

SÉMINAIRE PAUL KRÉE

LEOPOLDO NACHBIN

Analogies entre l'holomorphie et la linéarité

Séminaire Paul Krée, tome 4 (1977-1978), exp. n° 1, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SPK_1977-1978__4__A2_0

© Séminaire Paul Krée
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Paul Krée » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALOGIES ENTRE L'HOLOMORPHIE ET LA LINÉARITÉ

par Leopoldo NACHBIN (*)

1. Introduction.

En analyse fonctionnelle, on a été amené à classer les espaces localement convexes d'après leurs propriétés remarquables au point de vue linéaire, d'où les classes des espaces bornologiques, tonnelés, infra-tonnelés, ou de Mackey (voir [4], [6], [7], [14], [15]). Malgré le fait que ces classes soient tout à fait naturelles à considérer au point de vue linéaire, elles sont plus générales qu'il ne le faut vis-à-vis de certaines applications. Il en résulte l'idée d'une classification plus serrée par des considérations non linéaires. Or, il y a un rapport objectif entre la théorie linéaire, c'est-à-dire l'étude de l'espace $\mathcal{L}(E; F)$ des applications linéaires continues de E dans F , et la théorie holomorphe, c'est-à-dire l'étude de l'espace $\mathcal{H}(U; F)$ des applications holomorphes de la partie ouverte non vide U de E dans F , où E et F sont des espaces localement convexes complexes. Un tel rapport est, en particulier, dû au fait que $\mathcal{L}(E; F) \subset \mathcal{H}(E; F)$ et, plus généralement, $\mathcal{L}(E; F) \big|_U \subset \mathcal{H}(U; F)$. Par exemple, certaines recherches sur $\mathcal{L}(E; F)$ nous amènent à des considérations analogues portant sur $\mathcal{H}(U; F)$, avec des modifications qui s'imposent. Par conséquent, dans le cas holomorphe, on est amené à considérer les classes des espaces holomorphiquement bornologiques, holomorphiquement tonnelés, holomorphiquement infra-tonnelés, ou holomorphiquement de Mackey (Voir [11], [2], [3]). Ces nouvelles classes holomorphes sont plus précises que ses analogues linéaires. Il en résulte, par exemple, une forme plus forte du théorème de Banach-Steinhaus linéaire, à savoir un théorème de Banach-Steinhaus holomorphe; voir la proposition 20 ci-dessous. D'autre part, la notion d'espace de Mackey est un peu trop générale, tandis qu'un espace holomorphiquement de Mackey correspond à une identité très désirable entre l'holomorphie faible et l'holomorphie; voir la définition 39 ci-dessous et les questions 46 et 47 à la fin de l'exposé.

Introduisons les abréviations suivantes :

B = Baire,

S = Silva,

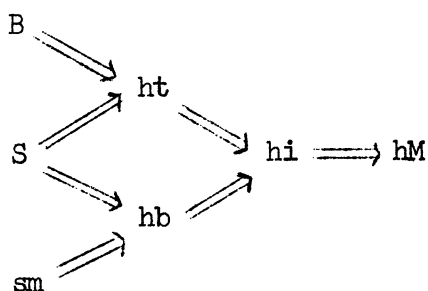
sm = semi-métrisable,

ht = holomorphiquement tonnelé,

(*) Texte reçu en janvier 1979.

hb = holomorphiquement bornologique,
 hi = holomorphiquement infra-tonnelé,
 hM = holomorphiquement de Mackey.

On a alors le diagramme d'implications suivant :



lequel est l'analogie dans le cas holomorphe d'un diagramme d'implications du cas linéaire.

Le programme consistant à étudier les analogies entre l'holomorphie et la linéarité est intéressant et vaste au point de vue de l'analyse fonctionnelle et de l'analyse complexe. Il y a d'autres aspects à envisager que nous n'allons pas ébaucher dans cet exposé de mise au point.

2. Terminologie et notations.

Sauf mention explicite du contraire, on adoptera les conventions suivantes. E et F sont des espaces localement convexes complexes. U est une partie ouverte non vide de E . Soit $\mathcal{K}(U; F)$ l'espace vectoriel des applications holomorphes $f: U \rightarrow F$. Indiquons par $H(U; F)$ l'espace vectoriel des applications $f: U \rightarrow F$ appartenant à $H(U; \hat{F})$, où \hat{F} est un complété de F ; donc $H(U; F) = F^U \cap \mathcal{K}(U; \hat{F})$ est indépendant du choix de \hat{F} . On écrira $\mathcal{K}(U) = \mathcal{K}(U; \mathbb{C})$ et $H(U) = H(U; \mathbb{C})$. Disons que $f: U \rightarrow F$ est algébriquement holomorphe si, pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie S de E rencontrant U , la restriction $f|_{(U \cap S)} \in \mathcal{K}(U \cap S; F)$, où S est muni de sa topologie naturelle. D'après un théorème de Hartogs, ceci est équivalent à dire que f est holomorphe au sens de Gateaux, ce qui veut dire que, pour tout $a \in U$, $b \in E$, la fonction $\lambda \rightarrow f(a + \lambda b)$ est holomorphe au voisinage de l'origine, où $\lambda \in \mathbb{C}$. Disons que $f: U \rightarrow F$ est faiblement holomorphe si $\psi \circ f \in \mathcal{K}(U)$, pour toute $\psi \in F'$, ce qui est équivalent à dire que $f \in H(U; F_\sigma)$, où F_σ indique F muni de sa topologie faible $\sigma(F, F')$. Un ensemble \mathcal{X} d'applications de U dans F est amplement borné si, pour toute semi-norme continue β sur F , l'ensemble $\beta \circ \mathcal{X}$ de fonctions réelles sur U est localement borné. On indiquera par \mathcal{C}_0 la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes. Pour plus de détails sur la terminologie et la notation, voir surtout [11], mais aussi [8], [13], [5].

3. Espaces holomorphiquement bornologiques.

La définition suivante est classique dans le cas linéaire, sous la forme des conditions équivalentes (1b) ou (2b).

Définition 1. - Un espace E donné est un "espace bornologique" s'il satisfait aux conditions équivalentes suivantes :

(1b) Pour tout F , chaque application $f : E \longrightarrow F$ appartient à $\mathcal{L}(E ; F)$ si (et toujours seulement si) f est linéaire, et f est bornée sur toute partie bornée de E .

(1c) Pour tout F , chaque application $f : E \longrightarrow F$ appartient à $\mathcal{L}(E ; F)$ si (et toujours seulement si) f est linéaire, et f est bornée sur toute partie compacte de E .

(2b) Chaque semi-norme α sur E est continue si (et toujours seulement si) α est bornée sur toute partie bornée de E .

(2c) Chaque semi-norme α sur E est continue si (et toujours seulement si) α est bornée sur toute partie compacte de E .

La définition suivante est formulée dans le cas holomorphe par analogie avec la définition précédente du cas linéaire.

Définition 2. - Un espace E donné est un "espace holomorphiquement bornologique" si, pour tout U et tout F , chaque application $f : U \longrightarrow F$ appartient à $\mathcal{H}(U ; F)$ si (et toujours seulement si) f est algébriquement holomorphe, et f est bornée sur toute partie compacte de U .

Remarque 3. - La définition 2 a été formulée par analogie avec la condition (1c) de la définition 1. La raison tient au fait que $f \in \mathcal{H}(U ; F)$ est bornée sur toute partie compacte de U ; mais il peut se faire qu'une $f \in \mathcal{H}(E)$ ne soit pas bornée sur une partie bornée de E , ce qui rend indésirable une telle analogie avec la condition (1b) de la définition 1. D'autre part, la condition (2c) de la définition 1 n'a pas été utilisée dans une telle analogie parce qu'on n'a pas (au moins tout de suite) une notion holomorphe analogue à la notion linéaire de semi-norme; à vrai dire, on peut poursuivre cet aspect, mais nous n'allons pas insister là-dessus. En ce qui concerne l'utilisation de la condition (2b) dans une telle analogie, on a des réserves à la fois semblables à celles dans les cas de (1b) et (2c).

Remarque 4. - Il n'est pas suffisant d'utiliser seulement $F = \mathbb{C}$ dans la définition 2, d'après un contre-exemple connu.

PROPOSITION 5. - Un espace E holomorphiquement bornologique est aussi un espace bornologique.

PROPOSITION 6. - Un espace semi-métrisable E est aussi un espace holomorphiquement bornologique.

Rappelons qu'un espace de Silva est, à un isomorphisme et homéomorphisme près, la même chose qu'un espace dual fort d'un espace de Fréchet-Schwartz.

PROPOSITION 7. - Un espace de Silva E est un espace holomorphiquement bornologique.

La preuve de la proposition précédente est basée sur le résultat suivant.

LEMME 8. - Soient E un espace vectoriel complexe, E_m un espace localement convexe complexe, $\rho_m : E_m \rightarrow E$ une application linéaire, et $\sigma_m : E_m \rightarrow E_{m+1}$ une application linéaire compacte telle que $\rho_m = \rho_{m+1} \circ \sigma_m$, pour $m \in \mathbb{N}$.
Supposons que

$$E = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \rho_m(E_m),$$

et munissons E de la topologie limite inductive correspondante. Soit $U \subset E$ une partie ouverte. Posons $U_m = \rho_m^{-1}(U)$, et supposons que U_0 soit non vide ; donc U et U_m sont également non vides, pour $m \in \mathbb{N}$. Si F est un espace localement convexe complexe et $f : U \rightarrow F$, alors $f \in \mathcal{K}(U ; F)$ si, et seulement si, $f \circ \rho_m \in \mathcal{K}(U_m ; F)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Le résultat précédent et des contre-exemples connus nous amènent à poser la question suivante.

Question 9. - Soient E et E_i des espaces localement convexes complexes, et $\rho_i \in \mathcal{K}(E_i ; F)$, pour tout $i \in I$, où I est un ensemble non vide. Trouver des conditions portant sur ces données pour que, quels que soient la partie ouverte non vide $U \subset E$, l'espace localement convexe complexe F et l'application $f : U \rightarrow F$, alors $f \in \mathcal{K}(U ; F)$ si, et seulement si, $f \circ \rho_i \in \mathcal{K}(U_i ; F)$, pour tout $i \in I$, tel que $U_i = \rho_i^{-1}(U)$ soit non vide. Nous pourrions dire alors que E est la limite inductive holomorphe des E_i moyennant les ρ_i , pour $i \in I$, par analogie avec le cas linéaire. Ceci arrive dans le cas trivial où $E_i = E$ et $\rho_i = I_E$, pour $i \in I$. Le lemme 8 donne des conditions suffisantes intéressantes, mais restrictives parce qu'elles impliquent que E soit un espace de Silva. Peut-on trouver des bonnes conditions suffisantes contenant le cas trivial ci-dessus et le lemme 8 comme des cas particuliers ?

PROPOSITION 10. - Si E est un espace holomorphiquement bornologique, alors $\mathcal{K}(U ; F)$ est complet pour la topologie \mathcal{C}_0 , si F est complet.

Question 11. - Une application $f : U \rightarrow F$ est dite hypo-holomorphe si f est algébriquement holomorphe et f est continue sur les parties compactes de U . Soit $\mathcal{K}_{hy}(U ; F)$ l'espace vectoriel des applications hypo-holomorphes de U dans F . Muni de la topologie \mathcal{C}_0 , on voit que $\mathcal{K}_{hy}(U ; F)$ est complet, si F est complet. Est-ce-que $\mathcal{K}_{hy}(U ; F)$ muni de \mathcal{C}_0 est un complété de $\mathcal{K}(U ; F)$ muni de \mathcal{C}_0 , si F est complet ? En d'autres termes, est-ce-que $\mathcal{K}(U ; F)$ est dense dans $\mathcal{K}_{hy}(U ; F)$ muni de la topologie \mathcal{C}_0 ? C'est clair que $\mathcal{K}(U ; F)$ muni de \mathcal{C}_0 est complet, si $\mathcal{K}(U ; F) = \mathcal{K}_{hy}(U ; F)$ et F est complet ; c'est le cas de la proposition 10.

4. Espaces holomorphiquement tonnelés.

La définition suivante est classique dans le cas linéaire, sous la forme des conditions équivalentes (1p) ou (2).

Définition 12. - Un espace donné E est un "espace tonnelé" s'il satisfait aux conditions équivalentes suivantes.

(1p) Pour tout F , chaque collection $\mathfrak{X} \subset \mathcal{L}(E; F)$ est amplement bornée, ou équi-continue, ce qui revient au même, si (et toujours seulement si) \mathfrak{X} est bornée en chaque point de E .

(1c) Pour tout F , chaque collection $\mathfrak{X} \subset \mathcal{L}(E; F)$ est amplement bornée, ou équi-continue; ce qui revient au même, si (et toujours seulement si) \mathfrak{X} est bornée sur toute partie compacte de E engendrant un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

(2) Chaque semi-norme α sur E est continue si (et toujours seulement si) α est semi-continue inférieurement.

La définition suivante est formulée dans le cas holomorphe par analogie avec la définition précédente relative au cas linéaire.

Définition 13. - Un espace donné E est un "espace holomorphiquement tonnelé" si, pour tout U et tout F , chaque collection $\mathfrak{X} \subset \mathcal{H}(U; F)$ est amplement bornée si (et toujours seulement si) \mathfrak{X} est bornée sur toute partie compacte de U engendrant un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

Remarque 14. - Noter la proposition 17 ci-dessous.

Remarque 15. - La définition 13 a été formulée par analogie avec la condition (1c) de la définition 12. La raison tient au fait qu'il y a un exemple classique d'une suite $f_m \in \mathcal{H}(\underline{\mathbb{C}})$, pour $m \in \underline{\mathbb{N}}$, laquelle est bornée dans chaque point de $\underline{\mathbb{C}}$, mais qui n'est pas bornée sur au moins une partie compacte de $\underline{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire qui n'est pas localement bornée, ce qui rend indésirable une telle analogie avec la condition (1p) de la définition 12. En ce qui concerne l'utilisation de la condition (2) dans une telle analogie, on a des réserves semblables à une partie de la remarque 3.

Remarque 16. - Il est suffisant d'utiliser seulement $F = \underline{\mathbb{C}}$ dans la définition 13, d'après un raisonnement connu.

PROPOSITION 17. - $\mathfrak{X} \subset \mathcal{H}(U; F)$ est bornée sur toute partie compacte de U , engendrant un sous-espace vectoriel de dimension finie de E si, et seulement si, \mathfrak{X} est bornée sur toute partie compacte de U engendrant un sous-espace affine de dimension unité de E .

PROPOSITION 18. - Un espace E holomorphiquement tonnelé est aussi un espace tonnelé.

PROPOSITION 19. - Un espace E de Baire est un espace holomorphiquement tonnelé.

En particulier, on a le théorème de Banach-Steinhaus holomorphe suivant.

PROPOSITION 20. - Si E est un espace de Fréchet, chaque collection $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}(U ; F)$ est équi-continue si \mathcal{X} est bornée sur toute partie compacte de U engendrant un sous-espace affine de dimension unité de E .

PROPOSITION 21. - Un espace de Silva E est un espace holomorphiquement tonnelé.

5. Espaces holomorphiquement infra-tonnelés.

La définition suivante est classique dans le cas linéaire, sous la forme des conditions équivalentes (1b) ou (2b).

Définition 22. - Un espace donné E est un "espace infra-tonnelé" s'il satisfait aux conditions équivalentes suivantes.

(1b) Pour tout F , chaque collection $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}(E ; F)$ est amplement bornée, ou équi-continue, ce qui revient au même, si (et toujours seulement si) \mathcal{X} est bornée sur toute partie bornée de E .

(1c) Pour tout F , chaque collection $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}(E ; F)$ est amplement bornée, ou équi-continue, ce qui revient au même, si (et toujours seulement si) \mathcal{X} est bornée sur toute partie compacte de E .

(2b) Chaque semi-norme α sur E est continue si (et toujours seulement si) α est semi-continue inférieurement et bornée sur toute partie bornée de E .

(2c) Chaque semi-norme α sur E est continue si (et toujours seulement si) α est semi-continue inférieurement et bornée sur toute partie compacte de E .

La définition suivante est formulée dans le cas holomorphe par analogie avec la définition précédente du cas linéaire.

Définition 23. - Un espace donné E est un "espace holomorphiquement infra-tonnelé" si, pour tout U et tout F , chaque collection $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}(U ; F)$ est amplement bornée si (et toujours seulement si) \mathcal{X} est bornée sur toute partie compacte de U .

Remarque 24. - La définition 23 a été formulée par analogie avec la condition (1c) de la définition 22. Les raisons de l'indésirabilité ou des réserves concernant une telle analogie avec les conditions (1b), (2c) ou (2b) de la définition 22 sont semblables à celles expliquées dans la remarque 3.

Remarque 25. - Il est suffisant d'utiliser seulement $F = \mathbb{C}$ dans la définition 23, d'après un raisonnement connu.

PROPOSITION 26. - Un espace E holomorphiquement infra-tonnelé est aussi un espace infra-tonnelé.

PROPOSITION 27. - Pour que E soit un espace holomorphiquement bornologique, il faut et il suffit que E soit holomorphiquement infra-tonnelé et que, pour tout U ,

chaque fonction $f : U \rightarrow \underline{\mathbb{C}}$ appartient à $\mathcal{K}(U)$ si (et toujours seulement si)
 f est algébriquement holomorphe, et f est bornée sur toute partie compacte de U .

Remarque 28. - La proposition 27 est à comparer avec la remarque 4.

Définition 29. - Un espace donné E a la "propriété de Montel" si, pour tout U et tout F , chaque collection $\mathcal{X} \subset \mathcal{K}(U; F)$ est relativement compacte pour la topologie \mathcal{C}_0 si (et toujours seulement si) \mathcal{X} est bornée sur toute partie compacte de U engendrant un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , et $\mathcal{X}(x) \subset F$ est relativement compacte, pour tout $x \in U$.

Remarque 30. - La définition 29 a son origine dans le théorème classique de Montel, d'après lequel, si E est de dimension finie et $F = \underline{\mathbb{C}}$, alors $\mathcal{X} \subset \mathcal{K}(U)$ est relativement compacte pour la topologie \mathcal{C}_0 si, et seulement si, \mathcal{X} est bornée sur toute partie compacte de U . La propriété de Montel de la définition 29 est à distinguer de la propriété de Montel consistant à demander qu'une partie de E est relativement compacte si (et toujours seulement si) elle est bornée.

Remarque 31. - Il n'est pas suffisant d'utiliser seulement $F = \underline{\mathbb{C}}$ dans la définition 29, d'après un contre-exemple connu.

PROPOSITION 32. - Pour que E soit un espace holomorphiquement tonnelé, il faut et il suffit que E soit holomorphiquement infra-tonnelé et que E possède la propriété de Montel.

Définition 33. - Un espace donné E a la "propriété de infra-Montel" si, pour tout U et tout F , chaque collection $\mathcal{X} \subset \mathcal{K}(U; F)$ est relativement compacte pour la topologie \mathcal{C}_0 si (et toujours seulement si) \mathcal{X} est bornée sur toute partie compacte de U , et $\mathcal{X}(x) \subset F$ est relativement compacte, pour tout $x \in U$.

Remarque 34. - On peut répéter ici des commentaires semblables à ceux de la remarque 30. D'autre part, on a utilisé "Montel" ainsi que "infra-Montel" par analogie entre les définitions 13 et 29 (où l'on utilise des parties compactes de U engendrant des sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E) et entre les définitions 23 et 33 (où l'on utilise des parties compactes de U), respectivement.

Remarque 35. - Il n'est pas suffisant d'utiliser seulement $F = \underline{\mathbb{C}}$ dans la définition 33, d'après un contre-exemple connu.

PROPOSITION 36. - Un espace E holomorphiquement infra-tonnelé possède la propriété de infra-Montel.

Remarque 37. - Comparer les propositions 32, 36 et 42 avec la question 43 ci-dessous.

6. Espaces holomorphiquement de Mackey.

La définition suivante est classique et due à MACKEY dans le cas linéaire sous la forme de la condition (2g), l'équivalence entre celle-ci et la condition (3) étant connue comme théorème de Mackey-Arens.

Définition 38. - Un espace donné E est un "espace de Mackey" s'il satisfait aux conditions équivalentes suivantes.

(1) Pour tout F , chaque application $f : E \rightarrow F$ appartient à $\mathcal{L}(E ; F)$ si (et toujours seulement si) f est linéaire, et f est faiblement continue, c'est-à-dire $\psi \circ f \in E'$, pour toute $\psi \in F'$.

(2) Une topologie localement convexe \mathcal{S} sur E est plus petite (moins fine) que la topologie \mathcal{C} donnée sur E si (et toujours seulement si) le dual de E pour \mathcal{S} est contenu dans le dual de E pour \mathcal{C} .

(2g) La topologie \mathcal{C} donnée sur E est la plus grande (plus fine) des topologies localement convexes sur E définissant le même dual E' .

(2m) La topologie \mathcal{C} donnée sur E est maximale parmi les topologies localement convexes sur E définissant le même dual E' .

(3) La topologie \mathcal{C} donnée sur E est la topologie de la convergence uniforme sur les parties convexes et compactes pour la topologie faible $\sigma(E', E)$ de E' .

La définition suivante est formulée dans le cas holomorphe par analogie avec la définition précédente du cas linéaire.

Définition 39. - Un espace donné E est un "espace holomorphiquement de Mackey" si, pour tout U et tout F , chaque application $f : U \rightarrow F$ appartient à $H(U ; F)$ si (et toujours seulement si) f est faiblement holomorphe, c'est-à-dire $\psi \circ f \in \mathcal{H}(U)$, pour toute $\psi \in F'$.

Remarque 40. - La définition 39 a été formulée par analogie avec la condition (1) de la définition 38.

PROPOSITION 41. - Un espace E holomorphiquement de Mackey est aussi un espace de Mackey.

PROPOSITION 42. - Un espace E holomorphiquement infra-tonnelé est un espace holomorphiquement de Mackey.

Question 43. - En comparant les propositions 32, 36 et 42, on peut se demander si, pour que E soit un espace holomorphiquement infra-tonnelé, il faut et il suffit que E soit holomorphiquement de Mackey et que E possède la propriété de infra-Montel.

PROPOSITION 44. - Pour que E soit un espace holomorphiquement bornologique, il faut et il suffit que E soit holomorphiquement de Mackey et que, pour tout U , chaque fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ appartient à $\mathcal{H}(U)$ si (et toujours seulement si) f

est algébriquement holomorphe, et f est bornée sur toute partie compacte de U .

Remarque 45. - La proposition 44 est à comparer avec la remarque 4.

Question 46. - On peut se demander si l'holomorphie faible plus un tout petit peu d'holomorphie entraînent l'holomorphie. D'une façon plus précise, si $f : U \rightarrow F$ est faiblement holomorphe et s'il existe une partie ouverte non vide $V \subset U$ telle que $f \in \mathcal{K}(V ; F)$, peut-on en conclure que $f \in \mathcal{K}(U ; F)$, à condition que U soit connexe et F soit complet ? La réponse est affirmative dans les deux cas remarquables suivants. Le premier cas est celui où E est un espace holomorphiquement de Mackey. Le deuxième cas est celui où E est un espace de Zorn ; c'est-à-dire que, pour tout U connexe et tout F , si $f : U \rightarrow F$ est algébriquement holomorphe et s'il existe une partie ouverte non vide $V \subset U$ telle que $f \in \mathcal{K}(V ; F)$, alors $f \in \mathcal{K}(U ; F)$. Donc, est-ce-que la réponse est toujours affirmative ?

Toute réponse affirmative à la question précédente entraîne une réponse affirmative à la question suivante ; voir [10].

Question 47. - On peut se demander si la possibilité de tout prolongement holomorphe à valeurs scalaires entraîne la possibilité de tout prolongement holomorphe à valeurs vectorielles, au sens suivant. Soient U, V, W des parties ouvertes non vides connexes d'un espace E fixé telles que $W \subset U \cap V$. En supposant que $F \neq 0$ est séparé et complet, on dit que V est un F -prolongement holomorphe de U par W si, quelle que soit $f \in \mathcal{K}(U ; F)$, il existe $g \in \mathcal{K}(V ; F)$, unique d'après l'unicité du prolongement holomorphe, telle que $f = g$ sur W . Est-ce-que, pour tout tel F , V est un F -prolongement holomorphe de U par W si (et toujours seulement si) V est un \mathbb{C} -prolongement holomorphe de U par W ? Par suite, c'est le cas au moins si E est un espace holomorphiquement de Mackey, ou bien un espace de Zorn.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARAGONA (J.). - On the holomorphical classification of spaces of holomorphic germs, Resultate der Math. (à paraître).
- [2] BARROSO (J. A.), MATOS (M. C.) and NACHBIN (L.). - On bounded sets of holomorphic mappings, "Proceedings on infinite dimensional holomorphy [Lexington, 1973]", p. 123-133. - Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Lecture Notes in Mathematics, 364).
- [3] BARROSO (J. A.), MATOS (M. C.) and NACHBIN (L.). - On holomorphy versus linearity in classifying locally convex spaces, "Infinite dimensional holomorphy and applications [Sao Paulo, 1975]", p. 31-74. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1977 (North-Holland Mathematics Studies, 12 ; Notas de Matematica, 54).
- [4] BOURBAKI (N.). - Espaces vectoriels topologiques. Chapitres 1-2, 3-5. - Paris, Hermann, 1953, 1955 (Act. scient. et ind., 1189 et 1229 ; Bourbaki, 15 et 18).

- [5] COEURE (G.). - Analytic functions and manifolds in infinite dimensional spaces. - Amsterdam, North-Holland publishing Company ; New York, American Elsevier publishing Company, 1974 (North-Holland Mathematics Studies, 11 ; Notas de Matematica, 52).
- [6] HORVATH (J.). - Topological vector spaces and distributions. - Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1966 (Addison-Wesley Series in Mathematics).
- [7] KÖTHER. - Topological vector spaces. - Berlin, Springer-Verlag, 1969 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 159).
- [8] NACHBIN (L.). - Topology on spaces of holomorphic mappings. - Berlin, Springer-Verlag, 1969 (Ergebnisse der Mathematik, 47).
- [9] NACHBIN (L.). - Recent developments in infinite dimensional holomorphy, Bull. Amer. math. Soc., t. 79, 1973, p. 625-640.
- [10] NACHBIN (L.). - On vector-valued versus scalar-valued holomorphic continuation, Koninkl. nederl. Akad. Wetensch., Proc., Series A, t. 74, 1973, p. 352-354 ; Indag. math., t. 35, 1973, p. 352-354.
- [11] NACHBIN (L.). - A glimpse at infinite dimensional holomorphy, "Infinite dimensional holomorphy [Lexington, 1973]", p. 69-79. - Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Lecture Notes in Mathematics, 364).
- [12] NACHBIN (L.). - Some problems in the application of functional analysis to holomorphy, "Advances in holomorphy". - Amsterdam, North-Holland publishing Company (Notas de Matematica) (à paraître).
- [13] NOVERRAZ (P.). - Pseudo-convexité, convexité polynomiale et domaines d'holomorphic en dimension infinie. - Amsterdam, North-Holland publishing Company ; New York, American Elsevier publishing Company, 1973 (North-Holland Mathematics Studies, 3 ; Notas de Matematica, 48).
- [14] SCHAEFFER (H. H.). - Topological vector spaces. - New York, the Macmillan Company ; London, Collier-Macmillan limited, 1966 (Macmillan Series in advanced Mathematics and theoretical Physics).
- [15] TREVES (F.). - Topological vector spaces, distributions and kernels. - New York, Academic Press, 1967 (Pure and applied Mathematics. Academic Press, 25).
-