

SÉMINAIRE PAUL KRÉE

MICHEL MARIAS

Espaces du type Sobolev sur un espace de Hilbert complexe

Séminaire Paul Krée, tome 3 (1976-1977), exp. n° 7, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SPK_1976-1977__3__A7_0

© Séminaire Paul Krée

(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Paul Krée » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ESPACES DU TYPE SOBOLEV SUR UN ESPACE DE HILBERT COMPLEXE

par Michel MARIAS

1. Définitions et rappels.

Soit Z un espace hilbertien complexe de dimension finie, muni d'une conjugaison $z = \bar{z}$. Sur $Z \simeq \mathbb{C}^n$, on considère la mesure gaussienne normale canonique ν'_n :

$$d\nu'_n(z, \bar{z}) = \Pi^{-n} \exp(-z\bar{z}) d^n z,$$

si $z = (z_1, \dots, z_n)$, $z_j = x_j + iy_j$ et

$$d^n z = dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_n = d^n x \wedge d^n y.$$

On note $L^2(Z, \nu'_n)$, l'espace vectoriel des classes d'équivalence des fonctions $\phi : Z \rightarrow \mathbb{C}$ de carré intégrable par rapport à la mesure $d\nu'_n$. C'est un espace de Hilbert isomorphe à son antidual. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $\text{Exp}^m Z$, l'espace de Banach des fonctions entières $\phi : Z \rightarrow \mathbb{C}$ qui satisfont la condition de croissance :

$$\|\phi\|_m = \sup_{z \in Z} |\phi(z)| \exp(-m|z|) < +\infty.$$

L'espace nucléaire limite inductive des $\text{Exp}^m Z$ est noté $\text{Exp}(Z)$; c'est l'espace des fonctions entières à croissance exponentielle sur Z . Son antidual $'\text{Exp} Z$ est l'espace des antifonctionnelles analytiques de type exponentiel.

1.1 Un triplet nucléaire complexe [2]. - On identifie Z à l'antidiagonale de $\bar{Z} \times Z$ par l'application

$$Z \rightarrow \{(\bar{z}, z') \in \bar{Z} \times Z ; z = z'\}$$

$$z \mapsto (\bar{z}, z).$$

Alors l'injection $k : \text{Exp}(\bar{Z} \times Z) \hookrightarrow L^2(Z, \nu'_n)$, définie par la restriction à l'antidiagonale de $\bar{Z} \times Z$, est continue à image dense. Introduisant l'adjointe k^* de k , il vient le triplet nucléaire :

$$\mathcal{C}(Z) = (\text{Exp}(\bar{Z} \times Z) \xrightarrow{\nu'_n} L^2(Z, \nu'_n) \xrightarrow{\nu'_n} '\text{Exp}(\bar{Z} \times Z)).$$

En utilisant ce triplet, qui remplace le triplet de L. SCHWARTZ

$$S(\mathbb{R}^n) dx \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n, dx).dx \hookrightarrow 'S(\mathbb{R}^n),$$

on définira les espaces de Sobolev complexes.

1.2. Polynômes d'Hermite complexes [5] et la transformation @. - Sur $\bar{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$, on définit les polynômes d'Hermite complexes par la formule :

$$H_{k,\ell}(\bar{z}, z) = \int_{\mathbb{C}} (\bar{z} + it)^k (z + it)^\ell d\nu'(t, \bar{t}),$$

Ils dépendent de deux indices k, l , entiers positifs.

En sommant

$$(1.1) \quad \sum \frac{\bar{u}^k}{k!} \frac{u^l}{l!} H_{k,l}(\bar{z}, z) = \exp(\bar{u}z + uz) \int_{\mathbb{C}} \exp i(\bar{u}\bar{t} + ut) dv'(t, \bar{t}) \\ = \exp(-\bar{u}u + \bar{u}z + uz),$$

on trouve que les polynômes d'Hermite complexes admettent une fonction génératrice

$$G(\bar{u}, u, \bar{z}, z) = \exp(-\bar{u}u + \bar{u}z + uz).$$

De la relation (1.1), on déduit que

$$(1.2) \quad H_{k,l}(\bar{z}, z) = [(-1)^{k+l} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z}] \exp(-z\bar{z}) \exp z\bar{z}.$$

On en déduit que les polynômes $(k! l!)^{-1/2} H_{k,l}(\bar{z}, z)$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{C}, \nu')$.

$$(1.3) \quad \text{Alors } f \in L^2(\mathbb{C}, \nu') \iff f(\bar{z}, z) = \sum a_{k,l} H_{k,l}(\bar{z}, z) \\ \sum_{k,l} |a_{k,l}|^2 < +\infty \text{ et } a_{k,l} = \langle f | \frac{H_{k,l}}{(k! l!)^{1/2}} \rangle.$$

Si on note

$$F^2(\bar{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}) = \{f : \bar{\mathbb{C}} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} ; f(\bar{z}, z) = \sum_{k,l} a_{k,l} \bar{z}^k z^l \text{ et } \sum_{k,l} |a_{k,l}|^2 < +\infty\},$$

c'est un espace de Hilbert qui admet comme base orthonormée la famille

$$\{(k! l!)^{-1/2} \bar{z}^k z^l\}_{k,l}.$$

On peut alors définir l'application suivante

$$L^2(\mathbb{C}, \nu') \xrightarrow{\Theta} F(\bar{\mathbb{C}} \times \mathbb{C})$$

$$\varphi \mapsto \Theta\varphi = \Phi$$

avec

$$\Phi(\bar{z}, z) = \sum_{k,l} \langle \varphi | \frac{H_{k,l}}{(k! l!)^{1/2}} \rangle \frac{\bar{z}^k z^l}{(k! l!)^{1/2}} \\ = \int_{\mathbb{C}} \sum_{k,l} \frac{\bar{z}^k z^l}{k! l!} H_{k,l}(\bar{u}, u) \varphi(\bar{u}, u) dv'(\bar{u}, u) \\ = \int \exp(-\bar{u}u + \bar{u}z + uz) \varphi(\bar{u}, u) dv'(\bar{u}, u).$$

On remarque que Θ envoie isométriquement la base $\{(k! l!)^{-1/2} H_{k,l}\}_{k,l}$ de $L^2(\mathbb{C}, \nu')$ sur la base $\{(k! l!)^{-1/2} \bar{z}^k z^l\}_{k,l}$ de $F^2(\bar{\mathbb{C}} \times \mathbb{C})$, donc Θ est une isométrie de $L^2(\mathbb{C}, \nu')$ sur $F^2(\bar{\mathbb{C}} \times \mathbb{C})$.

PROPOSITION 1. - L'application Θ envoie bijectivement $\text{Exp } \bar{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$ dans $\text{Exp } \bar{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$.

Preuve. - Soit $\varphi(\bar{u}, u) \in L^2(\mathbb{C}, \nu')$ qui se prolonge à une application $\tilde{\varphi}(\bar{z}, z')$ sur $\bar{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$ entière et à croissance exponentielle, c'est-à-dire vérifiant la condition de croissance :

$$(1.4) \quad \exists c > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tels que, } \forall (\bar{z}, z'), \\ |\tilde{\varphi}(\bar{z}, z')| < c \exp[\alpha(|\bar{z}| + |z'|)] .$$

Comme $\varphi(\bar{u}, u) \in L^2(\underline{\mathbb{C}}, \nu')$, on a le développement suivant

$$(1.5) \quad \varphi(\bar{u}, u) = \sum_{k, l} \varphi_{k, l} \frac{H_{k, l}(\bar{u}, u)}{(k! l!)^{1/2}}$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi_{k, l} &= (k! l!)^{-1/2} \int_{\underline{\mathbb{C}}} \varphi(\bar{u}, u) H_{k, l}(\bar{u}, u) d\nu'(u) \\ &= (k! l!)^{-1/2} \int_{\underline{\mathbb{C}}} \frac{\partial^{k+l} \varphi(\bar{u}, u)}{\partial \bar{u}^k \partial u^l} d\nu'(u) . \end{aligned}$$

On fait des estimations des $\partial^{k+l} \varphi(\bar{u}, u) / \partial \bar{u}^k \partial u^l$ pour trouver une estimation de $(\Theta \varphi)(\bar{z}, z')$.

On fixe u , et on considère $(z, z') \in D_R(u) \times D_R(u)$; alors

$$(1.6) \quad \left| \frac{\partial^{k+l} \varphi(\bar{z}, z')}{\partial \bar{z}^k \partial z'^l} \right| \leq c \exp(\alpha(|\bar{z}| + |z'|)) k! l! M(R) \text{ avec } M(R) = \frac{\exp 2\alpha R}{R^{k+l}} .$$

Mais $M(R)$ atteint son minimum si $R = (k + l)/2\alpha$, et par conséquent

$$|\varphi_{k, l}| \leq c_1 c \frac{(e\alpha)^k (e\alpha)^l}{(k! l!)^{1/2}} .$$

Comme $(\Theta \varphi)(\bar{z}, z') = \sum_{k, l} \varphi_{k, l} \bar{z}^k z'^l / (k! l!)^{1/2}$, on trouve :

$$|(\Theta \varphi)(\bar{z}, z')| \leq c_1 c \exp e\alpha(|\bar{z}| + |z'|) .$$

Donc $\Theta \circ k$ envoie continûment $\text{Exp } \bar{\mathbb{C}} \times \underline{\mathbb{C}}$ dans $\text{Exp } \bar{\mathbb{C}} \times \underline{\mathbb{C}}$.

Inversement, on remarque que si $\lambda \in \underline{\mathbb{C}}$:

$$(\Theta \circ k)^{-1} (\lambda \bar{z}^k z'^l) = \lambda H_{k, l}(\bar{z}, z') = \lambda \int_{\underline{\mathbb{C}}} (\bar{z} + i\bar{t})^k (z' + it)^l d\nu'(\bar{t}, t) .$$

Par conséquent, si $\varphi \in \text{Exp } \bar{\mathbb{C}} \times \underline{\mathbb{C}}$ polynômiale, on a :

$$(1.7) \quad [(\Theta \circ k)^{-1} \varphi](\bar{z}, z') = \int_{\underline{\mathbb{C}}} \varphi(\bar{z} + i\bar{t}, z' + it) d\nu'(t, \bar{t}) .$$

Donc si $\varphi \in \text{Exp } \bar{\mathbb{C}} \times \underline{\mathbb{C}}$, $(\Theta \circ k)^{-1} \varphi \in \text{Exp } \bar{\mathbb{C}} \times \underline{\mathbb{C}}$, car les fonctions polynômiales sont denses dans $\text{Exp } \bar{\mathbb{C}} \times \underline{\mathbb{C}}$, et la formule (1.7) donne l'estimation demandée.

C. Q. A. D.

La transformation Θ est un isomorphisme de triplets nucléaires [2]

$$\begin{array}{ccccc} \text{Exp } \bar{\mathbb{C}} \times \underline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{k} & L^2(\underline{\mathbb{C}}, \nu') & \hookrightarrow & {}'\text{Exp } \bar{\mathbb{C}} \times \underline{\mathbb{C}} \\ \downarrow & & \downarrow \Theta & & \downarrow \\ \text{Exp } \bar{\mathbb{C}} \times \underline{\mathbb{C}} & \hookrightarrow & F^2(\underline{\mathbb{C}}, \nu') & \hookrightarrow & {}'\text{Exp } \bar{\mathbb{C}} \times \underline{\mathbb{C}} . \end{array}$$

Remarque 2. - Pour tout $T \in {}'\text{Exp } \bar{\mathbb{C}} \times \underline{\mathbb{C}}$, on définit la famille $(a_{k, l})_{k, l}$ de ses coefficients d'Hermite par

$$a_{k, l} = (k! l!)^{-1/2} \langle T | H_{k, l} \rangle .$$

Alors T est caractérisé par la famille $(a_{k, l})_{k, l}$. Car si $a_{k, l} = 0$, $\forall k, l$ entiers, en prenant sa transformée par Θ ,

$$\begin{aligned}
(\mathbb{G})(\bar{z}, z') &= \langle T(\bar{u}, u') \rangle, \exp(-\bar{u}u' + \bar{u}\bar{z} + u'z') \rangle \\
&= \langle T(\bar{u}, u') \rangle, \sum_{k,l} \frac{\bar{z}^k z'^l}{k! l!} H_{k,l}(\bar{u}, u') \rangle = 0,
\end{aligned}$$

ce qui entraîne $T \equiv 0$.

Remarque 3. - Tout ce qui est fait en (1.7) est valable pour $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$.

1.3. Dérivation relative. - Posons

$$\partial_{z_i}^{\bar{\lambda}} = \frac{\partial^{\bar{\lambda}}}{\partial z_i^{\bar{\lambda}}}, \quad \partial_{\bar{z}_i}^{\lambda} = \frac{\partial^{\lambda}}{\partial \bar{z}_i^{\lambda}}, \quad \partial_{z_i}^{\vee} = \exp(z\bar{z}) \partial_{z_i} \exp(-z\bar{z}) = \partial_{z_i} - \bar{z}_i.$$

et

$$\partial_{\bar{z}_i}^{\vee} = \exp(z\bar{z}) \partial_{\bar{z}_i} \exp(-z\bar{z}) = \partial_{\bar{z}_i} - z_i.$$

Ces opérateurs sont linéaires continus dans $\text{Exp } \bar{Z} \times Z$.

En prenant l'adjoint de l'opérateur $-\partial_{z_i}^{\vee}$ (resp. $-\partial_{\bar{z}_i}^{\vee}$) on définit un opérateur $\delta_{z_i}^{\bar{\lambda}}$ (resp. $\delta_{\bar{z}_i}^{\lambda}$) de $\text{Exp } \bar{Z} \times Z$.

1.4. Définition des espaces $M^{s,t}(Z)$ quand $Z \simeq \mathbb{C}^n$.

DÉFINITION 4. - Pour s et t entiers positifs, on définit l'espace :

$$\begin{aligned}
M^{s,t}(Z) &= \{f(\bar{z}, z) \nu'_n \in \text{Exp}(\bar{Z} \times Z) ; \\
&\quad \partial_z^{\lambda} \partial_{\bar{z}}^{\mu} f(\bar{z}, z) \in L^2(Z, \nu') \text{ pour } |\lambda| \leq s, |\mu| \leq t\}.
\end{aligned}$$

On munit $M^{s,t}(Z)$ de la norme :

$$(1.8) \quad \|f\|_{s,t}^2 = \sum_{\substack{0 \leq |\lambda| \leq s \\ 0 \leq |\mu| \leq t}} \|D_{\bar{z}}^{\lambda} D_z^{\mu} f\|^2$$

avec

$$\|D_{\bar{z}}^{\lambda} D_z^{\mu} f\|^2 = \sum_{|\lambda|=k} \sum_{|\mu|=m} \|\partial_{\bar{z}}^{\lambda} \partial_z^{\mu} f\|_2^2 \frac{|\lambda|! |\mu|!}{\lambda! \mu!}.$$

Pour pouvoir définir $M^{s,t}(Z)$ pour $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ quelconque, on cherche une norme équivalente, en développant $f \in \text{Exp } \bar{Z} \times Z$ suivant les polynômes d'Hermite complexes. On a vu que si $f \in \text{Exp } \bar{Z} \times Z$, alors

$$f(\bar{z}, z) = \sum a_{\alpha, \beta} H_{\alpha, \beta}(\bar{z}, z)$$

avec α, β multi-indices de longueur n et $a_{\alpha, \beta} = (\alpha! \beta!)^{-1/2} \langle f | H_{\alpha, \beta} \rangle$.

Par conséquent

$$\partial_{\bar{z}}^{\lambda} \partial_z^{\mu} f(\bar{z}, z) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} H_{\alpha-\mu, \beta-\lambda}(\bar{z}, z) \left(\frac{\alpha! \beta!}{(\alpha-\mu)! (\beta-\lambda)!} \right)^{1/2}$$

et, en posant $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = t$, $P_2(t) = t(t-1)$, ..., on trouve :

$$\partial_{\bar{z}}^{\lambda} \partial_z^{\mu} f(\bar{z}, z) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} (P_{\mu_1}(\alpha_1) P_{\lambda_1}(\beta_1) \dots P_{\mu_n}(\alpha_n) P_{\lambda_n}(\beta_n))^{\frac{1}{2}} H_{\alpha-\mu, \beta-\lambda}(\bar{z}, z).$$

La norme de f est égale à

$$\begin{aligned} \|f\|_{s,t}^2 &= \sum_{\alpha, \beta} |a_{\alpha, \beta}|^2 \sum_{\substack{0 \leq l \leq t \\ 0 \leq m \leq s}} \sum_{\substack{|\lambda|=l \\ |\mu|=m}} \frac{|\lambda|! |\mu|!}{\lambda! \mu!} P_{\mu_1}(\alpha_1) P_{\lambda_1}(\beta_1) \dots P_{\mu_n}(\alpha_n) P_{\lambda_n}(\beta_n) \\ &= \sum_{\alpha, \beta} |a_{\alpha, \beta}|^2 \sum_{\substack{0 \leq l \leq t \\ 0 \leq m \leq s}} P_m(|\alpha|) P_l(|\beta|). \end{aligned}$$

Il existe alors des constantes positives $c_1(s, t)$, $c_2(s, t)$ [1] telles que

$$c_1(s, t) \|f\|'_{s,t} \leq \|f\|_{s,t} \leq c_2(s, t) \|f\|'_{s,t}$$

si

$$(1.4) \quad \|f\|_{s,t}'^2 = \sum_{\alpha, \beta} |a_{\alpha, \beta}|^2 (1 + |\alpha|)^s (1 + |\beta|)^t.$$

Cette norme permet de définir $M^{s,t}(Z)$ pour $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

DÉFINITION 5. - Si $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, on définit $M^{s,t}(Z)$ comme l'espace des $T \in \text{'Exp } \bar{Z} \times Z$ telles que :

$$\sum_{\alpha, \beta} |a_{\alpha, \beta}|^2 (1 + |\alpha|)^s (1 + |\beta|)^t < +\infty$$

si $a_{\alpha, \beta} = (\alpha! \beta!)^{-1/2} \langle T | H_{\alpha, \beta} \rangle$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\beta \in \mathbb{N}^n$, sont les coefficients d'Hermité de l'antifonctionnelle analytique T .

On a les inclusions suivantes, pour $s \geq 0$, $t \geq 0$,

$$M^{s,t}(Z) \hookrightarrow L^2(Z, \nu_n') \hookrightarrow M^{-s,-t}(Z),$$

$M^{-s,-t}(Z)$ est anti-dual de $M^{s,t}(Z)$.

Pour tout s, t réels, l'espace $P(Z)$ des fonctions polynômiales

$$f(z', z) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq M \\ |\beta| \leq N}} a_{\alpha, \beta} \bar{z}^\alpha z^\beta$$

est dense dans $M^{s,t}(Z)$.

DÉFINITION 6. - Soit Z un espace hilbertien complexe séparable, avec conjugaison. Soient s, t des nombres réels. On note par $F^{s,t}(\bar{Z} \times Z)$ l'espace des fonctions entières Φ sur $\bar{Z} \times Z$ qui admettent un développement de Taylor à l'origine

$$\Phi(\bar{z}, z') = \sum_{0 \leq l, m < +\infty} \frac{D_{\bar{z}}^l D_{z'}^m \Phi(0; \bar{z}, z')}{l! m!}$$

tel que

$$\|\Phi\|_{s,t}^2 = \sum_{0 \leq l, m < +\infty} \frac{\|D_{\bar{z}}^l D_{z'}^m \Phi(0)\|^2 (1+l)^s (1+m)^t}{l! m!} < +\infty$$

où $\|\cdot\|$ dans la dernière somme désigne la norme dans $(\hat{\odot}_l \bar{Z}) \hat{\otimes} (\hat{\odot}_m Z)$.

PROPOSITION 7. - Si Z est de dimension finie, $\hat{\otimes}$ réalise une isométrie entre $M^{s,t}(Z)$ et $F^{s,t}(\bar{Z} \times Z)$.

Démonstration. - Il suffit de prendre Φ polynômiale, car $P(Z)$ est dense dans $M^{s,t}(Z)$.

Soit

$$\Phi(\bar{u}, u) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq M \\ |\beta| \leq N}} \frac{a_{\alpha, \beta}}{(\alpha! \beta!)^{1/2}} H_{\alpha, \beta}(\bar{u}, u) \\ \Rightarrow (\Theta\Phi)(z, z') = \sum_{\substack{\ell \leq M, m \leq N}} (\ell! m!)^{-1} \left[\ell! m! \sum_{|\alpha|=\ell, |\beta|=m} a_{\alpha, \beta} \frac{\bar{z}^\alpha z'^\beta}{(\alpha! \beta!)^{1/2}} \right].$$

Considérons le polynôme dans la parenthèse comme un élément de $(\hat{\odot}_\ell \bar{Z}) \hat{\otimes} (\hat{\odot}_m Z)$, et on voit que :

$$(\Theta\Phi)(\bar{z}, z') = \sum_{\ell \leq M, m \leq N} \frac{(D_{\bar{z}}^\ell D_{z'}^m, \Theta\Phi)(0)}{\ell! m!}$$

et la norme de $(D_{\bar{z}}^\ell D_{z'}^m, \Theta\Phi)(0)$ dans cet espace est égale à

$$\|D_{\bar{z}}^\ell D_{z'}^m, \Theta\Phi(0)\|^2 \\ = \ell! m! \sum_{|\alpha|=\ell, |\beta|=m} (\alpha! \beta!)^{-1} |a_{\alpha, \beta}|^2 \frac{\alpha! \beta!}{|\alpha!| |\beta!|} = \sum_{|\alpha|=\ell, |\beta|=m} |a_{\alpha, \beta}|^2.$$

On obtient alors

$$\|\Theta\Phi\|_{s, t}^2 = \sum_{\ell \leq M, m \leq N} \left(\sum_{|\alpha|=\ell, |\beta|=m} |a_{\alpha, \beta}|^2 \right) \frac{(1+\ell)^s (1+m)^t}{\ell! m!} \\ = \sum_{\ell \leq M, m \leq N} |a_{\alpha, \beta}|^2 (1+|\alpha|)^s (1+|\beta|)^t = \|\Phi\|_{s, t}^2.$$

D'où l'isométrie par prolongement.

PROPOSITION 8. - Soit $a \in Z$. L'application

$$P(Z)_{\nu'_n} \xrightarrow{U_a} \text{Exp}(\bar{Z} \times Z) \\ f(\bar{z}, z)_{\nu'_n} \mapsto f(\bar{z} - \bar{a}, z - a) \exp\left\{\frac{(z|a)}{2} + \frac{(a|z)}{2} - \|a\|^2\right\}_{\nu'_n}$$

se prolonge par continuité en un endomorphisme biunivoque et bicontinu de $M^{s, t}(Z)$ pour tout s, t réels.

Remarque 9. - L'application U_a , $a \in Z$, est une isométrie de $L^2(Z, \nu'_n)_{\nu'_n}$; en effet

$$\|U_a f_{\nu'_n}\|^2 = \Pi^{-n} \int_Z |f(\bar{z} - \bar{a}, z - a)|^2 \exp\left\{\frac{(z|a)}{2} + \frac{(a|z)}{2} - \|a\|^2 - \|z\|^2\right\} d^2 Z \\ = \Pi^{-n} \int_Z |f(\bar{z} - \bar{a}, z - a)|^2 \exp(-\|z - a\|^2) d^2 Z = \|f_{\nu'_n}\|_2^2.$$

Remarque 10. - Soient $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2$. On a, pour tout s, t réels, une isométrie :

$$F^{s, t}(\bar{Z} \times Z) \longrightarrow F^{s+\text{Re } \omega_1, t+\text{Re } \omega_2}(\bar{Z} \times Z) \\ f(z, z') \mapsto \sum_{\ell, m} \frac{D_{\bar{z}}^\ell D_{z'}^m, f(0; \bar{z}, z')}{\ell! m!} \frac{(1+\ell)^{-\omega_1/2}}{(1+m)^{-\omega_2/2}}$$

donc, par Θ , les isométries :

$$\Lambda_{\omega_1, \omega_2} : M^{s, t}(Z) \longrightarrow M^{s+\text{Re } \omega_1, t+\text{Re } \omega_2}(Z).$$

En utilisant les isométries $\Lambda_{\omega_1, \omega_2}$ on prouve une propriété d'interpolation similaire à celle-ci, prouvée dans [1] pour les espaces $K^s(X)$.

LEMME 11. - Soient s, t entiers positifs, alors il existe $C(s, t)$ constante positive telle que :

$$\|U_a f\|_{s,t}^2 \leq C(s, t) \|f\|_{s,t}^2$$

pour tout $f \in M^{s,t}(Z)$.

Preuve. - Comme U_a est une isométrie de $L^2(Z, \nu'_n) \nu'_n$, alors si $f \in M^{s,t}(Z)$, $U_a f \in M^{s,t}(Z)$. On rapporte Z à une base orthonormée $e_1, e_2, \dots, e_n$ telle que a soit colinéaire à e_1 . Si λ et μ sont deux multi-indices de longueur n , on note

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda') \quad \text{et} \quad \partial_z^\lambda = \partial_{z_1}^{\lambda_1} \partial_{z'}^{\lambda'}$$

Calculons alors l'expression

$$\begin{aligned} & \partial_z^\lambda \partial_{\bar{z}}^\mu (U_a f) \\ &= \left[\sum_{\substack{0 \leq i \leq \lambda_1 \\ 0 \leq j \leq \mu_1}} \binom{\lambda_1}{i} \binom{\mu_1}{j} \frac{\bar{a}^i a^j}{4} \partial_{z_1, z'}^{\lambda_1 - i, \lambda'} \partial_{\bar{z}_1, \bar{z}'}^{\mu_1 - j, \mu'} f(z - a, \bar{z} - \bar{a}) \right] \exp\left\{\frac{a\bar{z}_1 + \bar{a}z_1}{2} - \|a\|^2\right\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\|\partial_z^\lambda \partial_{\bar{z}}^\mu U_a f\|^2 \leq 2^{\ell-2} 2^m \sum_{\substack{0 \leq i \leq \lambda_1 \\ 0 \leq j \leq \mu_1}} \binom{\lambda_1}{i} \binom{\mu_1}{j} a^{2j} \bar{a}^{2i} \|\partial_{z_1, z'}^{\lambda_1 - i, \lambda'} \partial_{\bar{z}_1, \bar{z}'}^{\mu_1 - j, \mu'} f\|^2$$

donc

$$\begin{aligned} & \sum_{|\lambda|=s, |\mu|=t} \|\partial_z^\lambda \partial_{\bar{z}}^\mu U_a f\|^2 \frac{|\lambda|! |\mu|!}{\lambda! \mu!} \\ & \leq 2^{\ell-2} 2^m \sum_{\substack{i, \lambda_1, \lambda' \\ j, \mu_1, \mu'}} \binom{\lambda_1}{i} \binom{\mu_1}{j} \bar{a}^{2i} a^{2j} \|\partial_{z_1, z'}^{\lambda_1 - i, \lambda'} \partial_{\bar{z}_1, \bar{z}'}^{\mu_1 - j, \mu'} f\|^2 \frac{|\lambda|! |\mu|!}{\lambda! \mu!} \\ & \leq 2^{\ell-2} 2^m m! \ell! \sum_{\substack{\lambda_1, i \\ \mu_1, j}} (1 + \bar{a}^2)^{\lambda_1} (1 + a^2)^{\mu_1} \|f\|_{\ell, m}^2 \\ & \leq m! \ell! 2^{\ell-2} 2^m \ell m (1 + \bar{a}^2)^\ell (1 + a^2)^m \|f\|_{\ell, m}^2. \end{aligned}$$

En sommant les inégalités pour $\ell = 0, 1, \dots, s$ et $m = 0, 1, \dots, t$, on trouve

$$\|U_a f\|_{s,t}^2 \leq C(s, t) \|f\|_{s,t}^2,$$

ce qui prouve le lemme.

Preuve de la proposition 8. - Comme $a \rightarrow U_a$ est un homomorphisme de groupe, il suffit de montrer que chaque U_a est continue.

Si s, t sont entiers positifs, il suffit d'appliquer le lemme 7.

Si s, t sont réels positifs, il suffit d'interpoler.

Si s, t sont réels négatifs, on utilise le fait que l'adjoint de l'opérateur U_a de $M^{s,t}(Z)$ est l'endomorphisme U_{-a} de $M^{-s, -t}(X)$.

2. Espaces $M^{s,t}(Z)$ si Z est de dimension quelconque.

Soit Z un espace de Hilbert complexe séparable avec conjugaison. Soit $F_u = (Z_i)_{i \in I}$ une bonne famille des s. e. v. de dimension finie de Z , c'est-à-dire une famille filtrante croissante de s. e. v. Z_i de dimension finie dont la réunion Ξ est dense dans Z . Si $i \geq j$ (i. e. $Z_j \subset Z_i$), on note s_{ij} la projection orthogonale de Z_i sur Z_j . D'où un système projectif $\Pi_u = (Z_i, s_{ij})$. Pour tout $i \in I$, s_i désigne la projection orthogonale de Z sur Z_i .

Ici on utilisera la bonne famille maximale F_m de tous les s. e. v. de dimension finie.

L'espace vectoriel $\text{Exp}_{\text{cyl}}(Z)$ est défini comme l'espace des fonctions cylindriques f sur Z , s'écrivant $f = s_i \circ f_i$, $i \in I$, avec $f_i \in \text{Exp}(Z_i)$. On le munit de la topologie de limite inductive :

$$\text{Exp}_{\text{cyl}}(Z) = \liminf(\text{Exp } Z_i, \theta_i) \quad [4].$$

Son antidual est noté $'\text{Exp}_{\text{cyl}}(Z)$. Si $T \in '\text{Exp}_{\text{cyl}}(Z)$, alors T est donc définie par une famille cohérente $(T_i)_{i \in I}$ des antifonctionnelles analytiques $T_i \in '\text{Exp}(Z_i)$.

Soit $P_{\text{cyl}}(Z)$ l'espace des fonctions polynômiales et cylindriques sur Z . Alors $P_{\text{cyl}}(Z)$ est dense dans $\text{Exp}_{\text{cyl}}(Z)$.

Sur le triplet $\text{Exp}_{\text{cyl}}(\bar{Z} \times Z) \hookrightarrow L^2(Z, \nu) \hookrightarrow '\text{Exp}_{\text{cyl}}(\bar{Z} \times Z)$, on définira les espaces $M^{s,t}(Z)$.

DÉFINITION 12. - Pour tout s, t réels fixés, $M^{s,t}(Z)$ désigne l'espace des antifonctionnelles analytiques $T \in '\text{Exp}_{\text{cyl}}(Z)$, $T = (T_i)_{i \in I}$ telles que $T_i \in M^{s,t}(Z_i)$ pour tout i et

$$\|T\|_{s,t} = \sup_i \|T_i\|_{s,t} < +\infty.$$

DÉFINITION 13. - Pour tout s, t réels, on définit $F^{s,t}(\bar{Z} \times Z)$ comme l'espace des fonctions entières f sur $\bar{Z} \times Z$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que

$$\|f(\bar{z}, z)\|_{s,t}^2 = \sum_{\ell, m \in \mathbb{N}} \frac{\|D_{\bar{z}}^{\ell} D_z^m f(0; \bar{z}, z)\|^2 (1+\ell)^s (1+m)^t}{\ell! m!} < +\infty,$$

où $\|D_{\bar{z}}^{\ell} D_z^m f(0)\|$ désigne la norme de $D_{\bar{z}}^{\ell} D_z^m f(0; \bar{z}, z)$ dans $(\hat{\odot}_{\bar{z}} \bar{Z}) \hat{\otimes} (\hat{\odot}_m Z)$.

Remarquons que les fonctions polynômiales cylindriques sont denses dans cet espace.

PROPOSITION 14. - Pour tout s, t réels, la transformation Θ réalise une isométrie de $M^{s,t}(Z)$ sur $F^{s,t}(\bar{Z} \times Z)$.

Preuve. - La transformation Θ est définie par la formule

$$(\Theta T)(\bar{z}', z) = \int_{\bar{Z} \times Z} \exp(-\bar{u}u + \bar{z}u + zu) dT(\bar{u}, u).$$

Comme les exponentielles sont cylindriques, la formule a un sens si $\dim Z = +\infty$.

la restriction $(\mathcal{O})_j$, de $\mathcal{O}T$ sur $\bar{Z} \times Z$ est donnée par

$$(\mathcal{O}T)_j(\bar{z}, z) = \int_{\bar{Z} \times Z} \exp(-\bar{u}u + \bar{z}\bar{u} + zu) dT_j(\bar{u}, u).$$

Vu la proposition 7, on a :

$$\forall j, T_j \in M^{s,t}(Z_j) \text{ et } \|\mathcal{O}_j T_j\|_{s,t} = \|T_j\|_{s,t},$$

donc

$$\|\mathcal{O}T\|_{s,t} = \sup_j \|(\mathcal{O}T)_j\|_{s,t} = \sup_j \|T_j\|_{s,t} = \|T\|_{s,t}.$$

Réciproquement, pour toute $f \in F^{s,t}(\bar{Z} \times Z)$, les profonctionnelles analytiques $T_j = \mathcal{O}_j^{-1} f_j$ (où f_j est la restriction de f à $\bar{Z}_j \times Z_j$) sont cohérentes [7], et vérifient :

$$\|T\|_{s,t} = \sup_j \|T_j\| = \sup_j \|\mathcal{O}_j f_j\| = \|f\|.$$

COROLLAIRE 15. - Par transport de structure on obtient, pour tout $s, t \in \mathbb{R}$,

- (a) $M^{s,t}(Z)$ est un espace de Hilbert,
 (b) L'espace $P_{\text{cyl}}(Z)$ des fonctions polynômiales cylindriques est dense dans $M^{s,t}(Z)$.

Quels que soient ℓ et m entiers, on pose $Z^\ell = \bigcirc_{\ell} Z$ et $\bar{Z}^m = \bigcirc_{\bar{m}} \bar{Z}$.

PROPOSITION 16. - L'application $f \mapsto D_Z^\ell D_Z^m f$, définie sur $\text{Exp}_{\text{cyl}}(Z)$ à valeurs dans $\text{Exp}_{\text{cyl}}(Z) \hat{\otimes} Z^\ell \hat{\otimes} \bar{Z}^m$, se prolonge en un opérateur linéaire continu, qu'on note $D_Z^\ell D_Z^m$ de $M^{s,t}(Z)$ dans $M^{s-\ell, t-m}(Z) \hat{\otimes} Z^\ell \hat{\otimes} \bar{Z}^m$.

Preuve. - On va prouver le résultat pour $f \in \text{Exp}_{\text{cyl}}(Z)$, dont le développement en polynômes d'Hermite est fini.

Soit $f = \sum_{\alpha, \beta, |\alpha| \leq A, |\beta| \leq B} a_{\alpha, \beta} H_{\alpha, \beta}$ avec $\sum |a_{\alpha, \beta}|^2 (1+|\alpha|)^s (1+|\beta|)^t < +\infty$. On a alors :

$$D_Z^\ell D_Z^m f = \sum_{|\lambda|=\ell, |\mu|=m} \frac{|\lambda|! |\mu|!}{\lambda! \mu!} \left(\sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} H_{\alpha-\lambda, \beta-\mu} \left(\frac{\alpha! \beta!}{(\alpha-\lambda)! (\beta-\mu)!} \right)^{1/2} \right) e_{\ell, m}$$

avec

$$e_{\ell, m} = \frac{e_1^{\lambda_1} \circ \dots \circ e_n^{\lambda_n} \circ \bar{e}_1^{\mu_1} \circ \dots \circ \bar{e}_n^{\mu_n}}{(\ell! m!)^{1/2}}.$$

On déduit alors

$$\begin{aligned} \|D_Z^\ell D_Z^m f\|_{M^{s-\ell, t-m}(\hat{\bigcirc}_{\ell+m} Z)}^2 &= \sum_{|\lambda|=\ell, |\mu|=m} \frac{|\lambda|! |\mu|!}{\lambda! \mu!} \sum_{\alpha, \beta} |a_{\alpha, \beta}|^2 \frac{\alpha! \beta! (1+|\alpha|)^{s-\ell} (1+|\beta|)^{t-m}}{(\alpha-\lambda)! (\beta-\mu)!} \\ &= \sum_{\alpha, \beta} |a_{\alpha, \beta}|^2 (1+|\alpha|)^{s-\ell} (1+|\beta|)^{t-m} \sum_{|\lambda|=\ell, |\mu|=m} \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha-\lambda)! (\beta-\mu)! \lambda! \mu!} \end{aligned}$$

On remarque que [6]

$$\sum_{|\lambda|=\ell, |\mu|=m} \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha-\lambda)! (\beta-\mu)! \lambda! \mu!} = \frac{|\alpha|! |\beta|!}{(|\alpha|-\ell)! (|\beta|-m)!}$$

$$\Rightarrow m! \ell! \sum_{|\lambda|=\ell, |\mu|=m} \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha-\lambda)! \lambda! (\beta-\mu)! \mu!} = O(|\alpha|^\ell |\beta|^m),$$

ce qui donne

$$\|D_Z^\ell D_Z^m f\|_{M^{s-\ell, t-m}(Z) \hat{\otimes} (\bigodot_{\ell+m} Z)}^2 \leq C \|f\|_{s, t}^2.$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION 17. - L'application

$$\text{Exp}_{\text{cyl}}(Z) \otimes (\bigodot_{m+\ell} Z) \longrightarrow \text{Exp}_{\text{cyl}}(Z)$$

$$f \longmapsto \text{div}_{m, \ell} f$$

se prolonge à un opérateur linéaire continu, défini sur $M^{s, t}(Z) \hat{\otimes} (\bigodot_{\ell+m} Z)$ à va-
leurs dans $M^{s-m, t-\ell}(Z)$.

Preuve. - Si

$$f = \sum_{|\lambda|=\ell, |\mu|=m} f_{\lambda, \mu}(\bar{z}, z) e_{\lambda, \mu}, \text{ où } f_{\lambda, \mu} \in \text{Exp}_{\text{cyl}}(Z)$$

et où un nombre fini de termes sont non nuls, on a :

$$\|f\|_{M^{s, t} \hat{\otimes} (\bigodot_{\ell+m} Z)}^2 = \sum_{|\lambda|=\ell, |\mu|=m} \|f_{\lambda, \mu}\|_{s, t}^2 \frac{\lambda! \mu!}{|\lambda|! |\mu|!}.$$

D'autre part, en utilisant le développement en polynômes d'Hermite de

$$f_{\lambda, \mu} = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta}^{\lambda, \mu} H_{\alpha, \beta}(\bar{z}, z),$$

on trouve

$$\begin{aligned} \text{div}_{m, \ell} f &= \sum_{|\lambda|=\ell, |\mu|=m} \partial_z^\lambda \partial_{\bar{z}}^\mu f_{\lambda, \mu} \\ &= \sum_{\substack{|\gamma| \geq m \\ |\delta| \geq \ell}} H_{\gamma, \delta} \sum_{\substack{\gamma=\alpha+\mu, |\mu|=m \\ \delta=\beta+\lambda, |\lambda|=\ell}} \frac{a_{\alpha, \beta}^{\lambda, \mu}}{(-1)^{\lambda+m}} \left(\frac{(\alpha+\mu)! (\beta+\lambda)!}{\alpha! \beta!} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Si on pose $c_{\alpha, \beta}^{\lambda, \mu} = a_{\alpha, \beta}^{\lambda, \mu} \left(\frac{\lambda! \mu!}{m! \ell!} \right)^{1/2}$, on a

$$\|f\|_{M^{s, t} \hat{\otimes} (\bigodot_{\ell+m} Z)}^2 = \sum_{|\lambda|=\ell, |\mu|=m} \sum_{\alpha, \beta} |c_{\alpha, \beta}^{\lambda, \mu}|^2 (1+|\alpha|)^s (1+|\beta|)^t.$$

D'autre part,

$$\|\text{div}_{m, \ell} f\|_{s-m, \ell-t}^2 = \sum_{|\gamma| \geq m, |\delta| \geq \ell} (1+|\gamma|)^{s-m} (1+|\delta|)^{t-\ell} (\dots)$$

avec

$$\begin{aligned} (\dots) &= \sum_{\substack{\gamma=\alpha+\mu, |\mu|=m \\ \delta=\beta+\lambda, |\lambda|=\ell}} |c_{\alpha, \beta}^{\lambda, \mu}|^2 (1+|\alpha|)^s (1+|\beta|)^t \\ &\quad \times \sum_{\substack{\gamma=\alpha+\mu \\ \delta=\beta+\lambda}} \frac{(1+|\gamma|)^{s-m} (1+|\delta|)^{t-\ell}}{(1+|\alpha|)^s (1+|\beta|)^t} \left[\frac{(\alpha+\mu)! (\beta+\lambda)!}{\alpha! \beta! \gamma! \delta!} \right]^{1/2} m! \ell!. \end{aligned}$$

Majorons l'expression :

$$\sum_{\gamma=\alpha+\mu, \delta=\beta+\lambda} \frac{m! \ell! (\alpha+\mu)! (\beta+\lambda)! (1+|\gamma|)^{s-m} (1+|\delta|)^{t-\ell}}{\alpha! \beta! \lambda! \mu! (1+|\alpha|)^s (1+|\beta|)^t}$$

Notons que $\sum_{\gamma=\alpha+\mu, |\mu|=m, \delta=\beta+\lambda, |\lambda|=\ell} \frac{(\alpha+\mu)! (\beta+\lambda)!}{\alpha! \beta! \lambda! \mu!}$ représente le coefficient des termes en $x^m x^\ell$ dans le produit $(1+x)^{\gamma_1} (1+x)^{\gamma_2} \dots (1+x)^{\gamma_n} (1+x)^{\delta_1} \dots (1+x)^{\delta_n}$ quand $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ et $|\gamma| = n_1 \geq m$, $|\delta| = n_2 \geq \ell$. Ce coefficient est égal à $n_1! n_2! / (n_1 - m)! m! (n_2 - \ell)! \ell!$ et on est amené à majorer l'expression :

$$\frac{(1+n_1)^{s-m} (1+n_2)^{t-\ell}}{(1+n_1-m)^s (1+n_2-\ell)^t} \frac{n_1! n_2!}{(n_1-m)! m! (n_2-\ell)! \ell!} \leq \frac{(1+n_1)^s}{(1+n_1-m)^s} \frac{(1+n_2)^t}{(1+n_2-\ell)^t} \leq \sup(1, (1+m)^s) \sup(1, (1+\ell)^t) = c_{s,t,\ell,m}.$$

Finalement on trouve l'inégalité :

$$\|\operatorname{div}_{\ell,m} f\|_{M^{s-m,t-\ell}(Z)}^2 \leq c_{s,t,\ell,m} \|f\|_{M^{s,t}(Z) \hat{\otimes} (\hat{\odot}_{\ell,m} Z)}^2,$$

qui prouve la proposition.

PROPOSITION 18. - Soit $a \in Z$. L'application

$$U_a : f(\bar{z}, z)v' \mapsto f(\bar{z} - \bar{u}, z - u) \exp\{(z|a)/2 + (a|z)/2 - \|a\|^2\}v',$$

définie sur $P_{\text{cyl}}(Z)$ à valeurs dans $\text{Exp}_{\text{cyl}}(Z)$, se prolonge par continuité en un endomorphisme biunivoque et bicontinu de $M^{s,t}(Z)$.

Preuve. - Supposons Z muni d'une bonne famille maximale. Soit $\tilde{P} = P \circ S_i$ un polynôme cylindrique de base Z_i . Quitte à remplacer Z_i par le s. e. v. engendré par Z_i et a , on peut supposer que $a \in Z_i$. On note que

$$\tilde{Q}(\bar{z}, z) = \tilde{P}(z - u, z - u) \exp\{(a|z)/2 + (z|a)/2 - \|a\|^2\}$$

est une fonction cylindrique de base Z_i ; c'est-à-dire $\tilde{Q}(\bar{z}, z) = Q \circ S_i$.

D'après la proposition 8, on a, pour tout s, t réels,

$$\|\tilde{Q}\|_{s,t}^2 \leq C(s, t, a) \|P\|_{s,t}^2$$

donc

$$\|U_a \tilde{P}\|_{s,t}^2 = \|\tilde{Q}\|_{s,t}^2 \leq C(s, t, a) \|P\|_{s,t}^2,$$

d'où le résultat puisque les polynômes cylindriques sont denses dans $M^{s,t}(Z)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KRÉE (M.). - Propriété de trace en dimension infinie d'espaces du type Sobolev, Bull. Soc. math. France, t. 105, 1977, p. 141-163.
- [2] KRÉE (P.). - Méthodes holomorphes et méthodes nucléaires en analyse de dimension infinie et en théorie quantique de champs, "Conférence on measures on vector spaces [1977, Dublin]". - Berlin, Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics) (à paraître).

- [3] KRÉE (P.). - Application des méthodes variationnelles aux équations aux dérivées partielles sur un espace de Hilbert, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, 1974, Série A, p. 753-755.
- [4] KRÉE (P.). - Holomorphie et théorie des distributions en dimension infinie, "Infinite dimensional holomorphy and applications", p. 277-296. - Amsterdam, North-Holland publishing company, 1977 (North-Holland Mathematics Studies, ; Notas de Matematica,).
- [5] LASCAR (B.). - Une condition nécessaire et suffisante d'ellipticité pour une classe d'opérateurs différentiels en dimension infinie, Comm. partial diff. Equations, t. 2, 1977, p. 31-67.
- [6] LASCAR (B.). - Propriétés locales d'espaces de type Sobolev en dimension infinie, Comm. partial diff. Equations, t. 1, 1976, p. 561-584.
- [7] Séminaire Paul KRÉE : Equations aux dérivées partielles en dimension infinie, 1re année, 1974/75. - Paris, Secrétariat mathématique, 1975.

Michel MARIAS
47-B boulevard Jourdan
75015 PARIS
