A. Goralski

À l'origine de l'heuristique : Hilbert et Poincaré

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1988, fascicule 3
« À l'origine de l'heuristique : Hilbert et Poincaré », , p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1988___3_A1_0>

A L'ORIGINE DE L'HEURISTIQUE

HILBERT ET POINCARE

Plan :

a. un problème simple et une question importante;
b. le principe de complémentarité et les résultats de la connaissance complémentaire de la créativité;
c. David Hilbert et Henri Poincaré - au seuil du XXe siècle;
d. qu'est-ce qui résulte ?

A. Je vais commencer par vous présenter un problème simple, formulé par le créateur de l'heuristique moderne, mon maître et ami, George Polya, et par moi-même.

Ce problème fera engendrer certaines questions - nous allons tenter d'y répondre; et même si nous n'arrivons pas à le faire, du moins nous nous les rendrons conscientes.

B. Après quoi, je vais vous présenter la manière d'étudier la créativité caractéristique pour notre cercle intellectuel.

C. Pour finir, je vais puiser aux sources : je considèrerai notamment deux principales interventions présentées lors du 2ème Congrès des Mathématiciens à Paris en 1900, à savoir :

- la conférence de Poincaré, qui fut, rappelons-le, le président de ce congrès et était, déjà à l'époque, le mathématicien le plus brillant de son temps, dont la conférence avait pour titre
"Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques" ;

- et la conférence d'Hilbert, prévue, dans un premier temps, pour être présentée, sous forme de communiqué, dans la section VI "Enseignement et méthodes" et que l'on a décidé, déjà au cours des débats, de placer parmi les conférences, et ayant pour titre
"Sur les problèmes futurs des mathématiques".

D. Après avoir esquissé ces interventions, je vais revenir à ce qui précède; je vais essayer notamment de voir ce qui en est résulté pour nous, ici réunis et vivant ensemble cette soirée tardive de la mi-mars.

Ici je vais faire une réserve.

Une pleine réalisation du programme ainsi défini n'est guère possible dans un temps si court que celui dont nous disposons tous. Que me reste-t-il à faire sinon une esquisse. J'en appelle donc à votre indulgence : j'ai espoir que vous décèlerez les principaux contours de ce que j'aimerais vous transmettre, mais je vous prie de ne pas en vouloir, ni à vous même ni à moi, si ces contours ne sont pas - ici et maintenant - nets.

Et encore une réserve :

Il y a, dans ce que je vais vous dire, toute une multitude de prémisses; je suis à même d'en relever à peine quelques-unes ; les autres resteront enthymématiques, avec tout ce que ce fait entraîne comme conséquences.

A l'oeuvre alors.

A. Soit le problème suivant :

L'ours est sorti de sa retraite pour aller se promener : tout d'abord 1 mille au sud, puis 1 mille à l'est et enfin 1 mille au nord. Il s'est avéré qu'il avait regagné son gîte.

1) De quelle couleur était cet ours ?

...

Si je vous ai bien compris, vous dites que c'était un ours blanc.
C'est vrai, je suis d'accord, et alors :

2) Pourquoi, Comment peut-on justifier cette réponse ?

...

Très bien : Notre ours habite au Pôle Nord : en le quittant, il peut faire le trajet comme dans le problème : tout d'abord 1 mille au sud, le long d'un certain méridien, puis 1 mille à l'est (ou à l'ouest, en fonction du camp ...) le long d'un parallèle, et enfin - le dernier mille exactement dans la direction du N, de nouveau le long d'un méridien (encore que l'on soit tenté de dire : boréalien ...).

3) Mais, mais ...! Est-ce que le Pôle Nord est le seul point du globe terrestre à remplir les conditions du problème ?

...

Y en a-t-il peut-être d'autres ?

...

Pour faciliter, ou plutôt, pour rendre la réponse plus difficile, au contraire, je vais dire qu'il y en a encore autant que de nombres réels ...

...

Oui, très bien : nous marchons I mille dans la direction de S, puis nous contournons S le long d'un cercle, d'un pourtour d'un mille, pour regagner sur nos propres traces le point dont nous sommes partis; remarquons que les points dont on peut partir sont au nombre de ceux contenus dans un certain cercle, comme il a été dit.

Bien, maintenant permettez-moi encore de vous demander cela :

4) Avons-nous trouver déjà tous les points satisfaisant la condition de notre petit problème ?

Je vais vous aider : loin de là : il y en a encore bien des continuums dénombrables ...

...

Parfaitement : il est évident que l'on peut contourner le Pôle Sud, notre S, deux fois, trois fois, quatre fois, etc.

A chaque fois nous avons un autre ensemble de points ...

Bien; passons à d'autres questions (jusque là, c'est Polya qui est l'auteur du problème, maintenant c'est moi qui le deviens) :

5) Quelle est l'essence de la difficulté, qu'il a fallu vaincre, en passant du problème 2 au 3 :

difficulté $2 \rightarrow 3$?

L'essence du probème gît en la nécessité de surmonter un schéma, et un schéma récemment créé :

Nous avons résolu le problème, avec succès; en entreprenant d'en résoudre un autre, nous sommes enclins à imiter le schéma; cependant, il faut faire une sorte de révolution : rejeter le schéma et commencer - dans un certain sens - à nouveau ...!

6) D'accord, et en quoi consiste l'essence du passage :

difficulté $3 \rightarrow 4$?

c'est-à-dire de passer à la solution lorsqu'on contourne S une seule fois, et quand on le fait n fois ?

L'essentiel, c'est de conserver le schéma (qui plus est, dans la situation que nous venons de vivre : on mettait en relief la nécessité de le rejeter ...!

Remarquons, en passant, que l'on propage - dans l'heuristique, mais pas seulement - les vertus d'un schéma à surmonter.

A la lumière de ce qui précède, l'on voit que parfois l'essentiel c'est de s'accrocher opiniâtrement à ce qui est déjà bien connu ...

Une question naît, naturellement :

7) Et comment distinguer :

distinction de 5 et de 6 ?

C'est-à-dire comment savoir que dans le cas d'un problème donné le schéma (celui existant, qui semble approprié) doit être rejeté et, dans un autre, au contraire, maintenu ?

C'est une question très importante à laquelle nous n'avons pas de bonne réponse. Et personne, semble-t-il, ne la connaît.

B. Si cette aventure intellectuelle vous a plu, vous allez me pardonner facilement cette partie de ma conférence à laquelle je vais passer maintenant : je vais me mettre dans la peau d'un philosophe pour vous entretenir de quelques unes de ses approches auxquelles nous sommes parvenus dans notre cercle.

Nous donnons, entre autres, aux résultats de nos recherches, la forme de règles de comportement qui, respectées, donne une chance de mener une vie aussi bien tournée vers la créativité que bonne.

Nous sommes parvenus à toute une série de principes de ce genre.
Qu'il nous soit permis d'en présenter l'une d'entre elles, à savoir : le principe de complémentarité.

Le principe de complémentarité indique les voies de la connaissance de la créativité :

a) En appréhendant des choses complexes et, peut-être inconstantes - telle la créativité - on renonce bénévolement et consciemment, à l'intention de les connaître en tant que telles.

(Au niveau de l'action, cela va s'exprimer par l'abandon de toute tentative de formuler une définition de la chose connue définitive et clôturant la connaissance).

b) Au lieu de quoi, on cherche des approches partielles, réciproquement indépendantes, aussi nombreuses que possible.

(Ce qui veut dire que vont être découvertes des descriptions de la chose étudiée réciproquement complémentaires).

c) Faisant ce qui vient d'être dit, tu perds en généralité et en capacité de synthèse, peut être momentanément, mais tu gagnes netteté, en clarté et en durabilité de l'analyse et aussi en capacité de surmonter un obstacle empêchant ou rendant impossible celle-ci.

Qu'il nous soit permis de nous concentrer sur les résultats de la connaissance complémentaire de la créativité.

1. Pour commencer, abordons le phénomène de la créativité de manière descriptive.

   Or, il suffit de prêter une oreille attentive aux acceptions que nous sommes enclins à attacher à la notion de la créativité pour remarquer que la réponse qui s'impose à la question de savoir "ce que c'est que la créativité ?" est la suivante : "est créateur ce qui est nouveau".

   Cependant, il n'est pas difficile de trouver ici un contre-exemple démontrant l'insuffisance de cette intuition. Soit une phrase accidentelle du genre de : "abba baab, ab ba - a!". C'est nouveau et, nonobstant, ce n'est point là une manifestation de la créativité. Il y manque quelque chose ... Et quoi, par exemple ? C'est de pouvoir la considérer comme ayant une valeur.

   En rectifiant ce qui précède, nous dirons donc :
   "Est créateur ce qui est nouveau et précieux à la fois".
   Notons que cette définition résiste aux contre-exemples. Par ailleurs, il est facile de citer toute une multitude d'exemples confirmant sa justesse.

2. Prenons maintenant comme point de départ les prémisses de toute action.
   Comme on le sait, elles sont au nombre de deux :
   l'action doit être nécessaire et possible.
   La catégorie de la nécessité trouve son reflet dans le sentiment du besoin, la catégorie de la possibilité se manifeste par contre dans l'existence d'une certaine réserve, d'un excès de quelque chose que l'on peut mettre à profit dans l'action.

   Faisons une distinction entre divers genres d'activité en introduisant la dichotomie de la réalisation de la catégorie de la nécessité et de la possibilité.
   En appariant les alternatives, nous obtenons une forme générale de quatre éventualités :
   action visant à réaliser une valeur X, entreprise dans la situation de la possiblité Y,
   où : X = {vitale, humaine} ; Y = {actuelle, potentielle}.
   Seule une de ces éventualités se laisse raisonnablement associer à la créativité, à savoir celle qui conduit à dire que :
   "Une action est créative lorsqu'elle tend à réaliser une valeur humaine et est entreprise dans une situation d'insuffisance de moyens ou de manières de sa réalisation".

3. La créativité -en elle-même- est un moyen. Un moyen de quoi par exemple? Des réponses très diverses s'imposent.
Elle est - sans nul doute - un moyen d'autoexpression. Et aussi celui d'autoréalisation. Et, dans une non moindre mesure, un moyen d'autoconservation (dans le sens, ne serait-ce que, du célèbre "non omnis moriar"!).

Tout ceci est bien vrai. Ceendant, à notre avis, l'essentiel c'est que :

"La créativité est le plus important des moyens - de tous ceux qui sont accessibles à l'homme - de surmonter l'erreur, tant individuelle que collective ou spécifique".

4. Découvrons aussi le bien dans cet aspect "sombre" de la créativité que nous venons de mentionner.

Posons-nous alors la question : Quelle forme de base l'homme attribue-t-il au fait de surmonter l'erreur vécu comme un acte de créativité ?

Nous pensons qu'une bonne réponse, porteuse d'une définition partielle successive de la créativité, nous est donné par :

"L'acte est créatif lorsque son essence se laisse définir comme une algorithmisation de l'inalgorithmisable".

5. Les quatre définitions de la créativité qui précèdent ont été obtenues, pour ainsi dire, "ici et maintenant". Une question intéressante se pose donc : Peut-on, à considérer la créativité, "plonger en quelque sorte dans le temps" ?

Faisons donc telle étude; et cela en associant la créativité respectivement avec le passé, le futur et le présent.

En quoi consiste l'essence du lien unissant la créativité avec le passé ?

Après mûre réflexion, on peut arriver à la conviction que cette essence se laisse présenter comme voici :

"La créativité c'est aussi un dialogue du maître avec le passé".

Nous entendons par dialogue un entretien harmonieux de deux sujets

jouissant des mêmes droits. L'un des deux, c'est le maître, c'est-à-dire celui qui a maîtrisé dans une mesure peu commune un métier. Le deuxième - un passé dûment formé.

6. En passant aux liens existant entre la créativité et le futur, concentrons notre attention sur ce monde qui naît en quelque sorte avec nous, qui se réalise aussi grâce à notre effort et nos aspirations.

Il est évident que, de ce point de vue, le sens de ce que nous cherchons, peut s'exprimer ainsi :

"La créativité c'est également une tentative de formation du futur".

7. Et, pour finir, cette dimension de la créativité qui - perçue dans la perspective du passé et du futur - s'associe de manière essentielle au présent.

Or, à notre avis, un aspect de la créativité hautement essentiel, sinon le plus important, se laisse présenter comme voici :

"La créativité c'est avant tout une durée réalisée".

Le phénomène de la vie en est un bon exemple.

C. Ainsi, la créativité, c'est également un dialogue du maître avec le passé. Maître, je ne le suis pas, moi, mais il y en a en cette enceinte qui le sont.

Je ne suis pas non plus un passé, je dispose pourtant des travaux du II Congrès, et de ce qui y résonne et qui - ce que j'espère pouvoir démontrer - n'a pas perdu son importance jusqu'aujourd'hui.

Les mathématiques contemporaines, pour la plupart du moins, se sont des mathématiques dans le style et dans l'esprit d'Hilbert.

Et leur principale question porte sur les limites de la logisation et de la formalisation.

Considérons le point de départ de telles mathématiques :

C'était bien la conférence prononcée par Hilbert au II Congrès des mathématiciens en 1900 à Paris.

"Sur les problèmes futurs des mathématiques".

Nous savons déjà que Poincaré présente à ce même Congrès sa conférence intitulée :

"Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques".

Rappelons-le : Henri Poincaré est le président du Congrès.

Sans nul doute il peut parler de ce qui est pour lui le plus important.

Et voilà, sans commentaires, les principales thèses des deux adversaires :

Hilbert :	Poincaré :
1. But - problème;	1. triple but des mathématiques;
2. l'axiome;	2. la logique et l'intuition;
3. 23 problèmes;	3. l'avenir des mathématiques.

(H) Principales thèses de Hilbert :

(Je cite) :

(1) "Qui me soulèverait volontiers le voile qui nous cache l'avenir afin de jeter un coup d'oeil sur les progrès de notre Science et les secrets de son développement ultérieur durant les siècles futurs ? (...)

L'histoire enseigne la continuité du développement de la Science. Nous savons que chaque époque a ses problèmes que l'époque suivante résout, ou laisse de côté comme stériles, en les remplaçant par d'autres. Si nous désirons nous figurer le développement présumable de la Science mathématique dans un avenir prochain, nous devons repasser dans notre esprit les questions pendantes et porter notre attention sur les problèmes posés actuellement et dont nous attendons de l'avenir la résolution. Le moment présent, au seuil du XXe siècle, me semble bien choisi pour passer en revue ces problèmes; en effet, les grandes divisions du temps non seulement permettent de jeter un regard sur le passé, mais encore attirent notre pensée sur l'avenir inconnu. (...)

Et de même que dans toute entreprise humaine il faut poursuivre un but, de même dans la recherche mathématiques il faut des problèmes. La puissance du chercheur se retrempe dans leur résolution, il y trouve de nouvelles méthodes et de nouveaux points de vue, d'où il découvre un horizon plus vaste et plus libre.

Il est difficile et souvent impossible de préjuger exactement de la valeur d'un problème; (...). On peut néanmoins se demander s'il n'existe pas des attributs généraux caractérisant un bon problème mathématique.

(...) Cette clarté, cette limpidité si énergiquement exigée ici d'une théorie mathématique, je l'exigerais encore davantage d'un problème mathématique parfait; ce qui est clair et limpide nous attire en effet, ce qui est embrouillé nous rebute.

Pour avoir de l'attrait, un problème mathématique doit être difficile, mais non pas inabordable (...); il doit au contraire être un véritable fil conducteur à travers le dédale du labyrinthe vers les vérités cachées, et nous récompenser de nos efforts par la joie que nous procure la découverte de la solution". (Fin de citation - Compte rendu du Congrès, p.58-59).

(Je cite) :

(2) "Le fait remarquable dont nous venons de parler (question de l'impossibilité de solution - AG) et certains raisonnements philosophiques on fait naître en nous la conviction que partagera certainement tout mathématicien, mais que jusqu'ici personne n'a étayée d'aucune preuve, la conviction, dis-je, que tout problème mathématique déterminé doit être forcément susceptible d'une solution rigoureuse, que ce soit par une réponse directe à la question posée, ou bien par la démonstration de l'impossibilité de la résolution, c'est-à-dire la nécessité de l'insuccès de toute tentative de résolution.(...)

Cet axiome de la possibilité de résoudre tout problème, est-ce une propriété caractéristique et distinctive de la pensée mathématique, ou serait-ce une loi générale du mode d'existence de notre entendement, à savoir que toutes questions que se pose notre entendement soient susceptibles d'être résolues par lui ? (...)

Cette conviction de la possibilité de résoudre tout problème mathématique est pour nous un précieux encouragement pendant le travail. Nous entendons toujours résonner en nous cet appel : Voilà le problème, cherches-en la solution. Tu peux la trouver par le pur raisonnement. Jamais, en effet, mathématicien ne sera réduit à dire : Ignorabimus".

(Fin de citation - ibidem, p.68-69).

Comme nous le savons aujourd'hui c'était trop beau pour être vrai. Une question se pose : quel prix Hilbert a-t-il payé pour pouvoir nourrir cette conviction ?

Ayant présenté cet axiome, Hilbert passe à ses 23 problèmes célèbres.

Et il termine sa conférence par une sorte d'agitation (je cite) :

"En effet, les Mathématiques sont les fondements de toutes les connaissances naturelles exactes. Pour qu'elles remplissent complètement ce but élevé, puissent-elles être dans le nouveau siècle cultivées par des maîtres géniaux et par nombre de jeunes gens brûlant d'un noble zèle !"

(Fin de citation - ibidem, p.114).

(P) Passons maintenant à Henri Poincaré :

(Je cite - "Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique") :

(1) "Les mathématiques ont triple but :

- elles doivent fournir un instrument pour l'étude de la nature;
- aider le philosophe à approfondir les notions de nombre, d'espace, de temps;
- un but esthétique (leurs adeptes y trouvent des jouissances analogues à celle que donne la peinture et la musique; ils admirent la délicate harmonie des nombres et des formes; ils s'émerveillent quand une découverte nouvelle leur ouvre une perspective inatendue; (...) peu de privilégiés sont appelés à la gouter pleinement (la joie - AG), cela est vrai, mais n'est-ce pas ce qui arrive pour les arts les plus nobles ?)"

(Fin de citation - Compte rendu du 1er Congrès International des Mathématiciens, Zurich 1897).

(2) (Je cite - "Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques"):

"Il est impossible d'étudier les Oeuvres des grands mathématiciens, et même celles des petits, sans remarquer et sans distinguer deux tendances opposées, ou plutôt deux sortes d'esprits entièrement différents. Les uns sont avant tout préoccupés de la logique; à lire leurs Ouvrages, on est tenté de croire qu'ils n'ont avancé que pas à pas, avec la méthode d'un Vauban qui pousse ses travaux d'approche contre une place forte, sans rien abandonner au hasard. Les autres se laissant guider par l'intuition et font du premier coup des conquêtes rapides, mais quelquefois précaires, ainsi que de hardis cavaliers d'avant-garde.

Ce n'est pas la matière qu'ils traitent qui leur impose l'une ou l'autre méthode. Si l'on dit souvent des premiers qu'ils sont des analystes et si l'on appelle les autres géomètres, cela n'empêche pas que les uns restent analystes, même quand ils font de la Géométrie, tandis que les autres sont encore des géomètres, même s'ils s'occupent d'Analyse pure. C'est la nature même de leur esprit qui les fait logiciens ou intuitifs, et ils ne peuvent la dépouiller quand ils abordent un sujet nouveau. (...)

Chose curieuse ! Si nous relisons les Oeuvres des anciens, nous seront tentés de les classer tous parmi les intuitifs. Et pourtant la nature est toujours la même, il est peu probable qu'elle ait commencé seulement dans ce siècle à créer des esprits amis de la logique. Si nous pouvions nous replacer dans le courant des idées qui régnaient de leur temps, nous reconnaîtrions que beaucoup de ces vieux géomètres étaient analystes par leurs tendances. Euclide, par exemple, a élevé un échafaudage savant où ses contemporains ne pouvaient trouver de défaut. Dans cette vaste construction, dont chaque pièce, pourtant, est due à l'intuition, nous pouvons encore aujurd'hui sans trop d'efforts reconnaître l'oeuvre d'un logicien.

Ce ne sont pas les esprits qui ont changé, ce sont les idées; les esprits intuitifs sont restés les mêmes; mais leurs lecteurs ont exigé d'eux plus de concessions.

Quelle est la raison de cette évolution ?

Il n'est pas difficile de le découvrir. L'intuition ne peut nous donner la rigueur, ni même la certitude, on s'en est aperçu de plus en plus. (...)

Une première question se pose. Cette évolution est-elle terminée ?

Avons-nous atteint enfin la rigueur absolue ? A chaque stade de l'évolution nos pères croyaient aussi l'avoir atteinte. S'ils se trompaient, ne nous trompons-nous pas comme eux ?

Nous croyons dans nos raisonnements ne plus faire appel à l'intuition; les philosophes nous diront que c'est là une illusion. La logique toute pure ne nous mènerait jamais qu'à des tautologies; elle ne pourrait créer du nouveau; ce n'est pas d'elle toute seule qu'aucune science peut sortir.

Ces philosophes ont raison dans un sens : pour faire l'Arithmétique, comme pour faire la Géométrie, ou pour faire une science quelconque, il faut autre chose que la logique pure. Cette autre chose, nous n'avons pour la désigner d'autre mot que celui d'intuition. Mais combien d'idées différentes se cachent sous ce même mot ?

Comparons ces quatre axiomes :

1°) Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles

2°) Si un théorème est vrai du nombre 1 et si l'on démontre qu'il est vrai de n+1, pourvu qu'il le soit de n, il sera vrai de tous les nombres entiers.

3°) Si sur une droite le point C est entre A et B et le point D entre A et C, le point sera entre A et B.

4°) Par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite.
Tous quatre doivent être attribués à l'intuition, et cependant le premier est l'énoncé d'une des règles de la logique formelle; le second est un véritable jugement synthétique a priori, c'est le fondement de l'induction mathématique rigoureuse; le troisième est un appel à l'imagination; le quatrième est une définition déguisée. (...)

Nous avons donc plusieurs sortes d'intuitions; d'abord, l'appel aux sens et à l'imagination; ensuite, la généralisation par induction, calquée, pour ainsi dire, sur les procédés des sciences expérimentales; nous avons enfin l'intuition du nombre pur, celle d'où est sorti le second des axiomes que j'énonçais tout à l'heure et qui peut engendrer le véritable raisonnement mathématique.

Les deux premières ne peuvent nous donner la certitude , (...) ; mais qui doutera sérieusement de la troisième , qui doutera de l'Arithmétique ? (...)

Les philosophes font encore une autre objection : 'Ce que vous gagnez en rigueur, disent-ils, vous le perdez en objectivité. Vous ne pouvez vous élever vers votre idéal logique qu'en coupant les liens qui vous rattachent à la réalité. Votre Science est impeccable, mais elle ne peut le rester qu'en s'enfermant dans une tour d'ivoire et en s'interdisant tout rapport avec le monde extérieur. Il faudra bien qu'elle en sorte dès qu'elle voudra tenter la moindre application'.

Je veux démontrer, par exemple, que telle propriété appartient à tel objet dont la notion me semble d'abord indéfinissable parce qu'elle est intuitive. J'échoue d'abord ou je dois me contenter de démonstrations par à peu près; je me décide enfin à donner à mon objet une définition précise, ce qui me permet d'établir cette propriété d'une manière irréprochable.

'Et après, disent les philosophes, il reste encore à montrer que l'objet qui répond à cette définition est bien le même que l'intuition vous avait fait connaître; ou bien encore que tel objet réel et concret dont vous croyiez reconnaître immédiatement la conformité avec votre idée intuitive, répond bien à votre définition nouvelle. C'est alors seulement que vous pourrez affirmer qu'il jouit de la propriété en question. Vous n'avez fait que déplacer la difficulté'.

Cela n'est pas exact; on n'a pas déplacé la difficulté, on l'a divisée. La proposition qu'il s'agissait d'établir se composait en réalité de deux vérités différentes, mais que l'on n'avait pas distinguées tout d'abord. La première était une vérité mathématique et elle est maintenant rigoureusement établie. La seconde était une vérité expérimentale. L'expérience seule peut nous apprendre que tel objet réel et concret répond ou ne répond pas à telle définition abstraite. Cette seconde vérité n'est pas démontrée mathématiquement, mais elle ne peut pas l'être, pas plus que ne peuvent l'être les lois empiriques des Sciences physiques et naturelles. Il serait déraisonnable de demander davantage.

Eh bien, n'et-ce pas un grand progrès d'avoir distingué ce qu'on avait longtemps confondu à tort ?

Est-ce à dire qu'il n'y ait rien à retenir de cette objection des philosophes ? Ce n'et pas cela que je veux dire; en devenant rigoureuse, la Science mathématique prend un caractère artificiel qui frappera tout le monde; elle oublie ses origines historiques; on voit comment les questions peuvent se résoudre, on ne voit plus comment et pourquoi elles se posent.

Cela nous montre que la logique ne suffit pas; que la Science de la démonstration n'est pas la Science tout entière et que l'intuition doit conserver son rôle comme complément, j'allais dire comme contrepoids ou comme contrepoison de la logique. (...)

Dans ces édifices compliqués élevés par les maîtres de la Science mathématique, il ne suffit pas de constater la solidité de chaque partie et d'admirer l'oeuvre du maçon, il faut comprendre le plan de l'architecte.

Or, pour comprendre un plan, il faut en apercevoir à la fois toutes les parties, et le moyen de tout embrasser dans un coup d'oeil d'ensemble, c'est l'intuition seule qui peut nous le donner. (...)

Cette vue d'ensemble est nécessaire à l'inventeur; elle est nécessaire également à celui qui veut réellement comprendre l'inventeur; la logique peut-elle nous la donner ?

Non; le nom que lui donnent les mathématiciens suffirait pour le prouver. En Mathématiques, la logique s'appelle Analyse et analyse veut dire division, dissection. Elle ne peut donc avoir d'autre outil que le scalpel et le microscope.

Ainsi, la logique et l'intuition ont chacune leur rôle nécessaire. Toutes deux sont indispensables. La logique qui peut seule donner la certitude est l'instrument de la démonstration; l'intuition est l'instrument de l'invention".

(Fin de citation - Compte rendu du IIème Congrès, p.115, 118, 121, 122, 122-124, 125, 126).

(3) (Je cite - "L'avenir des mathématiques") :

"Pour prévoir l'avenir des mathématiques, la vraie méthode est d'étudier leur histoire et leur état présent. (...)

Nous savons bien que les mathématiques continueront à se développer, mais il s'agit de savoir dans quel sens. On me répondra "dans tous les sens" et cela est vraie en partie; mais si cela était tout à fait vrai, cela deviendrait un peu effrayant. Nos richesses ne tarderaient pas à devenir encombrantes et leur accumulation produirait un fatras aussi impénétrable que l'était pour l'ignorant la vérité inconnue. (...)

On s'est efforcé d'autre part d'énumérer les axiomes et les postulats plus ou moins dissimulés, qui servent de fondement aux diverses théories mathématiques. M. Hilbert a obtenu les résultats les plus brillants. Il semble d'abord que ce domaine soit bien limité et qu'il n'y ait plus rien à y faire quand l'inventaire sera terminé, ce qui ne saurait tarder. Mais quand on aura tout énuméré, il y aura bien des manières de tout classer, un bon bibliothécaire trouve toujours à s'occuper, et chaque classification nouvelle sera instructive pour le philosophe.

J'arrête cette revue (...) Exemples auront suffit pour vous montrer par quel mécanisme les sciences mathématiques ont progressé dans le passé, et dans quel sens elles doivent marcher dans l'avenir".

(Fin de citation - Compte rendu du IVème Congrès, Roma 1908).

D. Au lieu de conclure :

Qu'est-ce qui résulte bien de tout cela ?

Franchement, je ne sais pas. Un prétexte à la réflexion, j'espère. Et peut-être quelque chose de plus, qui sait ?

Veuillez vous donner la peine de trancher vous-mêmes.

Pour moi, une chose est certaine, peut-être deux, et même trois :

1) en heuristique il est plus important - ici et maintenant - de savoir comment poser le problème, d'où et pourquoi les problèmes viennent, à quoi ils mènent et pourquoi ils y mènent, etc., et non pas : comment les résoudre;

2) en mathématiques il est déjà temps de rejeter l'hibertisme : sa grandeur est passée, il a épuisé ses forces vitales, et nous tous, à l'occasion ..., il est temps qu'il cède la place à de nouveaux courants; l'un d'entre eux nous vient d'une source vive que nous avons baptisé du nom de Henri Poincaré; il est pour nous, sans nul doute, un maître non moins important que Socrate, Descartes, Bolzano et Polya ;

Non seulement dans l'heuristique, mais aussi, et peut-être surtout, dans les Mathématiques, entendues - je le rappelle - en tant qu'instrument de l'étude de la Nature ;

3) en travestissant les Romains, je voudrais dire à la fin philosophari necesse est!

Puisse notre modeste voix vous être ce soir une aimable aventure parisienne.

Je vous remercie cordialement de votre attention.