Krassimir D. Tarkalanov

Au sujet de l'argumentation dialectique de Hegel pour la formation du concept des nombres naturels et les opérations arithmétiques effectuées avec eux

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1988, fascicule 5
« La théorie des nombres dans « science de la logique » de Hegel », , p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1988___5_A1_0>

AU SUJET DE L'ARGUMENTATION DIALECTIQUE DE HEGEL

POUR LA FORMATION DU CONCEPT DES NOMBRES NATURELS

ET LES OPERATIONS ARITHMETIQUES EFFECTUEES AVEC EUX

Krassimir D. Tarkalanov (Candidat es sciences)

L'étude ici-présente concerne les problèmes philoscphiques des mathématiques. On a examiné la question de l'origine logique et de la limitation logique dans l'argumentation de la formation du concept des nombres naturels (pas pour leur construction), de même que les opérations arithmétiques effectuées avec eux, en se basant sur des positions dialectiques. Les formulations philosophiques de la "Science de la logique [1] de Hegel, concernant l'unité et la lutte des contraires, comme source intérieure du développement objectif en général, et en particulier concernant les concepts mathématiques servent de directives.

L'emploi des nombres naturels dans la vie quotidienne est devenu une apparence si habituelle (pour le comptage), qu'on l'accepte pour une donnée. "La capacité de compter a donné la première impulsion vers la création mathématique" ([2], p.9). Voilà pourquoi, la méthode de Hegel dans l'argumentation des mathématiques en général, passe par son argumentation dialectique pour la formation du concept nombre. Quand on transporte "L'apparence de l'itération (comptage) et de même le concept du nombre naturel comme une apparence acquise à un stade déterminé du développement historique" dans le catégories temporelles ([2], p.7), on peut l'accepter comme réflexion "acquise" de cette argumentation (par exemple, comme une quantité discrète des événements se répétant sans cesse ([2], p.8), dont "pourtant les traces restent" ([2], p.12,) indépendamment "de la manière dont va être traitée la suite des nombres naturels" . Cette suite "a pourtant une structure intérieure quelconque" ([2], dans la même phrase).

Comme point de départ, l'argumentation de la formation des concepts mathématiques doit servir la dialectique intérieure de la réalité objective. Dans ce sens, nous ne pouvons guère nous expliquer la signification exacte de la position intuitionistique : "Pour créer des théories mathématiques, on n'a pas besoin des préalables philosophiques, mais la valeur attribuée à cette activité, dépendant uniquement de nos idées philosophiques" ([3], p.18).

Nous acceptons les concepts "être" et "qualité" pris a priori (primaires). Nous acceptons comme intuitivement claires les formulations : " l'être se compose des qualités" et "une qualité donnée se retrouve dans une autre". Il est naturel de considérer que l'être (comme se rencontrant en soi-même) est une qualité (universelle). On peut croire que Hagel a admis une telle formulation, en écrivant : "la précision, isolée ainsi de par sa nature, comme étant une précision, c'est la qualité - quelques chose de très simple, de très spontanée. La précision en un mot, c'est le plus général comme pourrra être de même la quantité, ainsi que pourra être plus tard le précis. Grâce à cette simplicité de la qualité comme telle, on ne peut plus rien y ajouter". ([1], p.12).

A plusieurs reprises Hegel affirme que l'être se compose des "choses". En réalité, il est naturel d'accepter que chaque "chose" se sépare d'une manière simple des autres "choses", de par sa qualité - c'est à dire, qu'elle représente elle-même une qualité.

En acceptant que l'être se compose des qualités, nous motiverons la possibilité de séparation en se basant sur les qualités données aux autres, liées avec elles (en particulier - à leurs quantités).

Nous admettons pour primaires "des opérateurs dans l'être" "la négation" et le "délit de l'unité des qualités données".

Le premier d'entre-eux, d'une qualité arbitraire confronte sa négation. La négation dialectique n'est pas simplement l'enlèvement d'une qualité donnée. Hegel dit : " La seule chose nécessaire pour faire avancer le mouvement scientifique et pour la toute simple pénétration vers laquelle, en vérité, nous devons aspirer, c'est la connaissance de la situation logique, que le négatif est aussi positif, ou bien que, ce qui contredit, se résout non pas en zéro, pas dans le rien abstrait, mais en réalité, dan sla négation de son contenu particulier.........
Il contient le cencept antécédant, mais il en contient encore plus et c'est l'unité de lui-même et de son contraire; - C'est sur cette voie, en général qu'il faudra construire le système des concepts, arriver à son terme en une marche impétueuse et nette, n'acceptant rien de dehors" ([1], p.49).

En rapport avec la citation énoncée et avec ceci que l'être est une qualité (universelle), il s'ensuit de noter que la qualité, qui est une négation dialectique de l'"être" se nomme "rien", c'est-à-dire, le non "être" = "rien", qui est une partie, une qualité de l'"être". Au contraire, la négation du "rien" c'est l' "être" tout entier. Dans une autre interprétation nous pourrions examiner le "rien" comme une qualité, que l'on rencontre dans toutes les qualités.

Nous remarquons aussi, qu'à part la négation, Hegel a admis aussi la prise de l'unité des qualités données, bien que cela a été mentionné uniquement pour l'unité de la qualité et de sa négation. En conformité avec ce qui a été dit plus haut, il est nécessaire d'élargir la prise de l'unité même dans le cas quand l'une des données en est le "rien". Dans ce cas le résultat est le "rien". En général, nous pourrions admettre que la prise de l'unité est une formalisation, exprimant la qualité, ce qui est commun pour des qualités données.

DERTIMINATION 1 :

Soit K est une qualité donnée. Sa limite Γ nous l'appelons l'unité de K et de sa négation non - K .

Nous estimons que cette "détermination formelle" correspond complètement à la conception de Hegel pour une limite:"...Par conséquent, la chose prise comme un être immédiat et effectif, c est la limite vers une autre chose, mais elle l'a en elle-même et c'est quelque chose par l'intermédiaire de cette limite, qui est aussi son non-être. C'est l'intermédiaire par lequel la chose et l'autre peuvent être et ne pas être ......C'est le milieu entre les deux, dans lequel ils cessent d'exister". ([1], p.145).

DETERMINATION 2 :

Une quantité nette C d'une qualité donnée K on l'appelle l'unité de sa limite Γ et de sa négation non - Γ .

Au début de la seconde partie de son oeuvre Hegel écrit : "Nous avons déjà indiqué la différence entre la quantité et la qualité. La qualité d'ailleurs, c'est la première précision immédiate, tandis que la quantité c'est la précision qui est restée indifférente de l'être, limite, qui aussi bien n'est point une limite...". ([1], p.225).

DETERMINATION 3 :

Une quantité déterminée (quantum) ‖K| de la qualité K que nous nommons l'unité de toutes les quantités nettes (des qualités), que l'on ne rencontre pas dans la négation non - C de sa pure quantité nette C .

Il y a lieu de noter, que la raison d'une telle "détermination formelle" nous donne la position intuitivement claire pour cela, que ce qui est commun entre " 5 pommes ", " 5 prunes " et ainsi de suite "tous les 5", que présente la quanité déterminée " 5 choses ", ne doivent pas être " non-5 pommes ". Une telle étape dans l'argumentation de la formation du concept nombre naturel n'est pas clairement exprimé et n'est pas séparé par Hegel. Nous sommes d'avis, qu'il ne serait pas réalisable sans l'élargissement déjà mentionné de "l'opérateur - prise de l'unité". Ici, il vaudrait mieux citer simplement Hegel : "Comment pourrais-je penser, que la méthode, que j'ai suivi dans ce système de la logique, ou bien plutôt la méthode, que ce système suit en lui-même, n'est pas capable à de beaucoup de perfectionnement, à beaucoup de développement dans les détails, mais je sais bien en même temps, que c'est l'unique méthode à employer. - Cela se voit déjà par la circonstance, qu'il n'est point différent de son objet et de son contenu; - car ce qui l'aide à avancer, c'est le contenu en lui-même, la dialectique, que ce contenu possède en lui-même. Il est bien évident, qu'on ne peut guère compter comme scientifique certains énoncés qui ne suivent pas la voie de cette méthode et ne correspondent pas à son rythme simple, parce que "c'est le rythme de l'objet même". ([1], p.49-50).

Nous pouvons noter aussi que "la prise d'unité des qualités données" n'est pas quelque chose (de parfaitement) different de chacune d'elles, c'est-à-dire l'introduction de cet "opérateur" suit la mache de la méthode dialectique.

DETERMINATION 4 :

Nous appelons q u a n t i t é n u m é r i q u e (n o m b r e) |K| de la qualité K , la limite de sa quantité déterminée |K| .

Nous trouvons la base de cette "détermination formelle" dans le début du second chapître de la deuxième partie de son livre : "... A un tel degré α est identique), se rapportant vers elle-même, β) entourant et γ) excluant l'autre limite.

Le quantum, mis pleinement dans ces définitions, c'est le nombre". ([1], p.250). Nous pouvons compter, que le nombre [K] se rapporte vers soi comme (dans limite du quantum, car comme limite, il entoure le quantum K et qu'il exclut les autres quantum non - [K] . Dit d'une manière explicative, le nombre 5 est la limite du quantum "5 objets", qui entoure tous les " - 5 objets" et exclut tous les " non - 5 objets". Hegel indique, que dans sa formulation pour la détermination du concept nombre, on peut trouver les moments de la numérotation numérique et de l'unité : "Le nombre en contient plusieurs, qui composent son être effectif, mais ne les contient pas d'une manière indéterminée, tandis que la détermination de la limite tombe sur lui; la limite exclut un autre être effectif, c'est-à-dire d'autre "plusieurs" et les "uns" entourés par lui sont une grande quantité déterminée, le nombre, l'autre, par rapport duquel (remarque de l'auteur, qui), compris (r. de l'aut., comprise) une interruption, comme elle est dans le nombre, c'est l'unité, la continuité du nombre. Le numéro et l'unité composent les moments du nombre". ([1], p.251).

Nous estimons, que dans ces moments contradictoires du concept nombre, répercutant les catégories isolation et communauté, on trouve la réflexion de la loi dialectique pour le passage des accumulations quantitatives (plusieurs "uns") sa modification qualitative (un autre "un", autre nombre). Voilà pourquoi, l'assertion de Hegel ne semble pas complètement élucidée : "Ainsi, le "un" limité c'est l'état de la précision envers autre chose, la différenciation du nombre des autres nombres. Mais cette différenciation ne se modifie pas en une précision qualitative, mais elle reste quantitative et se fait uniquement dans une réflexion extérieure comparée; le nombre comme un reste revenu en lui-même et indifférent envers d'autres nombres" ([1], p.252). C'est ici peut-être, qu'il faut se rappeler que, d'après l'acception que "l'être se compose des qualités", la précision quantitative est aussi une qualité quelconque, enlevant les caractéristiques quantitatives de quelque qualité initiale. D'autre part, les nombres se comparent entre-eux, c'est-à-dire, ils ne sont pas complètement indifférents l'un envers l'autre.

Nous remarquerons, que nous arrivons au concept nombre sans utiliser les précision "fini" et "infini" que Hegel avait introduit avant. Mais, comme on peut voir, leur utilisation s'est rendue peu importante.

Il nous semble rationnel de passer à présent vers la concrétisation des déterminations citées plus haut pour l'argumentation dialectique quant à la formation du concept des nombres naturels.

Soit la qualité K_1 est ("être" c'est-.à-dire $K1$ = "être"). Alors le concept du (nombre 1 (un, le seul, le seul être) s'argumente comme ["être"], c'est-à-dire 1 = [être"]. L' "être" étant l'unique origine initiale, on argumente et on accepte de cette façon, que le nombre 1 n'est point précédé d'aucun nombre naturel. En même temps dans l' "être" on trouve plusieurs qualités (plusieurs "un").

Soit $K_{..}$ est une qualité pour laquelle $[K_{..}] = 1$ et l'unité à laquelle avec la qualité 1 est égal à "rien". Examinons la qualité $K_{..}$, qui est la négatin de l'unité des qualités non - 1 et non - $K_{..}$. Nous déterminons le nombre 2 comme $2 = [K_{..}]$.

Soit $K_{...}$ est une qualité, pour laquelle $[K_{...}] = 1$ et l'unité auquel avec la qualité 2 est "rien". Si on examine la qualité $K_{...}$, qui est la négation de l'unité de non - 2 et de non - $K_{...}$. On détermine que $3 = [K_{...}]$

Ayant en vue le principe de la négation, ce processus a la possibiité de continuer toujours. Les qualités, que l'on peut obtenir de cette manière, nous les appellerons des nombres naturels. Nous pouvons considérer, que dans cette méthode sont engagés les postulats dialectiques à cela, que chaque nombre naturel a (juste un) héritier, tandis que d'après sa "construction" il en a un antécédent. Si dans la continuité du processus certaines propriétés (qualités) des nombres naturels se conservent, dans ce cas tous possèdent les mêmes propriétés. Ce fait peut être noté comme une argumentation dialectique pour la réception du principe de la pleine induction mathématique.

Hegel écrit : "L'arithmétique examine le nombre et sa figure, ou plutôt ne les examine pas, mais opère avec eux. Car le nombre, c'est la précision inerte, indifférente; il doit être mis en action et dans un rapport en dehors. Les manières de report sont les espèces de comptage". ("[1], p.254). En accord avec ce qui a été cité ci-desssus, on remarquera, que la désignation des nombres naturels dans la relation avec les espèces de comptage, peut être argumentéée comme une propriété dialectique intérieure de leur multitude (qualité). En réalité, soient les qualités K et M qui déterminent les nombres naturels [K] et [M], et l'unité de K et M est le "rien". Examinons l' union P de K et M (la négation de l'unité du non - K et de non - M). La somme des nombres [K] et [M] nous l'appelons le nombre [P].

Nous admettons, que cette méthode d'argumentation pour l'introduction des opérations arithmétiquesest en rapport avec l'exigence de Hegel pour la constuction du système des concepts dans une irrésistible "marche nette qui n'accepte rien de dehors".

Par contre, si la qualité P c'est l'union des qualités K et M, où l'unité de K et M c'est le "rien" et [P], [K], [M] en sont les nombres naturels, c'est que [K] = [P] - [M] et [M] = [P] - [K].

Il est évident que les opérations multiplication et son contraire - division - peuvent s'introduire comme une addition et une soustraction un nombre naturel de fois d'un nombre naturel donné.

Pour conclure, nous pouvons signaler, que le système examiné dans cet exposé pour l'argumentaion du concept des nombres naturels et les opérations arithmétiques avec eux, en est dialectique. Il est basé sur les formulations cités par Hegel. Naturellement, dans son application à l'avenir, son perfectionnement en est bien possible.

LITTERATURE

[1] G.W. F. Hegel - La science de la logique, première partie-logique objective...s.1966. (en bulgare).

[2] P. Chopov - Les concepts mathématiques en apparence, leur indépendance de la logique formelle et leur rôle essentiel dans les problèmes des mathématiques et de la physique. Travaux scientifiques de l'Institut Pédagogique Supérieur - Plovdiv, t.6, livre 2, (1968), 7-22. (en bulgare - (suite), Travaux scientifiques de l'Institut Pédagogique Supérieur - Plovdiv, t.6, livre 3, (1968), 47-58.

[3] A. Heiting - Intuitionisme. Ed. "Mir", M. 1965. (en russe).