

SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE ET MATHÉMATIQUES

GUSTAVE CHOQUET

Les processus mentaux de la création

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1994, fascicule 4
« Les processus mentaux de la découverte mathématique », , p. 1-21

http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1994__4_A1_0

© École normale supérieure – IREM Paris Nord – École centrale des arts et manufactures,
1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Séminaire de philosophie et mathématiques » implique
l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute
utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale.
Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

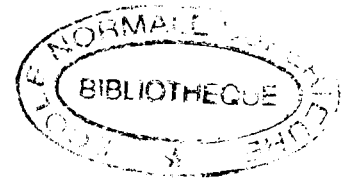
NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Les processus mentaux de la création *

Gustave Choquet

1991 Mathematics Subject Classification: 00A00



Science et création

A 30 ans, on cherche et on trouve; un peu plus tard on forme des chercheurs, et plus tard encore on parle des processus mentaux de la création: C'est ce que je me propose de faire ici.

Je ne donnerai pas de recette pour devenir un découvreur, ^{cela} ~~celui~~ s'apprend en découvrant. Mais plusieurs fois j'ai constaté qu'une réflexion sur les raisons d'un succès, améliorerait mes recherches ultérieures; mon expérience peut donc être utile.

Il semble d'ailleurs que de plus en plus de chercheurs comprennent qu'il n'est pas possible de dissocier la science de l'activité humaine qui la crée; et qu'ainsi les millions de théorèmes qui reposent sur les rayons des bibliothèques ne sont que la cendre refroidie, d'ailleurs précieuse, du feu créateur qui les a fait naître; d'où chez les chercheurs un intérêt grandissant pour l'histoire des sciences et techniques.

Les témoignages de chercheurs, sans être encore nombreux, constituent néanmoins une bonne base d'étude; j'en citerai quelques uns: Celui de René Descartes qui, le 10 Novembre 1619, à 23 ans, dans une nuit d'enthousiasme fait trois rêves exaltants et découvre les fondements "d'une science admirable" (voir Bell, "Men of mathematics"). Le récit d'Henri Poincaré concernant sa découverte des groupes fuchsien et de leur lien avec certaines formes quadratiques, est célèbre à juste titre.

Jacques Hadamard a réuni en 1959 ses analyses commencées en 1937 sur la psychologie de l'invention (134 pages).

Paul Levy, en 1970, s'est longuement exprimé dans "Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien" (Albert Blanchard, épuisé).

En 1976 j'ai, dans le Séminaire Loi, parlé de "La naissance de la théorie des capacités" (publié dans "La vie des Sciences" de l'Académie des Sciences, 1986).

Laurent Schwartz, après avoir en 1982 raconté à l'Université de Patras (Grèce) l'histoire de sa théorie des distributions, a fait en 1987 une conférence sur la découverte en Mathématiques.

André Weil et Alain Connes, plus récemment, se sont aussi exprimés brièvement à ce sujet dans la revue "Pour la Science".

Dans les sciences expérimentales, les témoignages abondent: Ceux de Newton, Pasteur, Darwin, Einstein, Fleming, Watson ("La double hélice", 1968). En chimie le demi-rêve de Kekule qui, d'après lui, l'aurait conduit à la structure hexagonale du benzène (un

* Synthèse de trois conférences: Au Séminaire Loi, à Clermont-Ferrand, et à Kenty (Rep. Technique) 1993 1994

serpent se mordant la queue) est notable car il est exceptionnel que les rêves conduisent à des découvertes importantes.

Le cerveau, organe de notre pensée

Bien que l'introspection ait été longtemps un outil essentiel d'étude des processus mentaux, et qu'elle joue encore un rôle important (le livre d'Hebb de 1949 reste un ouvrage de référence), des outils performants tels que l'imagerie médicale permettront certainement de progresser dans l'étude de ces processus. Le terrain aujourd'hui est encore peu sûr; on sait toutefois que toutes les parties du cerveau sont interdépendantes et que son fonctionnement est extrêmement complexe; ce que j'en dirai aura surtout pour but de souligner cette complexité, et de justifier en partie certaines affirmations.

Une vue fort schématique du cerveau lui attribue une structure ternaire:

- Le cerveau postérieur, dit parfois reptilien, regroupe la moelle épinière, le bulbe rachidien, le mésencéphale. Il est responsable de la vie inconsciente des organes et de pulsions primitives.
- Le système limbique regroupe des structures très diverses, telles que l'hippocampe, l'hypothalamus. Il joue un rôle important dans la mémoire et la genèse des états de motivation. Ses lésions modifient les comportements alimentaires, sexuels, sociaux.
- Le néo-cortex (ou cortex, ou matière grise).

Ces trois parties sont interconnectées et jouent donc un rôle dans le processus de la recherche, ce qui après coup justifie la phrase célèbre de Pascal "L'homme n'est ni ange ni bête". Il est probable que leur plus ou moins grand rôle détermine le style de la recherche.

Les connections cérébrales sont redondantes, à des degrés variés, ce qui explique peut-être que la folie ou la dépression n'empêche pas toujours le travail mathématique, artistique ou littéraire: Rappelons le cas d'André Bloch qui, après avoir tué à coups de hache plusieurs membres de sa famille entra en relation, de son asile-d'aliénés, avec Georges Valiron et découvrit plusieurs beaux théorèmes; et celui plus célèbre encore de Cantor, victime dès l'âge de 46 ans de graves crises de dépression, mais qui après ces crises se sentait l'esprit très clair et faisait d'excellent travail.

Neurones.

Notre cerveau comporte de 50 à 100 milliards de neurones. Chacun d'eux est constitué d'un corps cellulaire contenant le noyau, d'où émergent d'une part de nombreuses dendrites munies de protubérances appelées épines, d'autre part un long axone muni à son extrémité de nombreuses terminaisons axonales.

Chaque neurone est en relation avec d'autres neurones par des *synapses*, les unes électriques, d'autres chimiques, qui unissent épines et terminaisons axonales. Certains neurones peuvent avoir jusqu'à 30 000 synapses avec d'autres neurones; il peut exister aussi certaines relations de neurone à neurone à travers leurs axones.

Bien qu'élevé, le nombre des neurones et des synapses n'expliquerait sans doute pas la multitude de possibilités de notre cerveau: Pensons par exemple à la vision d'un paysage en mouvement et à son enregistrement ne serait-il que partiel. La solution de cette énigme semble résider dans une observation mathématique élémentaire: Un en-

semble fini de N éléments contient 2^N sous-ensembles distincts, nombre gigantesque dès que N dépasse 1000; si donc neurones et synapses s'organisent en groupements fonctionnels, le nombre de ces groupements peut être d'un ordre de grandeur incomparablement supérieur au nombre de ces neurones et synapses.

Les plus petits de ces groupements ont une structure en réseaux vaguement rectangulaires; ce sont des sous-unités de traitement (recevant par exemple des informations visuelles, auditives, tactiles) qui peuvent elles-mêmes s'organiser en assemblées plus importantes que j'appellerai ici faisceaux.

Associations d'idées et facilitation.

Les connections de neurones dans les réseaux et faisceaux expliquent les précieuses associations d'idées qui sont une base essentielle du fonctionnement, conscient ou non, du cerveau.

C'est elles qui se manifestent dans les calembours et coq-à-l'âne; mais les personnes âgées en prennent conscience de façon encore plus tangible lorsqu'elles perdent la mémoire des noms propres ou de certains noms communs; elles peuvent souvent les retrouver par un long cheminement conscient, de proche en proche, utilisant analogie ou chronologie. Le fait qu'elles conservent plus longtemps leur maniement de notions complexes, leur possibilité de *discourir* longuement, s'explique par le fait, justement, de cette complexité: Ces activités peuvent s'effectuer de nombreuses façons différentes, grâce à des chaînes variées d'associations d'idées, et leur but n'est pas un point précis, mais une zone assez floue mais étendue.

Les associations d'idées sont aussi une des explications des rêves, de leur motivation – liée tantôt à notre vie active, tantôt à un passé lointain –, mais aussi de leur mélange de fantaisie et de cohérence: Car si les associations d'idées obéissent au même déterminisme physico-chimique que les neurones, elles dépendent aussi comme eux d'un chaos déterministe qui nous apparaît comme le fruit du hasard, de la fantaisie.

Mais surtout c'est leur vie souterraine, cachée, qui nous donne l'explication du *subconscient* (ou préconscient de Freud) et sans doute de l'inconscient, dans la mesure du *moins* où celui-ci a une réalité définissable et n'est pas simplement un subconscient profond et refoulé depuis longtemps.

Je vois dans le subconscient la source de ce que j'appellerai *illumination* (pour les mystiques on dit révélation, et pour les poètes et musiciens, inspiration); et aussi un des facteurs de l'*intuition*.

Subconscient, illumination, hasard, intuition.

Le subconscient travaille sans relâche; les associations d'idées qui en sont la base ne se font pas arbitrairement; leur dynamique est régie en partie par le hasard, mais surtout par le phénomène de *facilitation* (les interactions entre neurones au niveau des synapses sont plus ou moins grandes, en fonction de leur activité passée). Ce phénomène rend compte de nos habitudes, du petit robot qui semble prendre en charge certaines de nos actions; d'où l'importance considérable, bénéfique ou néfaste, de l'éducation, qu'elle vienne du monde extérieur ou de notre activité cérébrale consciente.

L'activité subconsciente peut impliquer simultanément plusieurs aires corticales: on peut être ~~en~~ même instant amoureux et préoccupé d'un problème mathématique.

Chez un mathématicien qu'un problème a intéressé, récemment ou dans le passé, s'est constitué à son insu un groupement de faisceaux liés à ce problème, et dont

l'activité peut s'être progressivement renforcée par des retours conscients au problème. Dans des cas favorables, par exemple grâce à des contacts mathématiques en apparence sans rapport avec le problème, ce groupe de faisceaux acquiert une vie cohérente et assez intense pour qu'un petit événement (par exemple détente après une grande fatigue, changement agréable d'activité, ou une simple tasse de café) déclenche brusquement un passage du subconscient au conscient: C'est l'*illumination*, expérience merveilleuse dont on garde précieusement le souvenir. Elle ne diffère que par la nature de son objet de l'extase mystique, ou de l'inspiration des grands artistes ou poètes qui leur permet de réaliser en un temps très bref des oeuvres qui nous étonnent (Mozart, etc.).

Stendhal donnait à ce phénomène le nom de *cristallisation*, qui évoque le changement brusque d'état d'une solution saline sursaturée ou le gel brutal d'une eau en surfusion.

J'ai raconté déjà dans le Séminaire Loi les illuminations, grandes ou petites qui m'ont conduit, vers 1950, à créer la théorie des capacités; en voici une autre: Vers 1960 j'avais pris nettement conscience qu'il y avait en Analyse des cônes convexes importants sans base compacte (e.g. le cône des fonctions réelles sur \mathbb{R} dont toutes les dérivées sont positives); je ne savais donc pas, en particulier, s'ils possédaient tous des génératrices extrémales. Je cherchais donc à construire de tels cônes sans génératrices extrémales, par un procédé de limite projective à partir de cônes ayant une base compacte. Et voici qu'un matin du printemps 1962, alors qu'avec ma femme je passais une semaine de vacances dans un petit hotel de Barbizon, nous décidons d'aller nous promener en forêt; un seul pas séparait notre chambre du sable de la forêt; je franchis le seuil et "Joie, pleurs de joie": Oui, comme on coupe en biseau une branche pointue avec une lame aiguisée, il faut, de ces cônes détacher un petit copeau compact, convexe ainsi que le reste du cône. En une minute je vois la structure des opérations à effectuer sur ces copeaux, appelés plus tard "chapeaux", et comment les utiliser.

C'est une illumination du même type qui donna à Schwartz sa théorie des distributions: En 1935 nous avions tous deux organisé à l'Ecole Normale Supérieure un baby-Séminaire où je parlais des travaux de Baire et de Cantor, et où lui parlait de son anxiété ~~devant~~ les comportements différents des équations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0;$$

cette anxiété le poursuivit jusqu'en 1944. Il n'avait pas cessé pendant ces 10 années de s'intéresser aux équations linéaires aux dérivées partielles, sans pouvoir pénétrer le secret de leur vie cachée; mais son subconscient travaillait lui aussi de son côté. C'est alors qu'arrive 1944; je venais, avec Jacques Deny, de terminer un travail sur une caractérisation des fonctions polyharmoniques dans le plan; nous y utilisions les séries de Fourier, ce qui ne s'étendait pas à l'espace à 3 dimensions; je demandai alors à Schwartz s'il connaissait une façon de s'en passer; il la trouva assez rapidement en utilisant des fonctions indéfiniment dérivables à support compact, et peu de temps plus tard, une illumination lui donna au cours d'une seule nuit, en utilisant une idée analogue, la plupart des théorèmes de sa théorie.

Citons encore deux mathématiciens fort différents l'un ^{de} l'autre:

Jean Dieudonné, cité dans le livre de Pierre Dugac (*Gaby* 1995): "Qu'est-ce qui se passe dans la vie d'un chercheur? On est sur un problème; on réussit quelquefois et il y a même ce qu'on appelle des illuminations Moi je peux dire que cela m'est arrivé trois ou quatre fois dans ma vie en tout".

Alain Connes: "En revenant de conduire ma femme au lycée, alors que je pensais à tout autre chose, j'eus la certitude absolue, devant un feu rouge, que les calculs longs et pénibles que je faisais depuis 6 mois, s'éclairaient à la lueur d'une astuce mathématique. Tout s'était passé comme si mon inconscient s'était brutalement exprimé".

Certes de grandes illuminations de ce type restent des instants mémorables de notre vie, mais toute activité mathématique qui ne soit pas de pure routine est parsemée de mini-illuminations. C'est par exemple celle de l'élève lent mais obstiné qui, après bien du travail et quelques aides extérieures dit brusquement "J'ai compris" et toute sa journée en est éclairée, et parfois sa vie changée: Il vient de subir une mutation mentale.

J'ai souvent constaté que des mini-illuminations pouvaient être déclenchées par des modifications physiologiques: Se lever; faire quelques pas après une longue station assise; se livrer à une activité très différente, lecture, musique, marche; sortir d'un engourdissement qu'on finirait par confondre avec du travail.

Le hasard. Il est temps de dire clairement ici qu'un chercheur débutant qui attendrait d'une illumination ou d'un hasard heureux la solution d'un problème difficile irait vers des désillusions. On souligne parfois le rôle du hasard dans une découverte scientifique, et on cite le cas de Fleming qui, arrivant un matin dans son laboratoire découvre sur la gélatine d'une boîte de Petri abandonnée un rond, vide de bactéries; une analyse lui montre que le responsable de ce rond – qui fait penser aux "ronds de sorcière" dans certains prés – est une moisissure du genre *pénicillum*: Il vient de découvrir la pénicilline, le premier d'une longue série de nos antibiotiques.

Mais Fleming était déjà un bactériologiste compétent; depuis plusieurs années il avait mis en évidence dans la salive et dans les larmes des substances antibiotiques; et c'était un esprit curieux, exigeant, qui, mis en présence d'un petit fait inattendu, en cherchait l'explication. Un autre chercheur, moins motivé par une longue recherche préalable, et aussi moins exigeant, aurait rageusement jeté à la poubelle cette boîte de Petri gachée, ce que ne fit pas Fleming.

L'anthropologue qui, tête baissée marche lentement sous le soleil dans la vallée de l'Omo, à la recherche du "chaînon manquant" et qui heurte du pied une machoire d'homme fossile, a-t-il mérité sa chance?

Il y a des hasards qui peuvent devenir heureux, mais seulement pour les chercheurs qui l'ont mérité par un long travail préalable, de l'intelligence et une curiosité qui ont développé en eux sens critique et intuition. "Tu ne me chercherais pas si tu ne m'avais déjà trouvé"; cette phrase de Pascal pourrait conclure ma réflexion sur le hasard, mais je préfère la conclure par une anecdote: Voici quelques années j'accompagnais mon ami Jacques Deny dans un petit bois, à la recherche d'un petit champignon curieux qui ne pousse que dans la chrysalide d'un papillon précis; il en trouva de nombreux spécimens; je n'en trouvai pas un seul, mais il était mycologue et je ne l'étais pas.

L'intuition. Comme les illuminations, elle dépend des associations d'idées; mais contrairement aux illuminations, c'est un état acquis, stable et qui peut s'enrichir par un travail soutenu, bien que son acquisition dépende beaucoup de dons innés.

Elle apparaît comme une connaissance globale et presque immédiate d'un vaste domaine, mais c'est une connaissance non déductive et parfois assez floue; l'intuitif est semblable au jeune bébé qui, d'un seul coup d'oeil, reconnaît sa mère; il est plus un stratège qu'un tacticien qui, lui, a besoin de connaître les détails et leurs relations mutuelles.

- Pour un géomètre intuitif, la division du plan en deux régions par toute courbe fermée est une évidence, même s'il n'en a pas de preuve.
- Le Saint Curé d'Ars avait une telle intuition des problèmes moraux de ses pénitents que son confessionnal ne désemplassait pas.

Au début de mes recherches j'avais l'ambition de bien connaître tous les ensembles fermés plans, ambition irréaliste certes, mais j'avais néanmoins réussi à me sentir proche d'eux et à deviner, souvent avec succès, leurs propriétés topologiques: J'en avais l'intuition; c'est qu'en effet l'intuition se développe *par le travail*, beaucoup de travail conscient; c'est un ensemble déjà bien organisé d'associations d'idées liées à la mémoire parfois ancienne et dont on n'a conservé que celles qu'un jugement subconscient ou partiellement conscient juge bonnes.

Glaeser qui s'est beaucoup occupé de la formation des géomètres différentiels, leur conseillait de se constituer un florilège personnel d'être différentiels remarquables, éventuellement pathologiques, dont l'ensemble constituerait une bonne approximation du domaine étudié. On pourrait presque dire que l'intuition, qui doit être une des qualités d'un stratège se construit par un patient travail préparatoire de tacticien. Un tel travail préalable éviterait à certains débutants des échecs *cuisants* lorsque par exemple ils se lancent dans l'étude d'une structure axiomatique sans avoir vérifié l'existence d'êtres intéressants vérifiant les axiomes.

L'exemple des géomètres algébristes italiens montre clairement tout ce qu'une bonne intuition peut apporter, et aussi ses limites. Ces géomètres avaient étudié tant de courbes et surfaces qu'ils avaient énoncé sans démonstrations des théorèmes généraux d'une grande beauté; mais il fallut attendre pour leur preuve la naissance d'outils nouveaux (A. Weil, etc.).

L'exemple d'Euclide est également éclairant; parmi ses axiomes figure celui-ci "Une ligne droite est une ligne (i.e. "qui a une longueur sans largeur") qui repose également avec les points sur elle même". Euclide avait certainement une grande intuition géométrique et cet axiome devait avoir pour lui un sens précis, mais aucun commentateur, pas même Proclus n'a bien réussi à le comprendre.

Tous les bons chercheurs ont de l'intuition, qu'elle soit géométrique, algébrique ou combinatoire; sinon leur démarche s'apparenterait à une reptation plutôt qu'au survol indispensable pour attaquer les problèmes aux points sensibles, et planifier leur recherche. Mais il faut, impérativement, vérifier les théorèmes suggérés par l'intuition, par de véritables démonstrations; celui qui se contente de lancer des idées sans prouver des théorèmes n'est pas un mathématicien; il est ce que les Américains appellent un "theoretical mathematician", ce que je traduirai plutôt par "mathématicien flou".

Je possède une intuition géométrique et cela, je crois, depuis la classe de 1^{ère}; j'aimais la géométrie et j'avais pris l'habitude de résoudre de tête, dans l'obscurité, des problèmes assez complexes de géométrie plane ou spatiale. Je pense que mes contributions en Analyse et en Topologie sont toutes nées d'une vision géométrique, souvent très simple, des problèmes: Par exemple en Théorie du potentiel, c'est la géométrie du triangle qui m'a donné une des clefs de l'étude des grands principes de cette théorie.

Je me sens très proche d'Henri Lebesgue; lorsqu'il était jeune normalien et qu'on lui enseignait que les surfaces applicables sur le plan sont réglées, il sortait de sa poche un mouchoir ou un papier bien chiffonné et demandait à ses camarades "Cette surface est-elle réglée?" Ce mouchoir fut le point de départ de sa thèse et de sa théorie de l'intégration.

Plus tard, c'est la vue d'un mur de briques en construction, où il observa que ce mur comportait toujours des points de contact de 4 briques, qui le conduisit à la meilleure définition existante de la dimension topologique d'un continu.

Citons Lebesgue "Je veux dire ici que toutes mes recherches ont ce caractère commun de procéder d'une vue directe, et en quelque sorte géométrique, des problèmes étudiés". Et ailleurs "J'ai toujours été guidé dans mes recherches par des considérations géométriques ... ; il me semble que j'ai fait constamment des applications de la géométrie à l'Analyse".

Mais Lebesgue a fait aussi une autre remarque intéressante: "Non, ce n'est pas l'intuition qui trompe, c'est le fait de ne pas avoir assez d'intuition". Certes, mais on pourrait dire aussi: C'est le fait de ne pas vérifier pas à pas les suggestions de l'intuition; ce qui me conduit à rappeler une erreur célèbre de Lebesgue: Dans un de ses mémoires célèbres, il énonce que la projection de tout ensemble borélien est aussi un ensemble borélien, en utilisant la relation visiblement fausse $p(\cap_n X_n) = \cap_n p(X_n)$; son théorème était faux et l'erreur, relevée par Lusin, conduisit Lusin et Souslin à la belle théorie des ensembles dits analytiques. Erreur fructueuse donc, mais erreur quand même, née d'une insuffisance de vérification.

Les intuitions des bons chercheurs ne sont pas toutes géométriques, même lorsque comme André Lichnerovitch ils sont géomètres différentiels. Michel Talagrand a une intuition combinatoire qui s'est confirmée au cours de sa carrière; ses succès récents dans l'étude des processus gaussiens et des produits infinis de mesures sont dûs à cette intuition.

Laurent Schwartz a un type d'intuition difficile à classer; elle n'est certainement pas géométrique; il ne "voit" pas géométriquement dans l'espace et prétend qu'il ne voit que par le calcul, même s'il ne s'agit, par exemple, que de troncatures de polyèdres convexes réguliers. On pourrait qualifier son intuition de culturelle; il a en effet une vaste culture mathématique, qui figure dans sa conscience comme un ensemble de fils tendus entre de nombreuses théories (concrétisées par ses dossiers). Quand il cherche, il se réjouit de "sécher" en se disant que si ça résiste, c'est que c'est intéressant puisque ce qu'il connaît ne lui apporte pas de réponse.

On oppose parfois abstraction et intuition, en sous-entendant sans doute que l'intuition concerne le concret. Ce n'était certainement pas l'avis de Jean Dieudonné qui déjà, à propos de sa thèse, déclarait: "Dans les démonstrations de beaucoup de propositions de ce travail, je n'ai pas craint de faire appel à l'intuition géométrique". Mais surtout, dans un intéressant article de *Dialectica*, Vol.29, 1975, il étudie les liens entre abstraction et intuition:

"La qualité essentielle d'un mathématicien est l'imagination; la logique ne sert qu'à mettre les démonstrations sous une forme irréfutable, elle est incapable de les suggérer. L'imagination se fonde sur une sorte d' "intuition" des objets mathématiques étudiés, mais cela n'a que très peu de contact avec ce qu'on appelle d'ordinaire l'intuition sensible, les objets mathématiques considérés étant le plus souvent l'aboutissement d'un long processus d'abstraction qui leur ôte toute possibilité de représentation concrète. Cette "intuition" mathématique est avant tout le résultat d'une longue familiarité avec le sujet étudié; mais en outre il peut s'opérer des "transferts" d'intuition d'une théorie dans une autre; ... La première conclusion que j'en tirerai, c'est qu'il n'y a certainement pas une intuition en mathématiques; il y en a toute une série de fort diverses, avec des liens inattendus. La deuxième, c'est que les intuitions mathématiques ne sont pas du tout

stables, elles se modifient sans cesse par de nouveaux apports, de nouveaux résultats, de nouvelles idées Je crois que les progrès de l'intuition mathématique . . . , sont toujours allés de pair avec les progrès de l'abstraction mathématique".

Cette analyse de Jean Dieudonné est remarquable, et surprend aujourd'hui sous la plume de celui qui, onze ans plus tôt, dans l'introduction de son livre "Algèbre linéaire et géométrie élémentaire" (Hermann 1964) soutenait que l'enseignement de la géométrie élémentaire doit être basé sur l'algèbre linéaire. Il n'avait pas encore compris que l'intuition des objets de cette algèbre ne s'obtient que par un "transfert" progressif à partir de l'intuition géométrique, essentiellement visuelle, acquise par le maniement préalable de concepts issus du monde sensible, droites et parallélisme, distance, cercles, orthogonalité.

Les transferts d'intuition et de savoir-faire sont importants et même essentiels pour le progrès dans tout genre d'activité humaine; le psychologue Henri Pieron l'a bien souligné dans le "Traité de psychologie appliquée"; mais ils supposent toujours, bien sûr, une bonne maîtrise d'une activité initiale.

Le physicien Anatole Abragam en souligne l'importance, sans utiliser d'ailleurs le mot de "transfert": On sait bien que le renouvellement de la science se fait souvent aux points de contact de deux disciplines jusque là étrangères; comment alors un chercheur va-t-il utiliser dans une discipline l'intuition acquise dans l'autre; voici ce qu'en dit Abragam:

"Un chercheur qui s'est confirmé dans une discipline et qui en aborde une autre, peut retrouver l'enthousiasme de ses débuts Il n'y arrive pas les mains vides. Il apporte avec lui des concepts, des habitudes de pensée, des méthodes et des techniques qui lui permettent d'aborder des problèmes d'une façon nouvelle pour le laboratoire qui l'accueille. Il y a là une cross-fertilisation".

J'ai pu vérifier moi-même cette observation lorsque, en 1980, je commençai à me passionner pour un problème à la frontière de l'Analyse et de la Théorie des nombres, à savoir l'étude de la distribution des points $(\frac{3}{2})^n$ modulo 1 sur le cercle \mathbb{R}/\mathbb{Z} , et plus généralement les suites $(k\theta^n)$ modulo 1, où k, θ sont réels et $\theta > 1$.

Stratèges, tacticiens et les deux hémisphères du cortex.

Notre cortex est divisé en deux parties appelés hémisphères et réunies par le corps calleux de couleur blanche. Ce corps calleux a une importance considérable; si on le sectionne, les deux hémisphères deviennent presque indépendants; son importance est telle que si à la naissance il est peu développé, d'autres voies se créent entre les deux hémisphères. C'est son existence qui explique les correspondances notées par des écrivains et des poètes:

Baudelaire dans son sonnet "Correspondances"

"Les parfums, les couleurs et les sons se répondent
.....

Il est des parfums frais comme des chairs d'enfant,
Doux comme les hautbois, verts comme les prairies"

Rimbaud, jeune poète inspiré, dans le sonnet "Voyelles" écrit à 16 ans

"A noir, E blanc, I rouge, U vert, O blanc, voyelles,
Je dirai quelque jour vos naissances latentes".

Est-il utile aussi de rappeler les pages célèbres de Marcel Proust sur le flot de souvenirs que réveille le goût d'une madeleine?

Bien qu'il n'y ait pas de certitude absolue sur les rôles respectifs des deux hémisphères, de nombreux neurologues sont assez d'accord sur les faits suivants (chez les droitiers) révélés par l'observation des blessés et par la tomographie:

Relèvant de *l'hémisphère gauche* les processus déductifs linéaires; la pensée logique et analytique; les capacités linguistiques; apprentissage, production et compréhension du langage: Ceux, en gros où excellent les *tacticiens*. Cet hémisphère est bien adapté à la vie quotidienne, mais il est trop critique et sans grande intuition ni créativité. Ce que mesurent les tests de *IQ* sont essentiellement les performances de cet hémisphère.

Relèvant de *l'hémisphère droit* l'imagination, la reconnaissance des formes, la créativité, les associations d'idées multiples, les fonctions intellectuelles non verbales et un traitement global des informations. C'est l'hémisphère des *stratèges*. Il jouerait peut-être un rôle dans l'élaboration des rêves. Cet hémisphère voit le monde sous des couleurs parfois déplaisantes et hostiles.

Le droit invente, le gauche enseigne ces découvertes, en parle rationnellement, les met en forme. Mais cette dichotomie ne doit pas être exagérée; en particulier, il peut y avoir substitution de leurs activités en cas de besoin, par exemple lors de la lésion d'un hémisphère. Et surtout le progrès scientifique exige la collaboration de deux tels hémisphères, qu'ils appartiennent tous deux à un même individu, ou à deux individus qu'on pourrait appeler complémentaires: C'est peut-être là l'explication du succès de la collaboration de certains couples de chercheurs, dont le plus fameux fût sans doute le couple Einstein, Mileva Marić, en 1903-1905, avant même leur mariage; Einstein ayant les idées, Mileva les discutant et apportant sa virtuosité mathématique.

Certes les caractéristiques respectives des deux hémisphères que je viens d'évoquer font en peu trop penser aux affirmations gratuites des voyantes extra-lucides. Toutefois pour chacun d'eux le faisceau de ces caractéristiques semble assez cohérent et suggère l'intérêt d'une étude expérimentale des corrélations entre les compétences supposées d'un même hémisphère et des corrélations croisées entre les deux hémisphères.

Il semblerait en tout cas que chez les bébés et les jeunes enfants ce soit l'hémisphère droit qui domine.

Il est probable aussi que le style des recherches d'un mathématicien révèle la prédominance d'un de ses hémisphères; c'est ainsi que je déciderais volontiers que mon hémisphère dominant est le droit: Goût de la poésie, de la rêverie, difficultés linguistiques (je conçois facilement, mais souffre pour mettre en forme mes pensées). Il semble que, l'âge venant, mon intuition géométrique s'exerce encore sur de nombreux îlots assez représentatifs d'un champ assez vaste, mais que la mise en ordre, puis en forme, de ces observations intérieures demanderait des dons de tacticien qui me font défaut. C'est pourquoi la plupart de mes travaux ont concerné des structures si simples à mes yeux que j'ai de chacun d'eux une vision immédiate et facilement communicable: "C'est trivial" ai-je envie de dire quand j'en parle; par contre les deux seuls articles assez techniques que j'aie publiés m'ont coûté de pénibles efforts de rédaction, bien que leur conception ne m'ait pris que quelques heures:

Je souffre assez peu pour préparer une conférence, mais incomparablement plus pour la rédiger!

Facteurs propices à la création

Jeunesse.

Neurones et faisceaux de neurones sont encore presque intacts, énergie nerveuse et sexuelle à son summum (pensons à Einstein et Mileva), *aptitude* à une concentration prolongée, curiosité encore fraîche, un cerveau peu encombré par les préjugés du passé:

Newton à 23 ans, en 1666, fait les trois découvertes qui lui assureront l'immortalité.

Einstein à 26 ans, en 1905, fait lui aussi trois de ses plus belles découvertes.

Motivation.

La motivation, née d'une pulsion intérieure, soutenue d'abord par l'approbation d'un maître et l'estime des pairs mais soutenue ensuite par les défis, intérieurs ou extérieurs, par le plaisir de faire fonctionner son cerveau et, pourquoi pas, par l'espoir de laisser un nom célèbre, ainsi que nous le confie André Weil "Dès mon jeune âge, j'ai espéré que mon travail aurait une certaine place dans l'histoire des mathématiques. N'est-ce pas une motivation aussi noble que de prétendre au Prix Nobel?"

En ce qui me concerne je voudrais dire que ma motivation a toujours été le plaisir de créer de belles mathématiques, utiles ou simplement élégantes, et d'avoir l'approbation de mes pairs. Puis-je ajouter que j'ai souvent été étonné que la société me donne un salaire convenable pour une activité qui me procure tant de plaisir, alors que nombre de mes contemporains reçoivent un salaire très inférieur pour un travail répétitif et ennuyeux.

L'enthousiasme, la joie de la création, les instants brefs mais inoubliables des illuminations, sont le véritable aiguillon du chercheur. Que Dieu a dû bien s'amuser pendant les six jours de la création, mais quel ennui après le jour de repos!

En Mai 68, j'ai entendu des étudiants, mécontents de leur passivité dans les salles de cours, dire à leur professeur: "Nous avons tous le droit de faire de la recherche; dites nous ce qu'il faut faire et nous le ferons". Je vois dans cette déclaration à la fois une critique des cours magistraux, et aussi une méconnaissance des facteurs qui soutiennent l'activité du chercheur, en particulier succès et enthousiasme qui s'engendrent mutuellement. Comme le dit le physicien George Charpak "Si la vie d'un chercheur se résume à exécuter des tâches qu'il ne trouve pas intéressantes, autant entrer dans l'industrie". (C'est d'ûr pour l'industrie!)

Facteurs sociaux, émulation.

Je voudrais revenir un instant sur le rôle des facteurs sociaux, de l'émulation et des challenges. Que la recherche en sciences expérimentales, avec ses laboratoires et ses équipes ait besoin d'une société bien organisée est une évidence. Mais c'est vrai aussi de la recherche mathématique, et pas seulement à cause de l'utilisation *avérée* des ordinateurs et du développement du travail en équipe; c'était vrai déjà du temps d'Euclide et d'Archimède où les Académies, le soutien de princes éclairés, l'échange de lettres, constituaient une stimulation indispensable; c'était vrai au 17^e siècle où le Père Mersenne, conscient de ce besoin, se fit la boîte-aux-lettres mathématique de l'Europe. La recherche mathématique a commencé avec la naissance des grandes villes!

Un Robinson Crusoe, mathématicien avant son naufrage, et encore productif sur son île, est-il crédible?

Jusqu'à quand notre République étouffera-t-elle l'éclosion des talents dans nos écoles de toutes niveaux en luttant, par la loi et par des mesures de fausse démocratisation contre émulation et compétition; ce n'est pas seulement sur les stades que la compétition est indispensable!

Les excitants.

J'ai mentionné déjà l'importance pour Einstein au début de ses travaux, de ses liens amoureux avec Mileva. Il y eut alors une conjonction heureuse de cet amour mutuel et de l'excitation cérébrale apportée par leur collaboration.

Une relation amoureuse peut donc être un facteur favorable à la recherche, mais elle est rarement neutre et peut au contraire avoir un effet déstabilisant.

Puis-je rappeler enfin l'importance du thé et du café? Lorsque mon ami Marcel BreLOT, après une période de dure recherche sans succès sentait que cependant il avait en mains tous les atouts, il s'enfermait dans son vaste bureau de l'Institut Fourier de Grenoble et se faisait une tasse de thé fort pour provoquer le déclic, l'illumination cherchée car, disait-il, les découvertes se font lors de pointes de l'activité cérébrale, après un long travail de défrichage. (Mais aucune tasse de thé ne transformera un champion du 100 m en marathonien.)

Est-il nécessaire de souligner ici l'illusion de l'efficacité de "drogues" pour réussir en recherche? Je ne connais aucun chercheur scientifique dont les découvertes aient été faites sous l'emprise de la drogue.

Facteurs défavorables

Age.

Les soucis, la fatigue physique ou nerveuse, et l'âge: à 30 ans le travail vous tire en avant, à 70 il faut le tirer, et c'est difficile! Mais si un âge avancé n'est jamais favorable à la découverte, une meilleure hygiène alimentaire, de meilleures relations scientifiques allongent la période de productivité des mathématiciens. Sans donner de chiffres précis, disons seulement qu'à 60 ans ou même un peu plus, ils peuvent encore faire des travaux de qualité honnête et rendre des services à la communauté mathématique s'ils acceptent de ne pas utiliser leur notoriété pour soutenir abusivement des recherches qui prolongent les leurs.

Et puis parfois, une bonne surprise, telle celle d'Apéry qui à 61 ans démontra l'irrationalité de $\zeta(3)$.

Les pertes de performance ont des causes exactement opposées à celles qui favorisent la jeunesse:

Détérioration des neurones, perte de mémoire et baisse de l'intuition ; moins bonne irrigation sanguine, pulsions amoureuses diminuées. Impression de "déjà vu", d'où motivation moins grande; et après tout, on a déjà une certaine célébrité qu'on ne peut espérer accroître!

Mais surtout, tous les fils-à-la patte: Comités de rédaction, assemblées générales, lettres de recommandation, ... qui *grignotent* le temps et l'énergie. Voyons sur un exemple célèbre comment vieillissait un mathématicien au début de ce siècle; dans une des lettres de Lebesgue à Borel, retrouvées dans les sous-sols de l'Institut H. Poincaré, Lebesgue écrit ceci, alors qu'il n'avait encore que 35 ans:

"Mon cher ami, ce n'est pas par coquetterie que je dis que je baisse. Je sais fort bien que depuis 5 ans je n'ai rien fait de nouveau ... C'est à une place de Recteur que j'aurais dû être candidat."

Il avait fait sa théorie de l'intégration à 27 ans, et son travail sur les fonctions représentables analytiquement à 30 ans.

Mais il faut savoir aussi quelle était sa vie: Mauvaise santé familiale, préoccupations de carrière, gêne financière, début de sa polémique avec Borel.

Blocages, collectifs ou individuels.

Il y a des blocages *collectifs*: Celui lié au *postulatum* d'Euclide n'a commencé à céder que le jour où on a commencé à en douter; il avait duré plus de 2000 ans. Ceux liés à la notion d'infini, actuel et potentiel; les vaines disputes de caractère parfois métaphysique concernant l'infini ne furent balayés que par les premières définitions de Cantor, en particulier celle de bijection.

Tout déblocage est comme l'ouverture d'une vanne, qui laisse couler l'eau à grands flots, l'eau qui apporte une vie nouvelle: Géométrie non-euclidienne et les travaux de Poincaré; la théorie des ensembles et tout un pan des mathématiques modernes.

Les blocages collectifs, et surtout ceux qui durent des siècles sont dûs au conservatisme de l'esprit humain: L'homme a tendance à prendre pour des vérités intangibles ce qu'il a appris dans son enfance et qu'il transmet à ses enfants. Pour sortir du sillon de la tradition, il a besoin de l'aiguillon de la nécessité, les impasses d'une science, la rencontre d'un petit fait qu'aucune théorie admise ne peut expliquer.

Il faut se méfier des modes, des grands gourous, rechercher les fleurs vénéneuses, ... et changer nos méthodes d'enseignement. On peut rêver à ce que serait l'évolution de la science si n'existaient pas ces longs blocages collectifs; mais peut-être Dieu après le 7^e jour fût-il un peu machiavélique et a-t-il, depuis l'épisode de la pomme, prévu des blocages comme garde-fous contre une évolution trop rapide de l'humanité!

Mais il y a aussi des blocages *individuels*, même chez les créateurs authentiques; nous retrouvons ici Lebesgue:

L'observation d'un petit fait, son mouchoir chiffonné l'avait conduit, après avoir précisé la théorie de la mesure de Borel, à définir la notion d'intégrale de certaines fonctions mesurables, mais l'histoire serait trop simple s'il avait, du premier coup, défini les fonctions intégrables quelconques. Lui aussi est resté pendant des années esclave de la tradition: L'intégrale de Riemann supposait les fonctions bornées; Lebesgue conserve cette restriction dans sa thèse de 1902; en 1905, à propos des fonctions non bornées il écrit encore à Borel "Il est si difficile d'attaquer ces maudites fonctions"; et alors qu'en 1908 l'obstacle semble tout à fait surmonté, il en reste encore des traces dans ses "Leçons sur l'intégration" de 1928, comme si dans son esprit les fonctions intégrables non bornées étaient un luxe, une curiosité; et pourtant le théorème de Riesz-Fischer qui s'exprime en termes de fonctions non-bornées avait été publié en 1907.

Comment éviter les blocages? L'humanité va-t-elle répéter l'erreur catastrophique qu'elle a faite pendant 15 siècles en acceptant comme canonique l'enseignement d'Aris-

tote, erreur qui n'a cessé qu'après le choc, psychologique, technique ou scientifique qu'a constitué la rencontre avec d'autres civilisations, par les croisades, Marco Polo, Christophe Colomb?

Aujourd'hui deux faits nous protègent peut-être des blocages: communication et information rapides, et l'accroissement considérable du nombre des chercheurs.

La probabilité de blocage existe encore, mais elle restera minime si l'on sait se méfier des modes et des gourous. Le grand gourou mathématicien de notre temps est Bourbaki; son porte-parole le plus connu, Jean Dieudonné, a laissé croire, en insistant sur "Le choix bourbakiste", que c'était l'unique choix, et que les disciplines naissantes ne méritaient pas l'attention tant qu'elles n'étaient pas structurées en un bel échafaudage formalisable.

Or les clefs de l'avenir, celles qui vont peut-être nous donner une nouvelle façon de regarder le monde existent peut-être dès aujourd'hui à l'état de germes; laissons les germer. Ce sont ces concepts nouveaux qui constituent les mutations humaines de notre temps.

Citations.

Vérités établies et gourous. Il faut parfois déboulonner les statues trop imposantes, y compris notre statue intérieure. On peut s'aider, un temps, des épaules des plus grands, mais il faut être soi-même dès qu'on se sent assez fort. Plusieurs penseurs, venus d'horizons différents l'ont excellemment dit:

KRISHNAMURTI: "Toute autorité aveugle *et tue*". Il rejette les gourous et refuse d'en être un; il dit d'un de ses visiteurs "Il avait tant lu qu'il lui était difficile de savoir où commençait sa propre pensée".

MACHADO: "Marcheur, le chemin, ce sont tes traces et rien de plus. Marcheur, il n'y a pas de chemin; c'est toi qui le traces en marchant."

GIDE: "Nathanael, jette mon livre, ne t'y satisfais point. Ne crois pas que ta vérité puisse être trouvée par quelqu'autre".

LAVELLE, lui aussi s'élève contre les dogmes: "Il n'y a rien que nous ayons pensé une fois pour toutes et qui soit tel qu'il suffisait d'en garder la mémoire et de le convertir en règles".

C'est dire qu'il n'y a pas de vérité; c'est sa recherche qui importe. L'architecte et le maçon sont plus précieux que le monument qu'ils ont édifié!

Les dons

Unicité des hommes, dons et génie.

Chaque homme est unique, irremplaçable. Nous classons trop souvent nos contemporains suivant des critères utilisant un très petit nombre de paramètres, les maigres et les gros, les honnêtes et les malhonnêtes, les bons en gymnastique, les forts en thème, etc.: classement certes facile mais qui occulte, de chaque individu sa richesse, sa diversité, son unicité en un mot; car on sait maintenant, après la mise en évidence et le comptage des gènes, des groupes sanguins (dont le système HL-A) et des mutations des

acides aminés, qu'au sens biologique il n'y a pas deux hommes identiques, même si ce sont de vrais jumeaux, et que ce serait vrai encore si l'humanité était mille fois plus nombreuse. Mais c'est autre chose d'en prendre une pleine conscience.

Combien apparaît misérable, dans cette lumière, le racisme, linguistique, social, religieux, ethnique ou tribal. Il y a racisme parce que l'Autre dérange nos habitudes, et nous obligerait pour le comprendre à sortir de notre cocon, aussi inconfortable soit-il. Si nous en prenons une pleine conscience, nous devons en assumer toutes les conséquences: Une ouverture totale envers tous les êtres, mais aussi puisque chacun de nous constitue une synthèse unique ne serait-ce que par notre sensibilité et notre vision du monde, comprendre que notre devoir envers nous-mêmes doit être de faire fructifier au mieux notre unicité.

Puisque chaque homme est unique, il mériterait que tous les chercheurs du monde se penchent sur lui pour l'étudier; mais de cette synthèse unique, ne nous frappent souvent que les facettes les plus brillantes et les plus rares, qu'on appelle des *dons*. Il s'agit de caractéristiques humaines, physiques, intellectuelles ou morales considérées comme souhaitables: Beauté, force, adresse, grâce, amabilité, *dévouement*, résistance physique, persévérance, mémoire, etc. ... Ce sont ces dons que les bonnes fées des contes apportent dans le berceau des jeunes princesses; mais on sait aussi que de vieilles sorcières jalouses apportent de leur côté des anti-dons, que l'on appelle des mauvais sorts: Paresse, jalousie, esprit brouillon, laideur, etc. ...

Lorsqu'un don se manifeste avec une intensité exceptionnelle, et surtout chez un jeune sujet, il frappe d'étonnement ceux qui en sont les témoins et on use, et abuse, du mot *génie*. Quant à moi, je serais tenté de n'appliquer ce qualificatif qu'à ceux dont l'action a déterminé une mutation de l'humanité: des savants, philosophes, artistes, musiciens, poètes, mais aussi des fondateurs des grandes religions.

Mais où s'arrête l'échelle des génies? William James disait: "Le génie n'est guère plus que la faculté de percevoir sur un mode inhabituel"; à ce compte, tout mathématicien ou scientifique, créateur d'une nouvelle notion féconde serait génial, ce qui certainement ne lui déplairait pas! Je préfère donc parler de dons exceptionnels; ces dons se manifestent presque toujours dans la jeunesse.

Certains enfants manifestent une précocité exceptionnelle pour parler, lire, écrire, mais ce don ne préjuge d'ailleurs nullement de leurs aptitudes d'adultes. D'autres, très jeunes encore telle Anne Frank, tiennent un journal intime qui nous *émeut* encore. J'ai un collègue qui, dans sa jeunesse, avait un tel besoin de s'exprimer qu'il payait sa soeur cadette pour qu'elle l'écoute parler. La plupart des mongoliens ont reçu, par leurs gènes, le don d'une affection débordante. Certains enfants *artistes* gardent en mémoire, avec leurs dates, le détail des jours passés. *Mais* les calculateurs prodiges n'ont presque tous (si l'on excepte Gauss et quelques autres) en dehors du calcul que des capacités intellectuelles moyennes.

Mais revenons aux très grands, dont il est agréable et réconfortant d'égrener quelques noms; ce furent toujours des êtres d'une grande intelligence, en dehors même de leur orientation maitresse.

Un grand conquérant, Alexandre, élève d'Aristote, meurt à 33 ans après avoir en 12 ans conquis un immense empire, de la Macédoine à l'Indus.

Des musiciens dont les dons se manifestent très tôt: Mozart à 4 ans, Beethoven, Chopin à 7 ans, Prokofiev avant 9 ans.

Des peintres, sculpteurs, architectes: Bruegel l'Ancien, Michel-Ange, Léonard de Vinci, Van Gogh, Picasso, etc. ...

Des philosophes comme Pic de la Mirandolā, proclamé à 10 ans "Prince des orateurs et des poètes", mort à 31 ans, laissant une oeuvre immense.

Pascal, mathématicien, physicien et philosophe, célèbre dès l'âge de 16 ans, créateur du calcul des probabilités avec Fermat, et de la machine arithmétique.

Descartes, créateur du lien entre géométrie et algèbre, et auteur du "Discours de la Méthode".

Newton, mathématicien et physicien crée entre 22 et 23 ans la théorie moderne des couleurs et le calcul des fluxions pour développer la théorie de l'attraction universelle et poser les bases de la mécanique rationnelle.

Leibniz, créateur universel, qui partage avec Newton la gloire de la création du calcul différentiel et qui, à 15 ans formule ses premières idées sur la logique.

Einstein que l'on cite souvent comme exemple d'un génie de première grandeur qui n'a pas manifesté précocement ses dons, publia pourtant, à 26 ans, trois mémoires fondamentaux qui changèrent la physique: Relativité restreinte, effet photo-électrique, mouvement brownien.

En mathématiques, la liste est longue de ceux que nous admirons:

Les Bernoulli, exemple remarquable d'hérédité (8 en 3 générations) dont certains allaient vers les mathématiques comme les alcooliques vers leur drogue.

Euler, élève de Jean Bernoulli qui sera à 16 ans professeur à l'Ecole d'Artillerie de Turin et décidera à 17 ans, malgré son père, de se consacrer aux mathématiques.

Laplace qui, très jeune avait déjà une mémoire prodigieuse.

Monge, géomètre né, professeur de physique à 16 ans.

Gauss, mathématicien, physicien, astronome et calculateur prodige, dont le génie exceptionnel se manifeste très tôt.

Galois mort à 21 ans, et Abel mort à 27 ans, les deux cadets des mathématiques, à la trajectoire courte mais fulgurante.

Poincaré, esprit universel, issu d'une famille distinguée, doté d'une mémoire puissante, et dont la passion mathématique débuta à 15 ans.

Cantor, créateur de la théorie des ensembles, dont les dons se manifestèrent vers 15 ans.

Ramanujan, fils de l'Inde, autodidacte, énonça sans preuve de nombreuses identités remarquables entre séries, si cachées que toutes n'ont pas encore été démontrées.

Cette courte liste ne contient aucun nom de femme parce qu'elle concerne une période où il était encore malséant pour une femme de consacrer son énergie à une oeuvre scientifique ou même artistique, et où de plus l'éducation était le privilège de classes aisées; on ne peut cependant pas oublier la lutte que dût mener la jeune Sophie Germain pour étudier les travaux de Gauss et lui adresser ses propres résultats en théorie des nombres et sur les surfaces élastiques; ni les travaux plus connus encore de Sophie Kovalevskaja, lauréate à 28 ans de l'Académie des Sciences.

Hérédité et génétique des dons.

J'entends par hérédité la transmission de certaines caractéristiques d'un couple, animal ou humain, à sa descendance; et par génétique la détermination des caractéristiques d'un individu par le génôme de l'oeuf fécondé d'où il provient. L'hérédité ne détermine

qu'en partie ce génôme, puisque la loterie génétique intervient au moins à deux étapes de sa formation.

Cependant n'existerait pas de sélection des animaux domestiques si l'hérédité ne déterminait pas fortement chez ces animaux leurs traits physiques et certains traits du comportement; n'existeraient pas la race des percherons et celle des pur-sang, les teckels ni les Saint-Bernard.

Il n'y a aucune raison pour qu'il en soit autrement dans l'espèce humaine; de fait il est rare que les fils de deux parents longilignes soient petits et trapus, ou inversement; ou, de façon plus frappante encore, qu'une fille de paysans chinois soit une blonde aux yeux bleus. J'ai eu au lycée un camarade qui était petit, rond, de caractère aimable et s'appelait Triboulet; son père, son frère et sa soeur étaient petits, ronds et souriants!

La transmission par hérédité de caractères physiques dans l'espèce humaine ne fait donc pas de doute; c'est là l'origine de la notion de race, basée sur un tout petit nombre de traits physiques.

Il en va tout autrement de la transmission des traits de caractère et surtout de ce que l'on peut appeler les dons intellectuels.

S'il est vrai que pendant les deux derniers siècles s'est produite en Chine une stagnation des innovations scientifiques et techniques, la cause en est culturelle et sociale, mais non raciale; pendant des millénaires sa civilisation avait ébloui les explorateurs, tel Marco Polo, et ses apports à la science et à la technique étaient fondamentaux. Et depuis son récent réveil, elle commence à produire des chercheurs de très haut niveau international, annonceurs peut-être d'un avenir culturel et scientifique de premier plan.

Il est donc possible, bien qu'une preuve scientifique n'existe pas encore, que tout don intellectuel soit la résultante d'une coexistence harmonieuse d'un petit nombre de gènes, ou encore une synergie non contrariée par l'existence d'anti-dons; on chercherait donc en vain à localiser sur un gène, un don pour les mathématiques ou même un penchant pour les sciences.

Il existe cependant des lignées célèbres de peintres, de musiciens (les Bach, Strauss). En mathématiques, les Bernoulli sont un exemple éclatant et assez mystérieux d'une telle lignée; je ne vois pour l'expliquer sans faire intervenir la vertu de l'exemple, de l'émulation, et de l'environnement, que l'existence dans le génôme du premier grand Bernoulli, d'une assemblée de gènes dominants, responsable de ses dons mathématiques, et si fortement soudés que la probabilité de sa transmission sur trois générations n'était pas négligeable.

Certes la probabilité pour qu'un couple ait un enfant doué est plus grande si ce couple est lui-même doué que s'il ne l'est pas; mais cette condition n'est ni nécessaire, ni suffisante; il existe des exemples fameux de très grands hommes issus de parents ne brillant par aucun don:

Le père de Newton était "sauvage, extravagant et faible"; sa mère était simplement économe, travailleuse et bien organisée.

Laplace était le fils de pauvres paysans normands.

Le père de Gauss était un homme tout ordinaire; toutefois sa mère était une femme remarquable.

La première épouse et collaboratrice d'Einstein, Mileva Marić était une femme exceptionnelle par son énergie, son enthousiasme et ses dons mathématiques; et cependant, de leurs deux fils, le premier Hans Albert (né en 1904) devint simplement ingénieur, puis

professeur d'hydraulique; et le second, Edward (né en 1910), très *doté* dans son enfance, devint schizophrène à 19 ans; sa ressemblance *physique* avec son père était frappante; il mourut à 55 ans.

Le développement du cerveau est différent chez l'homme et chez les animaux; chez ceux-ci les premières semaines et même parfois les premières minutes de la vie ont une importance considérable. Les travaux sur les oiseaux de Heinroth (1910) puis de K. Lorenz (1935) ont montré que le premier objet mobile aperçu pendant une période critique de quelques heures ou même de quelques minutes chez certaines espèces peut devenir définitivement un objet-parent ou même un objet sexuel.

Chez les chatons dont on empêche les paupières de s'ouvrir pendant quelques semaines, les connections des neurones optiques dégénèrent ou ne s'établissent pas, et le chaton devient définitivement aveugle.

Ces conclusions ne s'étendent pas sans précautions aux jeunes humains, sans doute parce que dans leur cerveau le nombre de synapses potentielles ou déjà établies est si grand que, par des voies indirectes peuvent s'établir, même tardivement, des faisceaux supplétifs de neurones. Toutefois l'observation des "enfants sauvages" au cours des derniers siècles montre que contrairement au *Mowgli* de Kipling, ces enfants ont été incapables d'acquérir un développement physique et mental normal.

Il est donc clair que l'éducation familiale d'abord, puis l'école et la société jouent un rôle essentiel dans la formation du cerveau et la maturation d'un don d'origine génétique: "Lorsqu'une semence tombe sur un terrain pierreux, elle lève mais dès que le soleil paraît, elle est brûlée et sèche faute de racines".

Mais comment reconnaître les enfants *dotés* puis, les ayant reconnus, quelle éducation leur donner? C'est la grande responsabilité à la fois de leur famille et de l'école.

Les Américains, souvent excessifs, ont créé à côté de leurs écoles publiques assez médiocres, des écoles pour *surdotés*, dont la réussite est fort contraversée.

En France des gouvernements successifs, mus par un faux esprit démocratique ou par démagogie, ont prétendu vouloir donner à tous, les mêmes chances de succès, et ont pour cela rendu obligatoires les classes indifférenciées, néfastes pour les enfants au rythme lent, et désastreuses pour les enfants *dotés*. Il faut se réjouir que la pression conjuguée de certains enseignants et des familles a conduit à certains palliatifs, mais la loi, même absurde, reste la loi: L'erreur a la vie dure. Alors que le but de l'école devrait être de développer au mieux les possibilités, parfois très différentes, des enfants, la loi slogan actuelle pourrait s'énoncer "Tous les enfants doivent recevoir la *même* éducation".

Je ne saurais mieux conclure mon éloge de la "différence" que par cette citation de Lavelle:

"Si l'on veut que tous les hommes soient semblables, ils ne cesseront de se heurter et de se haïr; ... sinon chacun d'eux sera pour tous les autres une révélation et un soutien".

Epanouissement d'un don.

Il ne suffit pas d'avoir un don à la naissance; encore faut-il qu'il puisse se développer, fructifier et ne soit pas "laissé sous le boisseau". Que de dons perdus chez les bébés chinois pendant les deux derniers siècles de décadence de l'empire chinois!

Un minimum de mémoire est indispensable; Einstein se plaignait de la sienne, mais apparemment elle était suffisante; et inversement une mémoire non sélective peut encombrer l'esprit, comme le soulignait Krishnamurti parlant d'un de ses visiteurs.

Il faut certes, de la curiosité et de l'imagination, mais aussi de la suite dans les idées, de la persévérance et un travail soutenu – avant et après l'illumination espérée; celle-ci lorsqu'elle se produit doit être une "ivresse maîtrisée".

Une certaine forme de culture est indispensable, acquise non de façon passive, mais avec appétit, avec l'objectif plus ou moins proche de l'utiliser dans la recherche en cours. En un siècle où les mathématiques accèdent à l'unité, où les sciences expérimentales ont à se préserver de certains effets néfastes d'un réductionnisme pourtant nécessaire, une telle façon active d'acquérir de la culture semble être la plus efficace. Topologie et géométrie algébriques, variétés différentiables et groupes de Lie, ont tissé des liens féconds avec la physique et chacune de leurs facettes est vitalisée par les autres; ces liens doivent être présents dans le subconscient et dans la mémoire consciente de tout chercheur, ne fut-ce qu'à l'état d'ébauches.

Certes il n'est ni possible ni souhaitable de définir des règles précises pour développer un don, car l'originalité du chercheur doit aussi consister à découvrir son propre cheminement: "Marcheur; il n'y a pas de chemin; c'est toi qui le traces en marchant".

Poisons de la création.

A côté des dons il y a les anti-dons, dont les enseignants et les chercheurs doivent se méfier.

- Soit internes tels que manque de vitalité, manque de confiance en son étoile, fragilité psychologique pour trop de sensibilité aux coups inévitables de l'environnement: Un créateur doit avoir une âme robuste et savoir, quand il le désire, protéger du monde extérieur son activité de recherche.
- Soit externes comme les pressions familiales pour imposer à un jeune ^udonné une profession qui lui déplaît. Que de savants illustres n'ont échappé que par miracle ou par leur force de caractère à de telles pressions; mais nous ne connaissons jamais ceux qui n'ont pas eu cette chance.
- Poison aussi, bien que plus subtil, l'effet que j'ai déjà souligné, néfaste après avoir été fécond, d'une grande synthèse de concepts présentés comme des vérités immuables. Les gourous, quelle que soit leur valeur personnelle, ne doivent être écoutés que d'une oreille; mais bien sûr, les plus dangereux sont les "petits gourous" et ceux qui se complaisent dans ce rôle.

Il faut savoir *donner congé aux dogmes*.

En présence d'un jeune ^udonné, le devoir d'un maître à quelque niveau que ce soit, doit être seulement de l'aider à se mieux connaître, et à trouver seul sa voie.

La lumière sous le boisseau.

Nous avons pris l'habitude de publier dès que possible tout résultat scientifique, avant même parfois d'en avoir une preuve écrite, détaillée et convaincante; la compétition internationale, accentuée par la rapidité des communications électroniques, ainsi que par les règlements des jurys d'évaluation, en sont en grande partie responsables.

Il n'en a pas toujours été ainsi: Sans avoir le goût du secret aussi poussé que l'école Pythagoricienne, les mathématiciens du 17^e siècle n'annonçaient souvent leurs découvertes que sous forme de cryptogrammes ou de problèmes signés d'un pseudonyme.

Souvent aussi, leur amour propre d'auteur se contentait de l'estime de quelques amis ou correspondants au courant de leurs recherches. Il faut dire que les revues scientifiques n'existaient pas encore, d'où le rôle important d'un altruiste éclairé comme le Père Mersenne.

C'est peut-être là qu'il faut voir la raison principale du retard de la publication par Newton de sa "Méthode des fluxions" et surtout de ses "Principes mathématiques de la philosophie naturelle" qu'il ne se décida à rédiger que sous l'amicale insistance de Halley, pour paraître en 1686, donc 20 ans après leur création.

Plus de 130 ans plus tard, Gauss allait récidiver. Plusieurs de ses découvertes, telles que les propriétés des fonctions elliptiques ou le critère d'analyticité des fonctions continues, restèrent enfouies, souvent à l'état d'esquisse ou sous forme cryptique dans son journal personnel publié seulement 62 ans après sa mort. Pourquoi tant de richesses cachées? Certes, avant l'âge de 20 ans il avait tant d'idées que le temps lui manquait pour les développer; mais il semble établi qu'il considérait comme secondaire la publication de résultats que seule une motivation intérieure puissante l'avait conduit à formuler et à démontrer. Pareil désintéressement ne semble pas menacer aujourd'hui le monde mathématique et on peut s'en réjouir si l'on désire que continue l'actuel développement explosif des mathématiques. Encore faudra-t-il veiller à ce que la qualité ne soit pas étouffée par la quantité, et à préserver l'unité féconde de l'édifice mathématique en développant un réseau de diffusion et de synthèse accessible à tout bon chercheur.

Amour et idée intérieure

Me voici bientôt parvenu au terme de ma trop longue réflexion sur les processus mentaux de la création: Trop longue mais cependant très incomplète puisque l' "homo creator" est un être complexe et qu'ainsi la seule création mathématique, par exemple, ne peut être bien comprise, à la fois dans un seul cerveau ou dans le mégacerveau de l'humanité tout entière, que par ses interactions avec les autres modes de création, musicale, artistique, poétique, etc. ...

Si l'on définit l'amour d'un être humain comme un élan mental de cet être vers un objet, inerte, animé ou purement conceptuel, on pourrait dire que toute création est mue par un amour. Mais je préfère, lorsque cet objet est purement conceptuel, reprendre pour cet amour le nom d' "idée intérieure": Cette notion a été formulée par Nietzsche, après le peintre allemand Caspard David Friedrich, et reprise récemment par J. Harthong pour l'appliquer à G. Reeb dans son article "Comment j'ai connu et compris Georges Reeb". Friedrich affirmait: "Il existe un sentiment esthétique spontané qui permet à l'artiste de sentir en lui-même ce qu'est *le beau* et ce qu'il *doit* représenter". C'est donc un sentiment personnel, une pulsion subjective qui dicte la voie à suivre; c'est donc lui qui aide le marcheur de Machado déjà cité, à trouver son chemin en marchant.

Le beau-conté de Paulo Coelho "L'alchimiste" est une belle illustration du développement d'une idée intérieure: Les suggestions voilées que son jeune berger reçoit de mystérieux vieillards, y apparaissent comme les pulsions d'une voix intérieure:

"Tu dois essayer de vivre ta légende personnelle."

"Quand tu veux quelque chose, tout l'univers conspire à te permettre de réaliser ton

désir."

"On a toujours la possibilité de faire ce que l'on rêve."

Une idée intérieure puissante est en général liée à un don – par exemple une mémoire exceptionnelle dans le cas de calculateurs prodiges. Elle peut exister et se manifester très précocement, comme chez Mozart; mais souvent elle est d'abord imprécise et même multiforme, puis elle se précise et se nourrit par l'expérience, pour se manifester enfin dans une trajectoire éblouissante.

Une étude approfondie de la formation de l'idée intérieure chez les grands hommes du passé permettrait de comprendre mieux les rôles respectifs des dons d'origine génétique et de l'environnement; les matériaux pour une telle étude ne manquent pas; ils illustrent de façon convaincante la puissance et l'efficacité des idées intérieures, par exemple celles des fondateurs de grandes religions, Bouddha, Jésus, Mahomet, ou d'hommes dont le charisme était si puissant qu'il pouvait entraîner tout un peuple.

Aussi les exégètes et les Pères de l'Eglise, surtout préoccupés par l'aspect messianique de Jésus, me semblent-ils avoir trop négligé les facteurs de formation de son idée intérieure: Equilibre, dons de synthèse, vision de plus en plus claire de sa mission, contacts encore mal connus avec les Esséniens, mais surtout l'importance, non plus seulement de l'Ancien Testament, mais d'un amour pour tous les hommes qui ira lorsque l'affrontement avec les prêtres du Temple lui apparaîtra comme inévitable, jusqu'à lui faire préférer sa mort à la violence.

Une étude comparative de la formation des idées intérieures des fondateurs des grandes religions permettrait de mieux comprendre l'évolution de ces religions et leurs facettes actuelles, comme si le présent était la fleur épanouie du bouton qu'elle fût voici plus d'un millénaire.

Les exemples fameux d'idées intérieures puissantes ne manquent pas:

Celles des grands mystiques, des martyrs et des grands saints, mais aussi sous une forme pervertie, celles des fanatiques politiques ou religieux.

Celle de Mahâtma Gândhi qui, à mains nues, mais avec une volonté inflexible, a fait céder le puissant Empire anglais.

L'idée intérieure d'Alexandre le Grand, dont il prit progressivement conscience, au fur et à mesure de sa progression vers l'Est, était le rêve d'une synthèse des cultures grecques et orientales.

Celle de Newton, qu'il a résumée dans cette courte phrase: "Je ne forme pas d'hypothèses", exprimant ainsi sa réaction contre la tendance de nombreux savants de son temps, à vouloir expliquer le monde par des explications a priori et des théories non basées sur l'expérience, telle la théorie des tourbillons de Descartes.

Celle d'Einstein qui, vers 15 ans, cesse d'être simplement un bon élève un peu lent: Trouver des explications *simples* et *belles* aux problèmes du Temps, de la lumière et de la gravitation. Il disait souvent que ses grandes idées lui étaient dictées par une voix intérieure.

Plus proche de nous, Lebesgue, dont l'idée intérieure était une vision géométrique des objets mathématiques. Il affirmait "Pour ma part, j'ai toujours été guidé dans mes recherches par des considérations géométriques et, si je ne puis donner aucun de mes mémoires comme une application certaine de l'Analyse à la Géométrie, il me semble que j'ai fait constamment des applications de la Géométrie à l'Analyse".

L'auteur d'une oeuvre scientifique ne prend parfois conscience de ce qu'est l'idée intérieure qui oriente son activité créatrice qu'après plusieurs années de recherche. Ce

fut mon cas; je pouvais reprendre en partie à mon compte ce que dit Lebesgue; dès le début de mes recherches, j'ai toujours cherché à voir simplement les choses simples, à en avoir une vision directe, géométrique et quasiment visuelle. Mais en outre, il s'est greffé sur cette approche stratégique des mathématiques, après plusieurs années de recherche où mon seul plaisir était de résoudre les problèmes variés qui se présentaient à moi, une préoccupation qui est vite devenue comme une seconde nature, à savoir de ne m'intéresser qu'à des problèmes difficiles mais d'énoncé simple, et d'adopter pour les résoudre un cheminement propre à faire de la solution trouvée un outil commode et utile dans un cadre général.

La morale de cette histoire!

Il n'existe aucune recette que l'on puisse donner à un jeune chercheur pour l'aider à trouver sa voie. On peut lui dire seulement – et c'est aussi un message pour tous les éducateurs –

“Sois toi-même. Développe et fortifie ton idée intérieure. Crois en toi et tu pourras soulever le monde.”