epsilon = \pm$, ils vérifient les relations de ϵ -commutation

$$(1.26) \quad \forall u, u' \in Z ,$$

$$[a(\bar{u}), a(\bar{u}')]_\epsilon = [a^*(u), a^*(u')]_\epsilon = 0 \quad \text{et} \quad [a(\bar{u}), a(u')]_\epsilon = (u', u') ,$$

où $[A, B]_\epsilon = AB + \epsilon BA$ désigne le ϵ -commutateur de deux opérateurs qui se composent.

2. Transformations ϵ -canoniques.

Avec les notations du § 1, l'espace de phase désigne ci-après l'espace réel Z^r sous-jacent à Z . L'application $z \longrightarrow (\bar{z}, z)$ identifie Z^r à un sous-espace de son complexifié $\bar{Z} \times Z$. Il est commode de caractériser tout opérateur linéaire continu g^r de Z^r par son complexifié g . Dans ce cas, g admet une décomposition par blocs

$$(2.1) \quad g = \begin{pmatrix} \bar{\Phi} & \bar{\Psi} \\ \Psi & \bar{\Phi} \end{pmatrix}, \text{ avec } \bar{\Phi} \in L(\bar{Z}, \bar{Z}), \Psi \in L(\bar{Z}, Z)$$

et $\bar{\Psi}$ définies par $\bar{\Phi}u = \bar{\Phi}\bar{u}$, $\bar{\Psi}u = \bar{\Psi}\bar{u}$, $\forall u \in Z$.

De même, la 2-forme ϵ -canonique φ_ϵ^r de Z^r est caractérisée par son complexifié φ_ϵ donnée par

$$(2.2) \quad \varphi_\epsilon(\zeta, \zeta_1) = (z, z'_1) + \epsilon(z'_1, z'),$$

où $\zeta = (\bar{z}, z')$ et $\zeta_1 = (\bar{z}_1, z'_1)$ désignent des éléments arbitraires de $\bar{Z} \times Z$.

Le groupe $TC_\epsilon(Z^r)$ des transformations ϵ -canoniques de Z^r est le groupe des transformations linéaires continues de Z^r qui conservent la 2-forme ϵ -canonique φ_ϵ^r .

(2.3) LEMME. - Soit $g^r \in L(Z^r)$ tel que son complexifié g admette la décomposition (2.1). Alors, $g^r \in TC_\epsilon(Z^r)$ si, et seulement si, g est inversible et

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}^* & \epsilon \bar{\Psi}^* \\ \epsilon \Psi^* & \bar{\Phi}^* \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, on a les relations suivantes

$$(2.4) \quad \begin{cases} \bar{\Phi}\bar{\Phi}^* + \epsilon\bar{\Psi}\Psi^* = 1; & \bar{\Phi}^*\bar{\Phi} + \epsilon\Psi^*\Psi = 1; \\ \Psi\bar{\Phi}^* + \epsilon\bar{\Phi}\Psi^* = 0; & \epsilon\Psi^*\bar{\Phi} + \bar{\Phi}^*\Psi = 0; \\ \epsilon\bar{\Phi}\Psi^* + \Psi\bar{\Phi}^* = 0; & \bar{\Phi}^*\bar{\Psi} + \epsilon\Psi^*\bar{\Phi} = 0; \\ \epsilon\Psi\Psi^* + \bar{\Phi}\bar{\Phi}^* = 1; & \epsilon\Psi^*\bar{\Psi} + \bar{\Phi}^*\bar{\Phi} = 1. \end{cases}$$

Preuve. $\rightarrow$ Si $\zeta = (\bar{z}, z')$ et $\zeta_1 = (\bar{z}_1, z'_1)$ appartiennent à $\bar{Z} \times Z$, la relation $\varphi_\epsilon(g\zeta, g\zeta_1) = \varphi_\epsilon(\zeta, \zeta_1)$ est équivalente à

$$(2.5) \quad (\bar{\Phi}\bar{z} + \bar{\Psi}z', \bar{\Phi}\bar{z}_1 + \bar{\Psi}z'_1) + (\Psi\bar{z} + \bar{\Phi}z', \epsilon\Psi\bar{z}_1 + \bar{\Phi}z'_1) = (\bar{z}, z'_1) + \epsilon(\bar{z}', \bar{z}_1).$$

En posant

$$h = \begin{pmatrix} \bar{\Phi} & \epsilon\bar{\Psi} \\ \epsilon\Psi & \bar{\Phi} \end{pmatrix},$$

on vérifie que l'adjoint de cet opérateur de $\bar{Z} \times Z$ est

$$h^* = \begin{pmatrix} \Phi^* & \epsilon \Psi^* \\ \epsilon \bar{\Psi}^* & \bar{\Phi}^* \end{pmatrix},$$

et la relation (2.5) s'écrit $(g_\zeta, h_{\zeta_1}) = (\zeta, \zeta_1)$ ou encore $(h^* g_\zeta, \zeta_1) = (\zeta, \zeta_1)$ d'où $g^{-1} = h^*$.

Pour tout $\zeta = (\bar{z}, z') \in \bar{Z} \times Z$, on pose $R(\zeta) = a^*(z') + a(\bar{z})$, alors $[R(\zeta), R(\zeta_1)]_\epsilon = \varphi_\epsilon(\zeta, \zeta_1)$, quels que soient ζ et $\zeta_1 \in \bar{Z} \times Z$.

Soit $g^r \in L(Z^r)$ tel que son complexifié g admette la décomposition (2.1). On définit

$$(2.6) \quad \begin{cases} \forall z \in Z, & A(\bar{z}) = R(g(\bar{z}, 0)) = a^*(\Psi \bar{z}) + a(\bar{\Phi} \bar{z}), \\ \forall z' \in Z, & A^*(z') = R(g(0, z')) = a^*(\bar{\Phi} z') + a(\bar{\Psi} z'). \end{cases}$$

Ce sont des opérateurs linéaires de $\mathfrak{F}_\epsilon(\bar{Z})$ qui laissent stable le sous-espace $T_\epsilon(Z)$ des formes cylindriques.

(2.7) LEMME. - Les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) $g^r \in TC_\epsilon(Z^r)$;
- (ii) $\forall \zeta, \zeta_1 \in \bar{Z} \times Z, [R(g_\zeta), R(g_{\zeta_1})]_\epsilon = \varphi_\epsilon(\zeta, \zeta_1)$;
- (iii) $\forall z, z' \in Z, [A(\bar{z}), A(\bar{z}')]_\epsilon = [A^*(z), A^*(z')]_\epsilon = 0$ et $[A(\bar{z}), A^*(z')]_\epsilon = (z, z')$.

Preuve. - Par définition, on a, $\forall \zeta, \zeta_1 \in \bar{Z} \times Z$,

$$[R(g_\zeta), R(g_{\zeta_1})]_\epsilon = \varphi_\epsilon(g_\zeta, g_{\zeta_1}),$$

d'où l'équivalence de (i) et (ii). Pour prouver que (ii) est équivalente à (iii), on utilise (2.6), le fait que les opérateurs de création $a^*(z')$ et d'annihilation $a(\bar{z})$ vérifient les relations de ϵ -commutation qui figurent dans (iii), et le fait que $R(\zeta)$ dépend linéairement de $\zeta \in \bar{Z} \times Z$.

(2.8) Remarque. - (2.7)(iii) nous permet de dire que les opérateurs $A(\bar{z})$ et $A^*(z')$ définis par (2.6) sont les nouveaux créateurs et annihilateurs associés à $g^r \in TC_\epsilon(Z^r)$.

Avec les mêmes notations, on donne la définition suivante.

(2.9) Définition.

- (i) Un opérateur $\hat{U} \in Op$ implémente $g^r \in TC_\epsilon(Z^r)$ si, et seulement si,

$$(2.10) \quad \forall \zeta \in \bar{Z} \times Z, (R(g_\zeta))^\hat{U} = \hat{U} R(\zeta);$$

- (ii) Une forme ϵ -symétrique $F_0 \in \mathfrak{F}_\epsilon(\bar{Z})$ définie sur $\bar{Z}$ est appelée nouveau vec-

teur de vide si, et seulement si,

$$(2.11) \quad \forall u \in Z, \quad A(\bar{u}) F_0 = 0.$$

(2.12) LEMME. - Soit $g^r \in TC(Z^r)$ et supposons que Φ soit inversible dans $L(\bar{Z})$. Pour tout $\zeta = (\bar{z}, z') \in \bar{Z} \times Z$, la 2-forme suivante sur $\bar{Z}$

$$f(\bar{z}, \bar{z}') = -2^{-1}(z', \epsilon \Psi \Phi^{-1} \bar{z})$$

est ϵ -symétrique. De plus, toute solution de l'équation (2.11) est proportionnelle à $F_0(\bar{z}) = \exp f$.

Preuve. - Vérifions d'abord que $f(\bar{z}, \bar{z}')$ est une forme ϵ -symétrique, c'est-à-dire que $-\Psi \Phi^{-1} = \epsilon \Phi^{-1*} \Psi^*$. Cette relation est vérifiée si $g^r \in TC_\epsilon(Z^r)$, d'après (2.4).

Prouvons que $F_0(\bar{z})$ est effectivement une solution de (2.11) ; en effet

$$A(\bar{z})F_0 = 0 \iff (a^*(\Psi \bar{z}) + a(\Phi \bar{z}))F_0 = 0 \iff \Psi \bar{z} = -\partial_{\Phi \bar{z}} f$$

et

$$-\left(\partial_{\Phi \bar{z}} f\right)(\bar{x}) = -2f(\Phi \bar{z}, \bar{x}) = (x, \Psi \bar{z}),$$

ce qui implique que $-\partial_{\Phi \bar{z}} f = \Psi \bar{z}$ et par conséquent F_0 est une solution de (2.11).

Supposons que $F_1 = F_0 G$, avec $G \in \mathcal{F}_\epsilon(\bar{Z})$ est une autre solution de (2.11) ; on a alors, $\forall z \in Z$,

$$(a^*(\Psi \bar{z}) + a(\Phi \bar{z}))F_0 G = 0 \iff \partial_{\Phi \bar{z}} G = 0,$$

c'est-à-dire $G = \lambda \in \mathbb{C}$ car Φ est bijectif.

(2.14) THÉOREME. - Soit $g^r \in TC_\epsilon(Z^r)$ et supposons que Φ soit inversible dans $L(\bar{Z})$. Alors tous les opérateurs $\hat{U} \in Op$ qui implémentent g^r sont proportionnels à l'opérateur $\hat{U}_0 \in Op$ de noyau

$$(2.15) \quad \tilde{U}_0(\bar{z}, z') = \exp\{2^{-1}[(z, \epsilon \Psi \Phi^{-1} \bar{z}) + 2(z, \Phi^{-1*} z') - \epsilon(\bar{z}', \Phi^{-1} \Psi z')]\}.$$

Démonstration. - Supposons que $\hat{U}_0 \in Op$ implémente g^r . D'après (2.10), on a les équations

$$(2.16) \quad \forall u' \in Z, \quad (a^*(\Phi u') + a(\Psi u'))\hat{U}_0 = \hat{U}_0 a^*(u')$$

et

$$(2.17) \quad \forall u \in Z, \quad (a^*(\Psi \bar{u}) + a(\Phi \bar{u}))\hat{U}_0 = \hat{U}_0 a(u).$$

En utilisant la formule (1.22) définissant le noyau d'un opérateur et les définitions des annihilateurs et créateurs, supposant $\tilde{U}_0(\bar{z}, z') = \exp B$, avec

$B \in \mathfrak{S}_e^2(\bar{Z} \times Z)$, on voit que les équations (2.16) et (2.17) sont équivalentes aux équations suivantes.

$$(2.18) \quad \forall u' \in Z, \quad (z, \bar{\phi}u') + \langle \bar{\psi}u', D_{\bar{Z}} B \rangle = \langle D_{\bar{Z}} B, u' \rangle$$

et

$$(2.19) \quad \forall u \in Z, \quad (z, \bar{\psi}u) + \langle \bar{\phi}u, D_{\bar{Z}} B \rangle = (u, z') .$$

En posant $\bar{\phi}u = \bar{v}$, donc $v = \bar{\phi}u$, (2.19) devient

$$(z, \bar{\psi}\bar{\phi}^{-1} \bar{v}) - (\bar{\phi}^{-1} v, z') = - (v, D_{\bar{Z}} B) .$$

En remarquant que, d'après (2.4), $\bar{\psi}\bar{\phi}^{-1} = -e\bar{\phi}^{*-1} \bar{\psi}^*$, on a

$$(v, D_{\bar{Z}} B) = (v, \bar{\phi}^{*-1} z' + e\bar{\psi}\bar{\phi}^{-1} \bar{z}) ,$$

donc

$$(2.20) \quad B(\bar{z}, z') = (z, \bar{\phi}^{*-1} z') + 2^{-1}(z, e\bar{\psi}\bar{\phi}^{-1} \bar{z}) + C(z') ,$$

avec $C(z') \in \mathfrak{S}_e^2(Z)$. En utilisant (2.18), on détermine $C(z')$: En effet, d'après (2.20),

$$(2.21) \quad D_{\bar{Z}} B = \bar{\phi}^{-1} \bar{z} + D_{\bar{Z}} C ,$$

et en rapportant (2.21) dans (2.18), on trouve

$$(2.22) \quad \forall u' \in Z, \quad (z, \bar{\phi}u') + \langle \bar{\psi}u', \bar{\phi}^{*-1} z' + e\bar{\psi}\bar{\phi}^{-1} \bar{z} \rangle = \langle \bar{\phi}^{-1} \bar{z} + D_{\bar{Z}} C, u' \rangle \\ \iff (z, \bar{\phi}u') + (\bar{\psi}u', \bar{\phi}^{-1*} z' + e\bar{\psi}\bar{\phi}^{-1} \bar{z}) = (\bar{\phi}^{-1} \bar{z}, u') + \langle D_{\bar{Z}} C, u' \rangle .$$

En utilisant (2.4), $(\bar{\psi}u', e\bar{\psi}\bar{\phi}^{-1} \bar{z}) = (\bar{u}', \bar{\phi}^{-1} \bar{z}) - (z, \bar{\phi}u')$, et par conséquent (2.22) est équivalente à

$$(2.23) \quad \forall u' \in Z, \quad (\bar{\psi}u', \bar{\phi}^{-1*} z') = (\bar{u}', D_{\bar{Z}} C) ,$$

ce qui donne $C(z') = -2^{-1}(\bar{z}', e\bar{\phi}^{-1} \bar{\psi}z')$, donc

$$\tilde{U}_0(\bar{z}, z') = \exp\{2^{-1}[(z, e\bar{\psi}\bar{\phi}^{-1} \bar{z}) + 2(z, \bar{\phi}^{*-1}) - e(z', \bar{\phi}^{-1} \bar{\psi}z')]\} .$$

Soit $\hat{U} \in Op$ un autre opérateur implémentant g^r . Supposons que $\tilde{U}_1(\bar{z}, z') = \tilde{U}_0(\bar{z}, z') G(\bar{z}, z')$, avec $G(\bar{z}, z') \in \mathfrak{S}_e(\bar{Z} \times Z)$. Alors $\tilde{U}_1(\bar{z}, z')$ vérifie les équations (2.18) et (2.19), et en effectuant les calculs, on trouve que $D_{\bar{Z}} G = 0$ et $D_{\bar{Z}} G = 0$. Par conséquent, $G(\bar{z}, z') = \lambda \in \mathbb{C}$

3. Transformations ϵ -canoniques propres.

(3.1) Définition. - Soient $\epsilon = \pm$ et $g^r \in TC_\epsilon(Z^r)$; g^r est dite propre si elle est implémentable par un opérateur unitaire $\hat{U}^\epsilon$ de $FH_\epsilon(\bar{Z})$.

(3.2) THÉOREME. - Soit $g^r \in TC_\epsilon(Z^r)$, $\epsilon = \pm$. Alors g^r est propre si, et seulement si, ψ est un opérateur de Hilbert Schmidt.

De plus, $\hat{U} = \lambda \hat{U}_0$, avec $\hat{U}_0$ l'opérateur dont le symbole est donné par le théorème (2.14) et $|\lambda| = \|F_0\|$, où $F_0(\bar{z})$ est le nouveau vecteur vide donné par (2.13).

Démonstration.

1° Soit $g^r \in TC_\epsilon(Z^r)$ propre et supposons que $\hat{\Phi}^{-1}$ existe (d'ailleurs c'est toujours le cas quand $\epsilon = -$). Il existe alors un opérateur unitaire $\hat{U}$ de $FH_\epsilon(\bar{Z})$ vérifiant, $\forall \zeta \in \bar{Z} \times Z$, $\hat{U}R(\zeta)\hat{U}^{-1} = R(g\zeta)$. Donc son noyau $\tilde{U}(\bar{z}, z')$ est donné par (2.15) et le nouveau vecteur vide $F_0(\bar{z})$ qui, dans ce cas, est un élément de $FH_\epsilon(\bar{Z})$, est donné par (2.13). Vu la définition de $F_0(\bar{z})$ et le lemme (1.15) et [12], pour que $F_0(\bar{z}) \in FH_\epsilon(\bar{Z})$, il faut et il suffit que $\psi\hat{\Phi}^{-1}$ soit un opérateur de Hilbert-Schmidt, c'est-à-dire ψ de Hilbert-Schmidt car $\hat{\Phi}^{-1}$ est un opérateur borné.

Inversement, supposons que ψ est un opérateur de Hilbert-Schmidt. D'après le lemme (1.15) et [12], $F_0 = \hat{U}_0(1) \in FH_\epsilon(\bar{Z})$ donc [7] g est propre. Il existe alors un opérateur unitaire U_1 de $FH_\epsilon(\bar{Z})$ tel que

$$R(g\zeta) = \hat{U}_1 R(\zeta) \hat{U}_1^{-1}, \quad \forall \zeta \in \bar{Z} \times Z,$$

donc, d'après le théorème (2.14),

$$\tilde{U}_1(\bar{z}, z') = \lambda \tilde{U}_0(\bar{z}, z') \quad \text{et} \quad 1 = \|\hat{U}_1(1)\| = \|\lambda \hat{U}_0(1)\| = |\lambda| \|F_0\|,$$

donc $\lambda = \|F_0\|^{-1}$.

2° Supposons maintenant que $\epsilon = +$; $\hat{\Phi}$ n'est pas en général inversible. Pour démontrer le théorème (3.2) dans ce cas, on a besoin des résultats suivants.

(3.3) LEMME. - Soit $g^r \in TC_+(Z^r)$ propre telle que $\hat{\Phi} \equiv 0$. Alors Z est de dimension finie.

Preuve. - Dans ce cas, $A(\bar{z}) = a^*(\psi\bar{z})$ et les équations, $\forall z \in Z$, $A(\bar{z})F_0 = 0$ sont équivalents aux, $\forall z \in Z$, $a^*(\psi\bar{z})F_0 = 0$. Mais en utilisant les relations (2.4), on déduit que ψ est un opérateur unitaire, donc, si Z est de dimension infinie, on conclut que $F_0(\bar{z}) = 0$. Contradiction donc $\dim Z < +\infty$.

(3.4) Définition. - Supposons que $Z^r = Z_1^r \oplus Z_2^r$ et soit $g^r \in TC_+(Z^r)$ telle que $g^r = g_1^r \oplus g_2^r$. Comme $g_1^r \in TC_+(Z_1^r)$ et $g_2^r \in TC_+(Z_2^r)$, on dit que g^r est une transformation canonique décomposable.

(3.5) LEMME. - Soit $g^r \in TC_+(Z^r)$ décomposable. Alors g^r est propre si, et seulement si, ses composantes sont propres.

Preuve. - Supposons que $g^r = g_1^r \oplus g_2^r \in TC_+(Z^r)$ soit propre. Soit alors F_0 le nouveau vecteur de vide qui satisfait les équations, $\forall z \in Z$, $A(\bar{z})F_0 = 0$.

(i) Supposons que $F_0|_{Z_1} \equiv 0$, donc $F_0 \in FH_+(\bar{Z}_2)$ et comme ϕ et ψ laissent stables les espaces Z_1 et Z_2 , les équations d'annihilation impliquent que $\psi_1 = \psi|_{\bar{Z}_1} \equiv 0$, donc, d'après (2.4), $\phi_1 = \phi|_{\bar{Z}_1}$ est inversible. Par conséquent,

$g_1^r \in TC_+(Z_1^r)$ est propre, d'après le théorème 3.2. D'autre part, comme $F_0 \in FH_+(\bar{Z})$, F_0 vérifie les équations $A(\bar{u})F_0 = 0$, $\forall u \in Z_2$, c'est-à-dire $g_2^r \in TC_+(Z_2^r)$ est propre.

(ii) Supposons que $F_1 = F_0|_{Z_1} \neq 0$. On a donc $F_1 \in FH_+(\bar{Z}_1)$ et, $\forall u \in Z_1$, $A(\bar{u})F_1 = 0$, c'est-à-dire g_1^r est propre. De même, g_2^r est propre.

Prouvons l'inverse en supposant que $g_1^r \in TC_+(Z_1^r)$ et $g_2^r \in TC_+(Z_2^r)$ soient propres. $g^r = g_1^r \oplus g_2^r$ est propre si, et seulement si, il existe $F_0 \in FH_+(\bar{Z})$ vérifiant les équations d'annihilation, $\forall u \in Z$, $A(\bar{u})F_0 = 0$. Posons $F_0 = F_1 F_2$, où $F_i \in FH_+(\bar{Z}_i)$, $i = 1, 2$, est le vecteur de vide associé à $g_i^r \in TC_+(Z_i^r)$. Comme $\|F_0\| \leq \|F_1\| \|F_2\|$, on voit que $F_0 \in FH_+(\bar{Z})$ et de plus il vérifie les équations d'annihilation, donc $g^r = g_1^r \oplus g_2^r$ est propre.

(3.6) Remarque. - Soit $g^r \in TC_+(Z^r)$ et posons $\bar{Z}_1 = \text{Ker } \phi$ et $\bar{Z}_2 = (\text{Ker } \phi)^\perp$. D'autre part, en remarquant que g admet une décomposition polaire $g = UG$, car g est inversible, on peut toujours considérer que g est auto-adjoint, c'est-à-dire que

$$(3.7) \quad \phi^* = \phi, \quad \bar{\psi} = \psi^*, \quad \psi = \bar{\psi}^* \quad \text{et} \quad \bar{\phi} = \phi^*.$$

En utilisant (2.4) et (3.7), on trouve que $\phi(\bar{Z}_1) \subset \bar{Z}_1$, $\psi(\bar{Z}_1) \subset Z_1$, $\bar{\phi}(Z_1) \subset Z_1$ et $\bar{\psi}(Z_1) \subset \bar{Z}_1$. De même pour Z_2 , et par conséquent, si $g^r \in TC_+(Z^r)$, avec g auto-adjoint, g^r se décompose en deux composantes $g_1 \in TC_+[(\text{Ker } \phi)^r]$ et $g_2 \in TC_+[(\text{Ker } \phi^\perp)^r]$.

(3.8) Fin de démonstration du théorème 3.2. - Soit $g^r \in TC(Z^r)$, avec g auto-adjoint. D'après la remarque ci-dessus, $g^r = g_1^r \oplus g_2^r$ et $\bar{Z}_1 = \text{Ker } \phi$, $\bar{Z}_2 = (\text{Ker } \phi)^\perp$. Supposons que g^r est propre, donc g_1^r et g_2^r sont propres, d'après le lemme (3.5). Mais $\phi_1 = \phi|_{\bar{Z}_1} \equiv 0$, donc $\dim Z_1 < +\infty$. Par ailleurs $\phi_2 = \phi|_{\bar{Z}_2}$ est

injectif, et g_2^r est propre, donc il existe un nouveau vecteur de vide $F_0^2 \in FH_+(\bar{Z}_2)$ qui, sur $\text{Im } \phi_2$, est donné par la formule (2.13). Mais en remarquant que $\text{Im } \phi_2^* \phi_2 \subset \text{Im } \phi_2$, on déduit que $\text{Im } \phi_2$ est dense dans $\bar{Z}_2$. Donc $\psi_2 \phi_2^{-1} \bar{z} = L_2 \bar{z}$ sur une partie dense de $\bar{Z}_2$ et avec L_2 opérateur de Hilbert

Schmidt. En posant $\bar{u} = \phi_2^{-1} \bar{z}$, on voit par continuité que, $\forall \bar{u} \in \bar{Z}_2$, $\psi_2 \bar{u} = L_2 \phi_2 \bar{u}$, donc ψ_2 est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Comme $\psi = \psi_1 \oplus \psi_2$ et $\dim Z_1 < +\infty$, on déduit que ψ est de Hilbert Schmidt.

Supposons maintenant que ψ est un opérateur de Hilbert Schmidt et posons $g^r = g_1^r \oplus g_2^r$ comme plus haut. En utilisant le fait que $\psi_2^* \psi_2$ est un opérateur compact, on déduit de la relation $\phi_2^* \phi_2 = 1 - \psi_2^* \psi_2$ que $\phi_2^* \phi_2$ est un opérateur à indice. Donc $\text{Im } \phi_2^* \phi_2$ est fermée dans $\bar{Z}_2$. D'autre part $\text{Im } \phi_2^* \phi_2$ est dense dans $\bar{Z}_2$, donc ϕ_2 est un opérateur bijectif et par conséquence $\psi_2 \phi_2^{-1}$ est de Hilbert Schmidt, et, d'après le théorème (3.2), $g_2^r \in \text{TC}_+(Z_2^r)$ est propre. Mais, comme $\dim Z_1^r < +\infty$, $g_1^r \in \text{TC}_e(Z_1^r)$ est propre [13], donc $g^r = g_1^r \oplus g_2^r$ est propre.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BEREZIN (F. A.). - The methode of the second quantization. - New York, Academic Press, 1966.
- [2] BOURBAKI (N.). - Algèbre. Chapitre 9 : Formes sesquilinéaires et formes quadratiques. - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind., 1272 ; Bourbaki, 24).
- [3] JORDAN (P.) und WIGNER (E.). - Über das paulische Äquivalenzverbot, Z. für Physik, t. 47, 1928, p. 631-651.
- [4] KRÉE (P.). - Méthodes fonctionnelles en dimension infinie et holomorphie anticommutative, Séminaire P. Lelong : Analyse, Année 1976/77. - Berlin, Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics) (à paraître).
- [5] KRÉE (P.). - Equations aux dérivées partielles en dimension infinie, Séminaire P. Krée, Année 1976/77. - Paris, Secrétariat mathématique, 1978.
- [6] KRÉE (P.). - Feynman paths integrals and theory of forms, "Conference on Feynman paths [1978. Marseille]". - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics) (à paraître).
- [7] MARIAS (M.). - Transformations canoniques propres pour les fermions. Thèse de 3e cycle, Univ. P. et M. Curie, 1978.
- [8] MARIAS (M.). - Transformations canoniques linéaires dans les espaces de Hilbert, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A (à paraître).
- [9] PALMER (J.). - Scattering automorphisms of the Dirac field, J. math. Analysis and Appl., t. 64, 1978, p. 189-215.
- [10] SHALE (D.) et STINESPRING (W. F.). - Spinor representations of infinite orthogonal groups, J. Math. and Mech., t. 14, 1965, p. 315-322.
- [11] SHALE (D.). - Linear symmetries of free boson fields, Trans. Amer. math. Soc., t. 103, 1962, p. 149-167.
- [12] VERGNE (M.). - Groupe symplectique et seconde quantification, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. 285, 1977, p. 191-194.
- [13] VON NEUMANN (J.). - Die Eindentigkeit der Schrödingerschen Operatoren, Math. Annalen, t. 104, 1931, p. 570-578.