Paul Krée

Probabilités cylindriques et processus linéaires

Séminaire Paul Krée, tome 1 (1974-1975), exp. n° 4, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1974-1975__1__A5_0>

Séminaire Paul KRÉE
Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie
1re année, 1974/75, n° 4, 17 p.

PROBABILITÉS CYLINDRIQUES ET PROCESSUS LINÉAIRES

par Paul KRÉE

1. Introduction.

Nous allons étudier des prodistributions particulières, à savoir les probabilités cylindriques ou promesures de probabilité. L'importance de ce cas particulier provient de la possibilité d'une interprétation probabiliste duale : Si (X , U) est un couple d'espaces vectoriels (e. v.) réels en dualité séparante, X et U étant munis de la topologie faible ; à toute promesure de probabilité m sur X, on peut associer une application linéaire de l'espace U dans un espace de variables aléatoires (v. a.).

(1.1) Une telle application est appelée un processus linéaire basé sur U. Cette dualité se prolonge dans toute la théorie. Par exemple, à la notion d'image d'une promesure de probabilité par une application linéaire ℓ, il correspond la notion duale de composition d'un processus linéaire avec l'application transposée de ℓ. Cette situation est analogue à celle de la théorie des fonctions généralisées où la plupart des opérations sur les fonctions généralisées peuvent être définies en transposant des opérations sur les espaces de fonction d'épreuve. D'ailleurs, ceci n'est pas un hasard. En effet, la théorie des fonctions généralisées a été inventée par S. SOBOLEV et L. SCHWARTZ parce que la théorie usuelle des fonctions ne permet pas de résoudre certaines équations aux dérivées partielles : problème de Cauchy pour l'équation des ondes par exemple. Une distribution T sur R n'est plus caractérisée comme le serait une fonction par la famille des nombres $T(t)$, mais par la forme linéaire $\varphi \longmapsto (T , \varphi)$ sur $\mathcal{D}(\underset{\sim}{R})$; en particulier, une fonction localement intégrable f définit la forme linéaire,

(1.1.1) $$\varphi \longmapsto \int f(t)\, \varphi(t)\, dt .$$

Or l'étude des applications conduit à définir des "processus" qui ne sont pas des processus stochastiques usuels, c'est-à-dire des familles (X_t) de variables aléatoires indexées par le temps t. Ceci a amené GEL'FAND [2] à développer la théorie des processus généralisés sur $\underset{\sim}{R}$. Un tel processus généralisé est défini par une application linéaire de $\mathcal{D}(\underset{\sim}{R})$ dans un espace de variables aléatoires. En particulier, soit un processus classique $(X_t)_t$ représenté par une application f de $\underset{\sim}{R}$ dans l'espace des fonctions mesurables sur un espace probabilisé Ω. Si f est dans la classe d'équivalence d'une application f localement intégrable de $\underset{\sim}{R}$ dans une classe de Lebesgue $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, alors on peut associer au processus $(X_t)_t$ le processus généralisé

(1.1.2) $$\varphi \longmapsto \int f(t)\, \varphi(t)\, dt ,$$

formule semblable à (1.1.1). L'idée d'introduire les processus linéaires, ou applications linéaires d'un e. v. dans un espace de v. a., et d'introduire la probabilité cylindrique normale canonique d'un Hilbert, est due à I. E. SEGAL [5].

Notons cependant qu'un processus usuel n'est pas un processus généralisé même si $f \in L^1_{loc}(\underset{\sim}{R}, L^p(\Omega))$. En effet, le processus généralisé, associé à f , ne change pas si l'on modifie les X_t pour t , décrivant une partie négligeable N de $\underset{\sim}{R}$. Il ne change pas non plus si l'on modifie les X_t en dehors d'un ensemble de probabilité nulle de Ω .

(1.2) DÉFINITION : Dans tout ce qui suit, (X, U) est un couple d'e. v. réels en dualité séparante ; X et U sont en général munis des topologies faibles $\sigma(X, U)$ et $\sigma(U, X)$, notées σ pour simplifier.

(1.3) Rappels et notations.

(a) Le dual de l'e. v. (X, σ) est U : $(X, \sigma)' = U$;

(b) Une topologie localement convexe θ sur X est dite compatible avec la dualité avec U si $(X, \theta)' = U$;

(c) On munit X du système projectif $\Pi_c(X) = \{X_i, s_{ij}\}$, où $X_i = X/A_i$, A_i décrivant la bonne famille $F_c(X)$ des sous-espaces vectoriels formés de codimension finie ;

(d) Pour tout i , $U_i = A_i^{\perp} = \{u \in U ; (x, u) = 0 \text{ pour tout } x \in A_i\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de U . Lorsque A_i décrit $F_c(X)$, $U_i = A_i^{\perp}$ décrit la famille $F_c(X)^{\perp}$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de X .

(e) Si $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé, on suppose la tribu $\mathcal{T}$ complète, et l'on note $L^0(\Omega)$ l'espace des classes d'équivalences d'applications mesurables de Ω dans $\underset{\sim}{R}$ qui sont égales presque sûrement, c'est-à-dire P-presque partout. Pour $0 < p \leqslant \infty$, on définit de même la classe $L^p(\Omega)$ des classes d'équivalence des v. a. ayant un moment d'ordre p .

(1.4) DÉFINITION.

(a) Un processus linéaire basé sur l'e. v. U , relatif à l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est une application linéaire R de U dans $L^0(\Omega)$;

(b) Soit R' un autre processus linéaire basé sur U , relatif à un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{T}', P')$. On dit que R et R' sont isonomes si R et R' associent à toute partie finie $(u_1 \ldots u_n)$ de U deux ensembles isonomes de variables aléatoires, autrement dit les v. a. vectorielles $(Ru_1 \ldots Ru_n)$ et $(R' u_1 \ldots R' u_n)$ ont même loi ;

(c) La restriction du processus R à U sous-espace vectoriel U' de U est la restriction à U' de l'application linéaire R ;

(1.5) DÉFINITION. - Soient (X , U) un couple d'espaces vectoriels en dualité séparante, θ une topologie localement convexe sur X telle que $U = (X , \theta)'$, et $\mathcal{B}_\theta$ la tribu borélienne correspondante, on dit qu'une v. a.

$$f : (\Omega , \mathcal{T}) \longrightarrow (X , \mathcal{B}_\theta)$$

décompose le processus linéaire R basé sur U et relatif à $(\Omega , \mathcal{T} , P)$ si, pour tout u de U, on a p. s.

$$R(u) = u \circ f$$

on écrira

$$u \circ f = (f , u) .$$

Plus explicitement, il est clair que toute application mesurable

$$f : (\Omega , \mathcal{T}) \longrightarrow (X , \mathcal{B}_\theta)$$

définit un processus linéaire $u \longmapsto u \circ f$. Nous verrons que la réciproque est fausse.

Un problème fondamental de la théorie est de savoir quand un processus linéaire est décomposé. En effet, du point de vue probabiliste, si on ne s'intéresse qu'à ce processus linéaire, on peut alors remplacer $(\Omega , \mathcal{T} , P)$ par $(X , \mathcal{B}_\theta , f(P))$ et les v. a. Ru par les applications (u , f). Et du point de vue pratique (heuristique), faire des épreuves sur le processus linéaire revient alors à choisir un point w de X, au hasard, selon la loi P. Examinons d'abord un cas particulier.

(1.6) LEMME. - Tout processus linéaire R_i, basé sur un espace de dimension finie U_i, est décomposé par une et une seule v. a. f_i à valeurs dans le dual U_i' de U_i.

En effet, si f existe, on doit avoir

(1.6.1) $$u \in U_i , \qquad R_i u = (u , f) .$$

Rapportons U_i à une base $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$, et soit $e_1 \dots e_n$ la base duale, ce qui donne une identification

(1.6.2) $$\begin{aligned} U_i' &\xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^n \\ \textstyle\sum_{i=1}^n x_i e_i &\longrightarrow (x_i)_i \end{aligned}$$

L'application $\tilde{f} = f \circ \alpha$ est définie par n application $f_i^1 \dots f_i^n$. De (1.6.1), il résulte que :

$$f_i^1 = R_i(\varepsilon_1) \dots ; \quad f_i^n = R_i(\varepsilon_n) ,$$

et l'application $\alpha^{-1} \circ f$ décompose R_i.

(1.7) Probabilité cylindrique : Si R est un processus linéaire, basé sur un espace vectoriel U de dimension quelconque, on peut appliquer le lemme précédent à $R_i = R\restriction U_i$, $U_i \in F_c(X)^\perp$. On rappelle que la transposée de l'injection canonique de U_i dans U est la surjection s_i de X sur U_i, U'_i étant identifié au quotient $X_i = X/U_i$. Si U_i et U_j sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de X, le lemme (1.6) montre qu'il existe des applications $f_i : \Omega \longrightarrow X_i$ et $f_j : \Omega \longrightarrow X_j$.

(1.8) LEMME. - La famille des f_i est cohérente au sens suivant : Si $U_i \supset U_j$, alors $f_j = s_{ij} \circ f_i$ où s_{ij} est la surjection canonique de $X_i = X/U_i$ sur $X_j = X/U_j$.

En effet, soit $\dim U_j = n$ et $\dim U_i = p$. Rapportons U_j à une base $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$, que l'on complète par $\varepsilon_{n+1} \ldots \varepsilon_{p+n}$ de façon à obtenir une base de U_i. Soit $e_1 \ldots e_{n+p}$ la base duale de X_i. Identifiant ainsi X_i à $\underset{\sim}{R}^{n+p}$ et X_j à $\underset{\sim}{R}^p$, on voit que s_{ij} est la projection canonique $(x_1 \ldots x_{n+p}) \longrightarrow (x_1 \ldots x_n)$. Comme $f_i = (R\varepsilon_1 \ldots R\varepsilon_{n+p})$, $s_{ij} \circ f_i$ est $(R\varepsilon_1 \ldots R\varepsilon_n) = f_j$.

Vu la transitivité de la notion d'image d'une mesure, on voit que les lois de probabilités $m_i = f_i(P)$ des v. a. f_i sont cohérentes au sens suivant : $m_j = s_{ij}(m_i)$ pour toute surjection canonique $s_{ij} : X_i \longrightarrow X_j$.

(1.9) PROPOSITION.

(a) La donnée d'un processus linéaire R basé sur l'e. v. U, en dualité séparante avec X, est équivalente à la donnée d'un système cohérent d'applications mesurables $f_i : \Omega \longrightarrow X_i$;

(b) La donnée du processus linéaire R entraîne la donnée d'une promesure de probabilité $m = (m_i)$ sur X, telle que, pour tout i, $m_i = f_i(P)$. Si R et R' sont deux processus isonomes basés sur U, les promesures de probabilité correspondantes m et m' sont identiques.

(c) Etant donnée une promesure de probabilité quelconque $m = (m_i)$ sur X, en dualité avec U, on peut trouver un processus linéaire R basé sur U tel que l'on ait $m_i = f_i(P)$ pour tout i, (f_i) étant le système cohérent des applications $f_i : \Omega \longrightarrow X_i$, qui caractérisent R.

Preuve.

(a) et (b) sont clairs. Soit $m = m_i$ une promesure de probabilité sur X, et cherchons à lui associer un processus linéaire R. Soit $(\varepsilon_j)_j$ une base algébrique de U. La restriction R_i de R à un sous-espace vectoriel U_i de dimension finie est caractérisée par la famille finie Φ_i des v. a. $R(\varepsilon_k)$, k décrivant la partie finie de J correspondant aux vecteurs $(\varepsilon_j)_{j \in J}$ formant une base de U_i. Or la loi conjointe des $R\varepsilon_k$, $(k \in \Phi_i)$, est la loi m_i. Lorsque i varie, ces lois conjointes forment un système de lois sur les espaces $R^{\operatorname{card} \Phi_i}$, qui sont compatibles au sens d'un théorème bien connu de Kolmogorov. D'après ce théorème, les $R\varepsilon_i$ existent ; et par conséquent, le processus linéaire R existe.

(1.10) Remarque.

(a) Si l'on examine la preuve de (1.9.c), on voit que l'on a identifié par le choix d'une base, U à $R^{(I)}$, espace des suites de nombres réels indexés dans I , mais nuls sauf un nombre fini. On sait que le dual algébrique de $R^{(I)}$ est $\underset{\sim}{R}^{i}$. D'autre part, on a un plongement

$$X \longrightarrow \underset{\sim}{R}^{I}$$

$$X \longmapsto (x \ , \ \varepsilon_i)_i$$

et la probabilité construite P était une probabilité sur $\underset{\sim}{R}^{I}$. Autrement dit, une probabilité cylindrique est représentée en général par une vraie probabilité P sur le dual algébrique de U

$$\begin{array}{c} X \subset U^* \\ \vdots \\ U \end{array}$$

mais cette probabilité n'est pas portée en général par la partie X de U^* .

(b) Soit (X , U) un couple d'espaces vectoriels réels en dualité, et soit m une mesure de probabilité sur une tribu $\mathcal{T}$ de X contenant l'algèbre de Boole $\mathfrak{A}$ des cylindres. Alors pour toute surjection canonique $s_i \ : \ X \longrightarrow X_i$, on peut poser $\mu_i = s_i(m)$. On définit ainsi une promesure de probabilité $\mu = (\mu_i)$ sur X . Si $\mathfrak{A}$ engendre $\mathcal{T}$, alors $\mu = 0$ entraîne $m = 0$; et l'application $m \longrightarrow \mu$ est une injection des probabilités sur $\mathcal{T}$ dans l'ensemble des promesures sur X .

2. Transformation de Fourier.

(2.11) DÉFINITION. - Soit R un processus linéaire basé sur un e. v. réel U . La transformée de Fourier de R est la fonction :

$$U \longrightarrow \underset{\sim}{C}$$

$$u \longmapsto \mathcal{E}(\exp(- iRu)$$

(2.12) Remarques préliminaires :

(a) Pour tout sous-espace vectoriel U_i de dimension finie de U , on a :

$$\hat{R}|U_i \ : \ \widehat{R|U_i}$$

(b) En particulier, si U_i est engendré par un vecteur $\varepsilon_1 \neq 0$

$$(\hat{R}|U_i)(\lambda\varepsilon_1) = \mathcal{E}(\exp[- iR(\lambda\varepsilon_1)]) = \mathcal{E}[\exp(- i\lambda(R\varepsilon_1))]$$

Autrement dit, $\hat{R}|\varepsilon_1 \underset{\sim}{R}$ est la transformée de Fourier de la loi de la v. $R\varepsilon_1$.

(c) Plus généralement, si U_i admet une base $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$,

$$(\hat{R}|U_i)(\textstyle\sum_1^n \lambda_j \ \varepsilon_j) = \mathcal{E}[\exp(- iR(\sum \lambda_j \ \varepsilon_j))] = \mathcal{E}[\exp(- i \sum \lambda_j \ R\varepsilon_j)] \ .$$

Donc, $\hat{R}|U_i$ est la transformée de Fourier de la loi conjointe des v. a.

$R\varepsilon_1 \dots R\varepsilon_n$. Or cette loi a été notée m_i dans (1.9.c). Donc, on a le résultat suivant.

(2.13) PROPOSITION. - Soit m une promesure de probabilité sur X . Alors la T. F. d'un processus linéaire quelconque de la classe d'isonomie de m coïncide avec la T. F. de m .

(2.14) Nous utilisons deux propriétés classiques :

(a) Soient X_i et X_j deux espaces vectoriels de dimension finie et d'une application linéaire de X_i dans X_j . Soient m' et m'' des lois de probabilité sur X_i et X_j . Alors $\ell(m') = m''$ si, et seulement si, $\hat{m}'' = \hat{m}' \circ \ell'$;

(b) Soit X_i un e. v. de dimension finie. Alors, pour qu'une fonction complexe Φ sur X_i' soit la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité sur X_i , il faut et il suffit que Φ vérifie les trois conditions suivantes :

Φ continue ;

$\Phi(0) = 1$;

Φ définie positive : $\forall\, n$, $\forall\, x_1 \dots ,\ x_n \in X_i$, $\forall\, a_1 \dots a_N$ complexes,

$$\sum_{i,j} a_i \overline{a}_j\, \Phi(x_i - x_j) \geq 0 .$$

La propriété (2.14.b) est le théorème de Bochmer. On a alors la proposition suivante qui prolonge naturellement (2.14.b).

(2.15) PROPOSITION. - Soit Φ une fonction à valeurs complexes définies sur U . Alors pour que Φ soit la T. F. d'un processus linéaire basé sur U , il faut et il suffit que Φ vérifie les trois conditions suivantes :

(a) La restriction de Φ à tout sous-espace U_i de dimension finie est continue ;

(b) $\Phi(0) = 1$;

(c) La restriction de Φ à tout sous-espace U_i de dimension finie est définie positive.

Démonstration : La condition est nécessaire d'après les remarques préliminaires. Montrons qu'elle est suffisante. Il suffit de montrer d'après (1.9.c) que l'on peut trouver une probabilité cylindrique $m = (m_i)$ telle que, pour tout u_i , on ait $\hat{m}_i = \hat{R}_i \restriction U_i$. Le théorème de Bochmer montre que, pour tout i , la transformée de Fourier inverse de $\hat{R} \restriction U_i$ est une loi de probabilité sur $U_i' \equiv X_i$. La propriété (2.14.a) montre que le système des lois m_i est cohérent, car la transposée d'une surjection $s_{ij} : X_i \longrightarrow X_j$ est l'injection de U_j dans U_i .

(2.16) Inégalités vérifiées par une fonction Φ vérifiant les conditions de la proposition (2.15) :

(a) Pour tout $u \in U$, $|\Phi(u)| \leqslant 1$;

(b) Quels que soient u et v dans U ,

$$|\Phi(u) - \Phi(v)|^2 \leqslant 2(\Phi(0) - \mathrm{Re}\ \Phi(u - v)) .$$

Donc, si Φ est continue à l'origine, alors Φ est uniformément continue.

Démonstration. – Remplaçons U par le sous-espace U_i engendré par les vecteurs u et v . Il existe une loi de probabilité m_i sur le dual de U_i telle que :

$$\forall\ w \in U_i \ ; \qquad \Phi(w) = \int e^{-iwx}\, dm_i(x) .$$

On a donc :

$$|\Phi(u)| \leqslant \int |e^{-iux}| dm_i(x) = \int dm_i(x) = 1 .$$

D'autre part, si a et b sont des nombres réels, on a

$$|e^{ia} - e^{ib}| = |e^{ib}|^2 . |e^{i(a-b)} - 1|^2 = (e^{i(a-b)} - 1)(e^{-i(a-b)} - 1) = 2 - 2\cos(a - b) .$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc :

$$|\Phi(u) - \Phi(v)|^2 = |\int (e^{-i(u,x)} - e^{-i(v,x)})\, dm_i(x)|^2$$

$$\leqslant \int |e^{-i(u,x)} - e^{-i(u,x)}|^2\, dm_i(x) \times \int dm_i(x)$$

$$= 2 \int ((1 - \cos x(u-v))\, dm_i(x) = 2(\Phi(0) - \mathrm{Re}\ \Phi(u-v)) .$$

(2.17) Probabilités cylindriques et vraies probabilités : Soit (X , U) un couple d'e. v. en dualité séparante. Une probabilité cylindrique m sur X est définie par une famille cohérente de probabilités m_i sur les espaces $X_i = X/U_i$. On note s_i la surjection canonique de X sur X :

(2.18) DÉFINITION et LEMME. – Pour tout i , et tout borélien β_i de X_i , l'ensemble $C = s_i^{-1}(\beta_i)$ est appelé un cylindre, et β_i est une base du cylindre C . L'application :

(2.18.1) $$C = s_i^{-1}(\beta_i) \dashrightarrow m_i(\beta_i) = \int_{\beta_i} dm_i$$

est une forme linéaire additive sur l'algèbre de Boole $\mathcal{C}(X)$ formée par les cylindres de X .

Preuve.

(a) Pour montrer que $\mathcal{C}(X)$ est une algèbre de Boole, il suffit de montrer que la réunion de deux cylindres $C = s_i^{-1}(\beta_i)$ et $D = s_j^{-1}(\beta_j)$ est un cylindre. Or β_j est un borélien de $X_j = X/U_j$. Posons $U_k = U_i + U_j$, U_i et $U_j \subset U_k$ entraîne $U_i^\perp$ et $U_j^\perp \supset U_k^\perp$. Soit $X_k = X/U_k^\perp$. Posons

$$\beta_k' = s_{ki}^{-1}(\beta_i) , \quad \beta_k'' = s_{kj}^{-1}(\beta_j) .$$

On a

$$C = (s_{kj} \circ s_k)^{-1}(\beta_i) = s_k^{-1}(\beta_k) ; \qquad D = s_k^{-1}(\beta_k'') .$$

Autrement dit, deux cylindres quelconques ont une même base. D'où

$$C \cup D = s_k^{-1}(\beta_k' \cup \beta_k'') \in \mathcal{C}(X) \ ;$$

(b) Montrons que l'application (2.18.1) est bien définie, c'est-à-dire que le second membre ne dépend pas de la base choisie pour représenter C. Supposons :

$$C = s_i^{-1}(\beta_i) = s_j^{-1}(\beta_j) \ ,$$

et montrons que $m_i(\beta_i) = m_j(\beta_j)$. On introduit encore X_k défini comme précédemment. On a

$$s_{ki}^{-1}(\beta_i) = s_{kj}^{-1}(\beta_j) \ , \qquad s_{ki}(m_k) = m_i \ , \qquad s_{kj}(m_k) = m_j \ ,$$

d'où

$$m_i(\beta_i) = m_j(\beta_j) \ .$$

C'est le point de vue ensembliste de la théorie des promesures. Du point de vue des formes linéaires, rappelons qu'une promesure de probabilité définit une forme linéaire positive sur $\mathcal{B}^0_{cyl}(X)$.

3. Relations entre certaines tribus d'un e. v. t.

Soit X un e. v. t. On étudie à présent les relations d'inclusion ou d'égalité qui existent entre la tribu $\mathcal{B}_c$ engendrée par les cylindres, la tribu $\mathcal{B}_Z$ de Baire, et la tribu borélienne $\mathcal{B}_0$. On a toujours

$$\mathcal{B}_c \subset \mathcal{B}_Z \subset \mathcal{B}_0 \ .$$

Notons que les résultats qui suivent restent vrais si l'on remplace F_c par une bonne famille quelconque.

(3.19) THÉORÈME. - Soit (K_n) une suite croissante de compacts de X, et soit $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Alors $\mathcal{B}_Z \restriction R = \mathcal{B}_c \restriction R$.

Preuve : Il suffit de montrer que $\mathcal{B}_Z \restriction R \subset \mathcal{B}_c \restriction R$.

(a) Soit $M = \mathcal{B}^0_{cyl}(X)$ la partie de $\mathcal{B}^0(X)$ formée par les fonctions $\mathcal{B}_c$ mesurables, et soit $M_m = \mathcal{B}^0_{cyl}(X)|K_n$ l'ensemble de leurs restrictions au compact K_n. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, $M_m = \mathcal{B}^0_{cyl} \restriction K_n$ est dense dans l'espace $\mathcal{C}^0(K_n)$ muni de la norme de la convergence uniforme. Comme les éléments de $\mathcal{B}^0_{cyl}(X)\restriction K_n$ sont $(\mathcal{B}_c \restriction K_n)$-mesurables, les éléments de $\mathcal{C}^0(K_n)$ sont également $(\mathcal{B}_c \restriction K_n)$-mesurables.

(b) On sait que $\mathcal{B}_Z$ est engendré par les ensembles $Z = f^{-1}(0)$, où f décrit $\mathcal{C}^0(X)$. Donc $Z \cap K \in \mathcal{B}_Z \restriction K$, et $Z \cap K = (f\restriction K)^{-1}(0) \in \mathcal{B}_c \restriction K$. Vu (a),

$$f^{-1}(0) \cap K \in \mathcal{B}_c \cap K \ .$$

Donc $\mathcal{B}_Z \restriction K \subset \mathcal{B}_c \restriction K$; soit finalement $\mathcal{B}_Z \restriction K = \mathcal{B}_c \restriction K$ pour tout compact K de X.

(c) Appliquons ce résultat aux K_n.

$$\forall B \in \mathcal{B}_Z , \quad \forall n , \quad \exists L_n \in \mathcal{B}_c , \qquad B \cap K_n = L_n \cap K_n ;$$

comme les suites K_n et $L'_m = \bigcap_{k \geq m} L_K$ sont croissantes, on a :

$$B \cap R = \bigcup (B \cap K_n) = \bigcup L_n \cap K_n = \bigcup (L'_n \cap K_n)$$
$$= (\bigcup L'_n) \cap (\bigcup K_n) = (\bigcup_n L'_n) \cap R \in \mathcal{B}_c \lceil R .$$

On a donc $\mathcal{B}_Z \lceil R \subset \mathcal{B}_c \lceil R$; soit $\mathcal{B}_Z \lceil R = \mathcal{B}_c \lceil R$.

(3.20) COROLLAIRE. - Si X est le dual d'un espace de Fréchet U , X étant muni de la topologie faible, ou de la topologie de la convergence compacte, alors $\mathcal{B}_c = \mathcal{B}_Z$.

En effet, soit V_n une suite décroissante et fondamentale de voisinages convexes équilibrés de l'origine de U . Les polaires V_n^0 de ces voisinages forment une suite croissante d'ensembles compacts de X qui recouvrent X . On peut donc appliquer le théorème (3.19) avec $R = X$.

(3.21) PROPOSITION. - Soit U un espace de Fréchet séparable, et soit X son dual, muni de la topologie faible ou de la topologie de la convergence compacte. Alors sur X , on a $\mathcal{B}_c = \mathcal{B}_Z = \mathcal{B}_0$.

Il suffit de montrer que $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_c$. Soit (U_n) un système fondamental de voisinages ouverts de zéro dans U , et soit (y_k) une suite partout dense U . Pour tout n , U_n^0 est un convexe fermé appartenant à $\mathcal{B}_c$ car :

$$U_n^0 = \{x \in X ; \quad |(x , y_i)| \leq 1 \text{ pour tout } i \text{ tel que } y_i \in U_n\} .$$

En outre, U_n^0 est un compact métrisable. Soit A fermé dans X . Posons $A_n = A \cap U_n^0$.

Dans le compact métrisable de type dénombrable U_n^0 , la topologie admet une base d'ouverts appartenant à $\mathcal{B}_c$. Le fermé A_n de U_n^0 est un G_σ , et chaque ouvert est une réunion dénombrable de la base contenue dans $\mathcal{B}_c$, donc $A_n \in \mathcal{B}_c$, et $A = \bigcup A_n \in \mathcal{B}_c$.

(3.22) LEMME. - Soit U un e. v. t. l. c. où il existe une suite dense, et soit X son dual. Soit V_n une suite de parties de X , convexes, équilibrées, $\sigma(X , U)$-fermées et équicontinues. Alors $C = \bigcup (V_n)$ appartient à la tribu de X engendrée par les ensembles cylindriques.

En effet, $V_n = (V_n^0)^0$, et V_n^0 est un voisinage de zéro dans U , convexe équilibré, σ fermé pour la topologie $\sigma(U , X)$, donc fermé pour la topologie initiale de U . Vu le lemme de HAHN-BANACH, V_n^0 est l'adhérence de son intérieur. Donc, il existe une suite $(a_n^k)_k$ de points de V_n^0 tels que :

$$V_n = (V_n^0)^0 = \bigcap_k \{x \in E ; \quad |(x , a_n^k)| < 1\} .$$

Donc $V_n \in \mathcal{B}_c$ et $C = \bigcup V_n \in \mathcal{B}_c$.

(3.23) PROPOSITION. - Soit U un e. v. t. l. c. s. de topologie t , $U' = X$ son dual, et soit Y un sous-espace vectoriel de X . S'il existe une topologie d'e. v. t' sur U , métrisable, moins fine que t , donnant Y comme dual de (U , t') , alors $Y \in \mathcal{B}_c$.

Preuve : Soit (U_n) une suite fondamentale de voisinages de 0 dans (U , t') . Chaque (U_n) étant un voisinage de 0 pour t , U_n^0 est une partie de X , convexe équilibrée pour la topologie $\sigma(X , U)$ fermée et équicontinue. On a $G = \bigcup U_n^0$. Vu le lemme (3.23), on a $G \in \mathcal{B}_c$.

(3.24) Exemples.

(a) Prenons pour U , l'espace de Schwartz $\mathcal{D}$, muni de la topologie usuelle. On a $X = \mathcal{D}'$. Montrons que $\mathcal{E}' \in \mathcal{B}_c$. En effet, $\mathcal{E}'$ est le dual de $\mathcal{D}$, muni de la topologie induite par $\mathcal{E}$.

(b) On voit de même que $\mathcal{D}'^m$, H^s , ... appartiennent à la tribu cylindrique de $\mathcal{D}'$.

(3.25) THÉORÈME (Forme ensembliste du théorème de Prokhorov). - Soit X un e. t. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole de parties de X . Soit m une forme additive (finie) positive sur $\mathcal{A}$ qui est F-tendue :

(3.25.1) $\forall A \in \mathcal{A} , \forall \varepsilon , \exists F$ fermé $\in \mathcal{A}$, avec $F \subset A$ et $m(F \setminus A) < \varepsilon$.

On suppose :

(3.25.2) $\forall \varepsilon , \exists K$ compact tel que $A \in \mathcal{A} , \ A \cap K = \emptyset \Longrightarrow m(A) < \varepsilon$,

alors m est σ-additive sur $\mathcal{A}$.

Preuve : Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe une suite $(A_n) \not\downarrow \emptyset$, $(A_n \in \mathcal{A})$, et $\alpha > 0$ tels que $m(A_n) \geq \alpha$ pour tout n . Soit $F_n \subset A_n$, tel que $m(F_n) \geq m(A_n) - 2^{-n} \alpha$ et posant $F'_n = \bigcap_{k=2} F_k$, on a, pour $n \geq 2$,

$$A_n \setminus F'_n = \bigcup_2^n (A_n \setminus F_i) \subset \bigcup_{i=2}^n (A_i - F_i) ,$$

$$m(A_n \setminus F'_n) \leq \alpha \sum_{i=2}^n 2^{-i} \leq \frac{\alpha}{2} .$$

Donc $m(F'_n) \geq \alpha/2$. Prenons $\varepsilon < \alpha/2$, et soit K tel que (3.25.2). On a $(F'_n) \downarrow \emptyset$, et la suite des $F'_n \cap K_\varepsilon$ est une suite décroissante de compacts non vides (car $\varepsilon < \alpha/2$) . Par conséquent, l'intersection de ces compacts serait non vide, ce qui est contradictoire, car $(F_n) \downarrow \emptyset$.

(3.26) LEMME. - La promesure normale canonique d'un espace de Hilbert séparable ne définit pas une vraie probabilité sur la tribu borélienne.

Soit $B(R)$ la boule de rayon R centrée à l'origine de ℓ^2 . Soit ν de T. F.

$$\hat{\nu}(u) = \exp(- \frac{1}{2} \|u\|^2) .$$

Si ν définissait une vraie probabilité P , on aurait $1 = \lim_{R\to\infty} P(B(R))$. donc

(3.26.1) $\qquad \forall\, \varepsilon > 0$, il existerait R avec $P(B(R)) \geq 1 - \varepsilon$.

Soit $m_n = s_n(\nu)$ la probabilité normale réduite sur l'espace euclidien $\underset{\sim}{R}^n$. Soit $B_n(R)$ la boule unité de rayon R de cet espace.

$$P(B(R)) \leq m_n(B_n(R)) = \int_{\|x\|\leq R} (2\pi)^{-n/2} \exp(- \frac{\|x\|^2}{2})\, dx .$$

Passons en coordonnées polaires

$$P(B(R)) \leq (2\pi)^{-n/2} \int_0^R r^{n-1}\, s_n \exp(- \frac{1}{2} r^2)\, dr ,$$

où $s_n = n\pi^{n/2}/\Gamma((n/2) + 1)$ est la surface de la sphère unité de dimension $n - 1$, plongée dans $\underset{\sim}{R}^n$. D'où :

$$P(B(R)) \leq \frac{(2\pi)^{-n/2}\, n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^R r^{n-1}\, dr = \frac{R^n}{2^{n/2}\, \Gamma((n/2) + 1)} .$$

Or cette quantité tend vers zéro lorsque n tend vers $+ \infty$. On trouve donc $P(B(R)) = 0$ pour tout R ; d'où une contradiction avec (3.26.1).

4. Quelques propriétés algébriques.

(4.27) Translation par un vecteur a de X : Si R est un processus linéaire, on définit son translaté par le vecteur a de X

$$(4.27.1) \qquad \begin{aligned} U &\xrightarrow{\tilde{R}} L^0(\Omega) \\ u &\longmapsto Ru + (a , u) . \end{aligned}$$

La T. F. du nouveau processus est $\hat{\tilde{R}}(u) = \mathcal{E}(\exp(- i\tilde{R}(u))) = (\exp(- i(a , u)))\hat{R}(u)$.

(4.28) Image par une application linéaire d'une probabilité cylindrique. Composé d'un processus linéaire avec une application linéaire : Soient deux couples (X , U) et (Y , U) d'e. v. en dualité séparante, R un processus linéaire basé sur U représenté par une probabilité cylindrique m sur X . Soit ℓ une application faiblement continue de X dans Y , et soit l'application transposée

$$\begin{array}{ccccc} & & X & \xrightarrow{\ \ell\ } & Y \\ & & \vdots & & \vdots \\ L^0(\Omega) & \xleftarrow{\ R\ } & U & \xleftarrow{\ \ell'\ } & V \end{array}$$

On définit le composé de R avec ℓ' par $S = R \circ \ell'$. On définit l'image de μ par ℓ comme étant la probabilité cylindrique sur Y représentant le processus $R \circ \ell'$. La T. F. du nouveau processus est :

$$\hat{S}(v) = \mathcal{E}[\exp(- iR(\ell' v))] .$$

D'où

$$(4.28.1) \qquad \hat{S}(v) = \hat{R}(\ell' v) .$$

(4.29) Somme directe de processus linéaires : Soient R et S deux processus linéaires basés sur des espaces vectoriels U et V respectivement. On définit $T = R \oplus S$ par

$$W = U \oplus V \longrightarrow L^0(\Omega)$$

$$(u \oplus v) \longrightarrow Ru + Sv \;.$$

Il ne faut pas confondre cette opération avec l'opération "somme des deux processus linéaires", cette dernière opération n'étant définie que si les processus à additionner R et S sont définis sur le même espace U, et $R + S$ étant défini sur U. L'opération $\oplus$ est très importante dans les applications, lorsqu'on doit étudier simultanément deux processus.

(4.30) PROPOSITION. - Soient μ_1, μ_2 et ν les probabilités cylindriques sur X, Y et $Z = X \oplus Y$ représentant respectivement les processus R, S et T.

(a) Supposons R et S indépendants : $\forall N$, $\forall P$, $\forall (u_1 \ldots u_n)$, $\forall (v_1 \ldots v_p)$, les lois conjointes des deux v. a. vectorielles suivantes sont indépendantes

$$(Ru_1 \ldots Ru_n) \;, \quad (Sv_1 \ldots Sv_p) \;.$$

Alors on peut construire ν à partir de μ_1 et μ_2 ; et l'on écrit

$$\nu = \mu_1 \otimes \mu_2 \;.$$

(b) Mais, dans le cas général, on ne peut pas construire ν à partir de μ_1 et de μ_2.

Démonstration : Par définition, ν représente $T = R \oplus S$.

(a) On définit d'abord $\nu_{ij} = \sigma_{ij}(\nu)$, où σ_{ij} est la surjection canonique de $X \times Y$ sur $X_i \times Y_j$. Vu la condition d'indépendance, on trouve

$$\nu_{ij} = s_i(\mu_1) \otimes s_j(\mu_2) \;.$$

Lorsque i et j varient, on obtient ainsi un système projectif. Or si C_k est un sous-espace fermé quelconque de codimension finie de $Z = X \oplus Y$, $C_k^\perp \subset W_k$, où W est le produit des projections canoniques U_i et V_j de $C_k^\perp$ sur les facteurs U et V. D'où

$$C_k \supset U_i^\perp \oplus V_j^\perp \;.$$

D'où, sur surjection canonique

$$\sigma \;:\; Z/(U_i^\perp \oplus V_j^\perp) \longrightarrow Z/C_k \;;$$

on peut associer à Z/C_k l'image par σ de la mesure $s_i(\mu_1) \otimes s_j(\mu_2)$, avec

$$s_i \;:\; X \longrightarrow X/U_i^\perp \;, \qquad s_j \;:\; Y \longrightarrow Y/V_j^\perp \;.$$

En faisant varier C_k, on obtient ainsi la probabilité cylindrique sur $Z = X \oplus Y$ qui représente T.

(b) Il en est déjà ainsi si $\dim X = \dim Y = 1$, car il existe sur R^2 une infinité de probabilités gaussiennes ayant des projections données sur les axes.

5. Processus linéaires continus.

(5.31) Rappel sur les divers types de convergence :

- Définition de la convergence en probabilité d'une famille de v. a. :

$$(X_\alpha) \longrightarrow X \text{ en probabilité} \iff \forall\, \delta > 0 \;,\; P(\{|X_\alpha - X|\} \geq \delta) \longrightarrow 0 \;;$$

- La convergence en loi d'une famille de v. a. est la convergence étroite des lois de probabilité de ces v. a. ;

- La convergence en moyenne (d'ordre p) est la convergence dans L^1 (dans L^p)

$$\begin{array}{ccccc} \text{CV en probabilité} & \Longrightarrow & \text{CV étroite} & \Longrightarrow & \text{CV vague} \\ \Uparrow & & \Uparrow & & \\ \text{CV en moyenne d'ordre } p & \Longrightarrow & \text{CV en moyenne} & & \end{array}$$

De plus, la CV presque sûre (CV ponctuelle presque partout) implique la CV en probabilité s'il s'agit de la CV d'une suite, et la CV en loi implique la CV en probabilité s'il s'agit d'une CV vers une v. a. constante.

(5.32) Définition de la continuité, type et cotype d'un processus linéaire : Soit (X , X') un couple d'e. v. en dualité, X' étant muni d'une topologie localement convexe t telle que $(X' , t)' = X$.

(a) Un processus linéaire est continu si R est une application continue : $(X' , t) \longrightarrow L^0(\Omega)$ munie de la topologie de la CV en probabilité ;

(b) Soit $p > 0$; R est de type p si R est continu et à valeur dans $L^p(\Omega)$;

(c) R est de cotype p si R est injectif, à valeur dans $L^p(\Omega)$, et si $\tilde{R} : (X' , t) \longrightarrow \operatorname{Im} R \subset L^p(\Omega)$ est tel que $\tilde{R}^{-1}$ est continu.

(5.33) Remarques.

(a) Si t est définie par une norme, soit B la boule unité de X' . Alors :

$$R \text{ est de type } p \iff \|R\|_p^* \triangleq \sup_{\xi \in B} \|R(\xi)\|_p < \infty \,.$$

(b) On appelle m_ξ la loi de probabilité de la v. a. $R(\xi)$. Alors

$$\|R(\xi)\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^p \, dm(t)\right)^{1/p} = \left(\int_\Omega |(R\xi)(w)|^p \, dP(w)\right)^{1/p} .$$

Alors

$$R \text{ est de type } p \iff \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|R(\xi)\|_p = \|m\|_p^* \,.$$

(c) Caractérisation par les normes, t étant définie par une norme.

$$R \text{ est de type } p \iff \|Ru\|_{L_p} \leq C\|u\| \,,$$

$$R \text{ est de cotype } p \iff \|Ru\|_{L^p} \geq C\|u\| \,.$$

(d) Les points (a), (b) et (c) de la définition précédente sont indépendants de Ω : par exemple, si R est de type p (respectivement cotype p) tout processus isonome à R est de type p (respectivement de cotype p). Ceci tient au fait que les notions de la définition (5.32) peuvent être exprimées en termes de lois.

(5.34) Exemple : On vérifiera que la probabilité normale canonique sur un espace de Hilbert est, pour tout $p > 0$, de type p et de cotype p . Ceci s'interprète en terme de plongement de la façon suivante : l'espace de Hilbert H est, comme espace de Banach, isomorphe à un sous-espace de L^p pour tout $p > 0$.

(5.35) THÉORÈME (Caractérisation des processus linéiares continus). – *On considère un couple* (X , X') *d'e. v. en dualité, un processus linéaire* R *basé sur* X' *à valeurs dans* $L^0(\Omega)$. *On suppose que* X' *est muni d'une topologie localement convexe* θ *telle que* $(X' , \theta)' = X$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) R *est un processus linéaire continu* ;

(a') R *est continu à l'origine* ;

(b) *L'application* $\xi \in X' \longrightarrow m_\xi \in \mathcal{M}$ (*où* $\mathcal{M}$ *est muni de la topologie étroite*) *est continue* ;

(c) $\hat{R}$ *est continue*.

Preuve :

Evidemment (a) $\Longleftrightarrow$ (a').

(a) $\Longrightarrow$ (b), car la CV en probabilité implique la CV étroite ; (b) $\Longrightarrow$ (a'), car la CV étroite vers une v. a. constante (ici 0) implique la CV en probabilité.

(b) $\Longrightarrow$ (c). On considère (ξ_j) convergeant vers ξ . Il faut montrer $\hat{R}(\xi_j) \longrightarrow \hat{R}(\xi)$

$$R(\xi_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it} \, dm \, x_j \, .$$

Et l'hypothèse (b) donne

$$\int e^{-it} \, dm_{\xi_j}(t) \longrightarrow \int e^{-it} \, dm_\xi(t) = \hat{R}(\xi) \, .$$

Supposons (c), et montrons (b). D'après le théorème de Paul Lévy, il suffit de montrer que si $\xi_j \longrightarrow \xi$, alors $\hat{m}_{\xi_j} \longrightarrow \hat{m}_\xi$ uniformément sur tout compact soit, d'après la remarque (2.12.b) :

$$\forall \, t_\delta > 0 \, , \quad |t| \leqslant t_0 \Longrightarrow \hat{R}(t\xi_j) \longrightarrow \hat{R}(t\xi) \text{ uniformément.}$$

Or vu l'hypothèse (c), $\forall \, \varepsilon > 0$, $\forall \, V$ voisinage de 0 dans X' , $\xi_1 - \xi_2 \in V$ entraîne

$$|\hat{R}(\xi_1) - \hat{R}(\xi_2)| \leqslant \varepsilon \, .$$

Et d'autre part, pour t fixé, vu la convergence de ξ_j vers ξ , il existe une partie F du filtre telle que :

$$\forall\, j \in F\ ; \qquad \xi_j \in \xi + t_0^{-1}\, V\ .$$

Ce qui implique

$$\forall\, t \in \left]-t_0\ ,\ +t_0\right[\ , \qquad |\hat{R}(t\xi_j) - \hat{R}(t\xi)| \leq \varepsilon\ .$$

On signale une variante uniforme du théorème (5.35).

(5.36) THÉORÈME. - <u>Soient</u> L <u>un ensemble d'indices</u>, <u>et</u> $(R_\ell)_{\ell\in L}$ <u>une famille de processus linéaires</u>. <u>Alors les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(a) $(R_\ell)_L$ <u>est une famille équicontinue de processus linéaires</u> ;

(a') <u>Les applications linéaires</u> R_ℓ <u>sont équicontinues à l'origine</u> ;

(b) <u>Les applications</u> $\alpha_\ell\ :\ \xi \longrightarrow m_\xi^\ell$ = <u>loi de la v. a.</u> $R_\ell(\xi)$ <u>sont équicontinues en tout point</u> ξ <u>de</u> X' ;

(c) $(\hat{R_\ell})_\ell$ <u>est un ensemble équicontinu d'applications</u>.

6. <u>Exemples de processus linéaires</u>.

(6.37) <u>Mouvement brownien sur</u> $I = [0\ ,\ 1]$: Un bruit blanc gaussien sur I est tout processus linéaire R sur $H = L^2(I)$ de la classe d'isonomie définie par la probabilité normale canonique sur H (i. e. tout R tel que

$$R(u) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|u\|^2\right).$$

Intuitivement, le mouvement brownien B est le mouvement d'une particule dont la vitesse est un bruit blanc gaussien et tel que $B(0) = 0$. De façon précise, B est solution du problème de Cauchy stochastique :

$$\text{(6.37.1)} \qquad \begin{cases} B'_t = R_t & \text{(bruit blanc gaussien)} \\ B_0 = 0\ . \end{cases}$$

On cherche, par la théorie variationnelle des problèmes aux limites (théorie de SOBOLEV) un espace de Hilbert K de distributions sur I tel que le problème (6. 37.1) définisse un isomorphisme $\beta\ :\ K \longrightarrow H$. On appelle $\tilde{\beta}$ l'isomorphisme correspondant au problème déterministe

((6.37.2)

$$\begin{array}{ccccc} & & H & \xrightarrow{\tilde{\beta}^{-1}} & K \\ & & \Big\downarrow & & \\ L^0(\ ) & \longleftarrow & H' & \xleftarrow[(\tilde{\beta}^{-1})']{J} & K' \end{array}$$

Dans le cas déterministe, il faut résoudre, au sens des distributions

$$\text{(6.37.3)} \qquad \begin{cases} f'(t) = n(t) & n \text{ arbitraire dans } L^2(I) \\ f(0) = 0\ . \end{cases}$$

Posons

$$H_1 = G_1 * L^2(I) = \{f \ ; \ \int (1+\xi^2)|\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty\}$$

$${}_0H^1 = \{g \restriction I \ ; \ g \in H^1 \ \text{ et } \ g(0) = 0\} \ \text{ muni de la norme :}$$

$$\|h\| = \inf\{\|g\|_{H^1} \ \text{ avec } \ g\restriction I = h \ \text{ et } \ g(0) = 0\} .$$

Alors l'application

$$g \in H^1 \longrightarrow g' \in L^2(I)$$

est un isomorphisme, d'inverse noté J .

$$J : \ h \in L^2(I) \longrightarrow g \in H^1 \ \text{ avec } \ g(t) = \int_0^t h(\theta)\, d\theta .$$

Un mouvement brownien est alors représenté par $RJ' = B$.

(6.38) Processus de Orstein-Uhlenbeck : Les fonctions de Bessel G_s étant définies par leurs transformées de Fourier

$$\hat{G}_s(\xi) = (1 + \|\xi\|^2)^{-s/2} .$$

Posons

$$H^s = G_s * L^2(\underset{\sim}{R}) .$$

On considère un bruit blanc gaussien L sur $L^2(\underset{\sim}{R})$, et son opérateur de corrélation C_L défini par

$$\forall\, u_1 , u_2 \in L^2(\underset{\sim}{R}) , \qquad (C_L\, u_1 , u_2)_{L^2(\underset{\sim}{R})} = \mathcal{E}[(Lu_1).(Lu_2)] .$$

Donc ici C_L est l'identité de L^2 , et on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & & L^2(R) & \xrightarrow{G_1 *} & H^1(\underset{\sim}{R}) \\ & & C_L \uparrow & & \uparrow C_M = G_2 * \\ L^2(\Omega) & \xleftarrow[L]{} & L^2(R) & \xleftarrow[G_1 *]{} & H^{-1}(R) \end{array}$$

où $C_M = (G_1 *) \circ C_L \circ (G_1 *) = G^2 *$ est un isomorphisme de $H^{-1}(R)$ sur $H^1(R)$.

$M = L(G_1 *)$ est le processus de Orstein-Uhlenbeck basé sur $H^{-1}(\underset{\sim}{R})$.

Remarques : On peut considérer la ligne supérieure comme représentant un système physique et une probabilité cylindrique sur H^1 , la ligne inférieure comme son interprétation en termes de processus linéaires : c'est l'interprétation duale, analogue à l'interprétation duale intervenant en théorie des distributions. En termes physiques, "faire passer dans une boîte de réponse impulsionnelle G_1 ", se traduit en termes mathématiques par la composition de L avec $G_1 *$. On obtient ainsi un processus linéaire M dont la classe d'inonomie est représentée par la probabilité cylindrique sur H^1 .

(6.39) Processus du type Poisson : On rappelle que la loi de Poisson π_λ de moyenne λ est la loi de probabilité.

$$\pi_\lambda(\lambda) = \sum_0^\infty \exp(-\lambda)\, \lambda^n/m!\, \delta_n .$$

La transformée de Fourier de cette loi est

$$\hat{\pi}_\lambda(u) = \int \exp(- iux)\ d\pi_\lambda(x) = \exp(- \lambda) \sum \frac{\lambda^n}{n!} \exp(- inu) = \exp(- \lambda + \lambda \exp(- iu)) .$$

La loi de Poisson centrée est

$$d\pi'_\lambda(x) = \pi_\lambda(x - \lambda) = \sum \exp(- \lambda) \frac{\lambda^n}{n!} \delta_{n-\lambda}(x) .$$

On a

$$\hat{\pi}'_\lambda(u) = \exp(- iu\lambda)\ \hat{\pi}_\lambda(u) .$$

Soit $(\Omega_0 , \mathcal{C}_0 , m)$ un espace mesuré, la mesure m sur $\mathcal{C}_0$ étant positive de masse finie. Un processus de Poisson de paramètre $a > 0$ sur Ω_0 est un processus R basé sur $L^1(\Omega_0)$ de transformée de Fourier.

$$f \longrightarrow \hat{R}(f) = \exp[- a(1 + i \int f dm)] .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BADRIKIAN (A.). - Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires et les mesures cylindriques. - Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 139).

[2] GEL'FAND (I. M.) et VILENKIN (N. Ja.). - Les distributions. Vol. 4 : Applications à l'analyse harmonique. Traduit [du russe : Fonctions généralisées. Tome 4] par G. Rideau. - Paris, Dunod, 1967 (Collection universitaire de Mathématiques, 23).

[3] HIDA (T.). - Stationary stochastic processes. - Princeton, Princeton University Press, 1970 (Mathematical Notes).

[4] KRÉE (P.). - Noyaux positifs et champs markoviens (à paraître).

[5] SEGAL (I. M.). - Tensor algebras over Hilbert spaces, I., Trans. Amer. math. Soc., t. 81, 1956, p. 106-134.

[6] Séminaire Laurent-Schwartz : Applications radonifiantes, 1969/70. - Paris, Ecole Polytechnique, 1970.

[7] UMEMURA (Y.). - Measures on infinite dimensional vector spaces, Publ. Res. Inst. for math. Sc., Series A, t. 1, 1966, p. 1-54.

Paul KRÉE
Tour Mexico, B. P. 1325
65 rue du Javelot
75645 PARIS CEDEX 13